

● 全自正 编著

数学就这么有趣

——初中数学方法点拨

SHUXUE JIUZHEME YOUQU

故事开道 情感穿线
典例示范 思维点拨
方法指导 精练详解
感悟智慧 提升能力



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学就这么有趣

——初中数学方法点拨

全自正 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学就这么有趣/全自正编著. —杭州: 浙江大学出版社, 2009. 7

ISBN 978-7-308-06905-2

I. 数… II. 全… III. 数学课—初中—课外读物 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 116468 号

数学就这么有趣——初中数学方法点拨

全自正 编著

责任编辑 石国华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 富阳育才印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 21.50

字 数 692 千字

版 次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-06905-2

定 价 29.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571) 88925591

作者寄语

上帝给了我一双黑色的眼睛，我
要用它寻找光明；思维擦亮了我迷糊
的眼睛，我将与智慧同行！

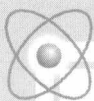
作者 赠言

一打开本书，智慧之神就与你的心灵开始沟通，在你阅读过程中，她春风化雨，滋润着你的心田。

人生有两个启蒙期，金色童年是你们的第一启蒙期，童年的你像刚刚破壳而出的小鸡，对七彩世界充满了惊奇——天有多高，地有多厚，先有鸡还是先有蛋……一连串的问号展现了你们的求知精神，这时，你们是追求知识的主体，童话、故事……满足了你们的心理需求。

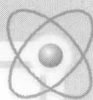
不知不觉中你们长大了，正在从梦幻少年走向青春期的花季雨季，步入了学习科学知识的第二启蒙期。第二启蒙期学到的知识正好解答第一启蒙期的疑惑，学习更应希望加渴望，勤奋加勤思才对。但现实情况是因学习压力过大，而致学习成绩不理想。你们呼唤着：智慧之神，您在哪里？我怎样才能获得智慧，学好数学！

智慧之神微笑回答，除社会原因外，看听“童话故事”和学习“科



学技术”是两个不同性质的启蒙期,存在着巨大的高差,使大家的学习产生了困难,也是一个重要原因.为此,智慧之神急同学所急,推出《数学就这么有趣》一书(适用各种版本教材),在谈笑风生中架起了两个不同启蒙期的楼梯,能有效降低大家的学习难度.全书故事开道,情感穿线;典例示范,思维点拨;方法指导,精练详解;感悟智慧,提升能力.其中“情商篇”培养你良好的非智力因素;“知识篇”指导你科学地掌握规律性知识;“思维篇”把抽象思维形象化,手把手教你怎样科学思维.全书情商、知识、思维交相辉映,满足不同层次同学的学习需求.愿本书能伴随你初中三年的数学学习全过程,甚至可能使你终身受益.

给我以方法,我能成为巨人!



目 录

情商篇

一

唐太宗为女择婿 考题难上难
藏使臣代王应试 求解巧中巧
(数学学习顺口溜 数学的魅力)
..... 2

二

谁解猛虎金铃 方丈题难众佛子
语惊佛门众生 师父连夸莽和尚
(人生成功三角形 数学猜想)
..... 5

三

选干儿女 国王设计送花籽
拿空花盆 男孩诚实做王子
(“错解集”中获真知 有理数)
..... 9

四

贪财夫妻“偷鸡蚀米”
过路商贩“马哈成癖”
(千金难买回头看 有理数运算)
..... 13

五

相亲设计 见长者智谋
破烂换桃 夸姑娘贤惠
(大脑知识有序化 实数)
..... 17

六

砍柴比高低 缘斧上功夫
学习分优劣 因准备虚实
(磨刀不误砍柴工 图形初步)
..... 22

七

蛛丝马迹露疑团 孙亮巧断案
细心观察见破绽 解题靠敏锐
(于细微处见精神 图形和变换)
..... 28

八

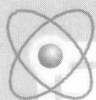
两王论战唇枪舌剑 让您辨高下
真理光芒普国恩泽 请君记边界
(真理越界成谬误 整式)
..... 34

九

乌鸦喝水 全凭思维巧妙
学习成功 积累知识重要
(水滴石穿凭毅力 全等三角形)
..... 40

十

席无虚座 贵夫人索票碰壁
对号入座 学习者公式开道
(熟用公式无敌手 二次根式)
..... 46

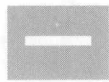
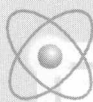


知识篇

- | | | |
|---|---|--|
| <p>十一</p> <p>十二</p> <p>十三</p> <p>十四</p> <p>十五</p> <p>十六</p> <p>十七</p> <p>十八</p> | <p>精品斗牛图 斗牛神态栩栩如生 乡间牧童娃 牧童辨伪字字有据 (因式分解) 54</p> <p>板长、板短做木桶 困难一大堆 分子、分母为零值 答案两重天 (分式) 58</p> <p>遵父遗嘱 平分财产兄弟打官司 击鼓升堂 胸有成竹县令断疑案 (方程与方程组) 64</p> <p>智勇杀盗 英雄自古出少年 各个击破 难题顷刻成飞灰 (消元法解二元一次方程组) 71</p> <p>喊冤声切惊包公 设灰圈计断子 为财心狠拉娇儿 判力大者有罪 (一元一次不等式和不等式组) 78</p> <p>巧用路牌 晓慧直奔外婆桥 以退为进 学子轻取方程巢 (一元二次方程公式) 84</p> <p>变灶惑敌 孙膑大败庞涓 灵活解题 慧者稳操胜券 (一元二次方程应用题) 91</p> <p>残疾人互助 瞎子跛子双消灾 众技巧汇集 白猫黑猫齐抓鼠</p> | <p>(一元二次方程根与系数关系) 100</p> <p>十九</p> <p>求风调雨顺 难煞周仓 授玄机妙策 还须关帝 (一次函数和图象) 107</p> <p>二十</p> <p>谜语互猜 情商智商相继开发 数形结合 知识能力比翼双飞 (二次函数和图像) 118</p> <p>二十一</p> <p>钓鱼争归属 徒儿互相争功 断案靠逻辑 师父以理服人 (统计和概率初步) 132</p> <p>二十二</p> <p>贪小厨师扣年糕 暗暗得意 心明瞎子唱弹词 句句在理 (三角形) 141</p> <p>二十三</p> <p>收友邦重礼 苏丹王成热锅蚁 译金像哑谜 阶下囚变座上客 (四边形) 151</p> <p>二十四</p> <p>吴刚迎客 夸阿波罗广寒信步 嫦娥斟酒 谢故乡人鸿雁传书 (相似三角形) 161</p> <p>二十五</p> <p>一声军令 赤手空拳绝境生慧 “三角”相助 以退为进军职升迁 (解直角三角形) 169</p> <p>二十六</p> <p>赌君打赌 强中偏遇强中手 椭圆变圆 系铃自有解铃人 (圆的性质和应用) 178</p> <p>二十七</p> <p>立体思维 丁谓一举获三得 图形熟记 学子四两拨千斤 (空间图形) 189</p> |
|---|---|--|



- 二十八** 以马赎人 拒收世上各种马
限期取马 否定人间具体日
(习题的无解 选择题常见解法)
..... 198
- 思维篇**
- 二十九** 难上难 三人对过独木桥
妙中妙 一转角度阳关道
(图形折叠、旋转思维)
..... 206
- 三十** 郑成功抗清招贤设哑谜
彪形汉复明揭榜解难题
(审题揭示隐含条件)
..... 213
- 三十一** 贪财媚上 赃官送礼反吃板子
一箭双雕 谷意点子暗藏伏线
(添辅助线的方法与技巧)
..... 219
- 三十二** 曹冲称象 智慧之光照千载
等量代换 能力巨棒扫万难
(等量代换思想)..... 226
- 三十三** 求写寻马启事 含糊其事
寻找隐含条件 慧者自知
(数学分类思想)..... 232
- 三十四** 铁拐李抬杠 张口成败军之将
反证法解题 入门可曲径通幽
(反证法)..... 238
- 三十五** 大难临头 刘秀金蝉脱壳
小技略施 绝境峰回路转
(逆向思维)..... 242
- 三十六** 打捞石狮 热心人出谋划策
力排众议 老河工棋高一着
(发散思维)..... 246
- 三十七** 卡维里难题 难倒异国众学子
辩证法思维 思出动态新天地
(动态思维)..... 253
- 三十八** 绝中生谋 方显慧者本色
以简驭繁 更觉数学魅力
(整体思维与简捷解题)
..... 264
- 三十九** 怀丙揭榜 千古英名流芳
思维流畅 一江春水浩荡
(解综合题)..... 269
- 四十** 卖画变烧画 谁解其中奥妙
学海亦商海 君应学以致用
(解应用性数学问题)..... 276



唐太宗为女择婿 考题难上难 藏使臣代王应试 求解巧中巧

(数学学习顺口溜 数学的魅力)

大家知道唐太宗有一位公主叫文成公主,容貌闭花羞月、人品才德兼备,是唐太宗的掌上明珠。当时,有几个国君都派使臣前来求婚。

为此,唐太宗下了一道谕旨:“你们各位使臣,远道来长安,实属辛劳。现在我也无法决定将我的公主嫁给哪一位国君,唯一的办法是试验你们各人的智慧来决定公主的婚嫁,请你们注意。”

唐太宗取出一颗晶莹美丽的玉珠和一根红丝线说:“这是颗九曲明珠,谁能把红线穿进去,就把公主嫁给他的国王。”

各国使臣争先恐后地抢珠子去穿,忙了半天,八字都没一撇,最后才无可奈何地松手,使珠子转到了西藏松赞干布的使臣噶尔·东赞手中。噶尔聪明能干,他一面仔细端详着珠子一面沉思,忽然他看见一只蚂蚁在地上爬行,灵机一动,计上心来,顺顺当当地把红丝线穿进了九曲明珠。请问你能讲讲其中的奥妙吗?

答案 他把蚂蚁捉来,用红丝线缚住蚂蚁的腰,将蚂蚁放在珠子的一个孔口,而在另一端的孔口涂上蜂蜜,同时用嘴对蚂蚁慢慢吹气,蚂蚁闻到了前方蜂蜜气味,又被身后的气所逼,就慢慢地带着红丝线由珠子这一端洞口向另一端洞口爬行,蚂蚁钻出了珠孔之际,也就是红丝线穿过九曲明珠之时。

第二天,唐太宗命人牵来一百匹母马和一百匹小马驹,对各国使臣说:“请再试一次,限时两天,谁能把它们母子关系找出来。”

各国使臣对此都面面相觑,束手无策。唯有噶尔走上前说:“我有办法!”

隔了一夜,到第二天早晨,噶尔轻而易举地把它们的母子关系都找出来了。请问,你知道噶尔解这道题的窍门吗?

答案 他把小马拴在马厩之中,母子不见面,并且一夜不给小马草料和饮水,第二天一清早,他把小马撒开,小马一个个饥渴难熬,纷纷奔向自己的母亲去吃奶,这样,母子关系自然明明白白了。

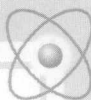
唐太宗得知噶尔解出了难题,又说:“我实在不能不慎重,还得请你们再试试一次!”第二天,唐太宗命人拿来一百根圆木头,上下一般粗,对各国使臣们说:“这一百根木头,上下一般粗,谁能认出哪一头是根,哪一头是梢,我就把公主许配给他的国王。”

各国使臣绕着这堆木头团团转,就是认不出根与梢来。唯有噶尔略一思索,想出妙法,解开了唐太宗选婿的最后一道难题。你猜想这是什么妙法?

答案 噶尔命人把这一百根木头运到河边,一齐推下河去。树木靠根部重一些就沉在水中,梢部轻一些则浮在水面。木头的根与梢就一目了然了。

大家看后想到,唐太宗选婿的故事精彩有趣,能开发智力,可是这与数学学习有什么关系呢?这就要从数学的作用讲起了,通过数学学习,能培养学生的逻辑思维能力、空间想象能力与数学运算能力,从而逐步培养和提高学生运用数学知识去分析和解决实际问题的能力。

唐太宗为文成公主选婿,出的三道题都是真正的难题。以第一题为例,“把红线穿进九曲明珠”就是数学中讲的命题。用针线穿孔等常规方法解这类题目此路肯定不通。对特殊的问题采用特殊的方法,就要用心机。你看西藏松赞干布的使臣噶尔·东赞把本来毫无联系的“九曲明珠、红丝线、蚂蚁、蜂蜜”四种孤立的事物,在为完成“把红线穿进九曲明珠”这一命题中,通过人的逻辑思维巧妙地把它们联系起来,变成了“蚂



蚁→红线→蜂蜜→九曲明珠”。这一变,非同小可,是思维能力的飞跃,带动了解题能力的飞跃.学习数学对培养青少年的这种逻辑思维能力极为重要,从而为今后解决各种实际问题打下坚实的基础.

噶尔为解决“小马驹找母马”与辨认“木头的根与梢”这两道难题,巧妙地运用了“因果关系”知识,也就是“小马驹总是找自己的妈妈吃奶”,“木头总是靠根部的比靠树梢的重”,搞清了这种因果关系,唐太宗的难题也就不难解了.讲得深刻一点,大家知道:每一件事情的出现,都有产生它的原因(简称“因”),发展的过程与发展的结果(简称“果”),由原因推求结果或由结果反推原因,都是数学中反复运用的逻辑思维方法.

你看,唐太宗择婿出的难题,看起来似乎“无从下口”,但是对掌握了科学逻辑推理方法的人,解决起来,竟如此轻松潇洒,游刃有余.所以,学好数学为今后的全面发展,能打下坚实的基础.愿每位同学都能喜欢数学.

为此,这里向大家推荐一首《数学学习顺口溜》,它是学好数学的一个纲.请大家熟记它、应用它:

你拍一、我拍一,数学王国好神奇;
你拍二、我拍二,我学数学真快乐;
你拍三、我拍三,基础扎实题不难;
你拍四、我拍四,解题关键要多思;
你拍五、我拍五,预习复习别马虎;
你拍六、我拍六,定理公式要记熟;
你拍七、我拍七,人人备本错解集;
你拍八、我拍八,解题马虎准抓瞎;
你拍九、我拍九,顺序渐进向前走;
你拍十、我拍十,保你数学学扎实.

本书始终努力贯彻它的精神.

谁不想学好数学?谁不希望自己能够成才?那么,同学们,千里之行、始于足下,从背诵《数学学习顺口溜》起,热爱数学吧!

>>> [数海筑基(1~3) 数学拾贝(4~6)] <<<

1. 《数学学习顺口溜》你会背了吗? 抽查:

你拍四、我拍四,解题关键_____.

你拍六、我拍六,定理公式_____.

你拍八、我拍八,解题_____准抓瞎.

2. 填空.

① 0, 1, 2, 3, 4... 的一列数叫做_____数; 1, 2, 3, 4... 叫做_____数; -1, -2, -3, -4... 叫做_____数, 它们都属于_____数(或_____数).

② 整数和分数统称为_____数, 零属于_____数, 但它既不属于_____数, 也不能归入_____数. 有理数(或实数)的运算, 每一步都必须考虑_____符号.

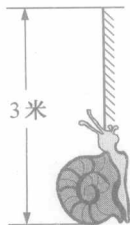
3. 动脑想想, 怎样计算得快一些.

① $9 + 99 + 999 + 9999 =$ _____.

② $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 - 100 - 99 - 98 - 97 - \dots - 5 =$ _____.

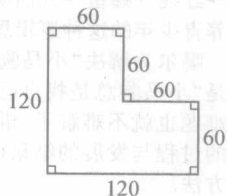
③ 在 -44, -43, -42, ..., 0, 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100 这一串连续整数中, 前 100 个数的和是多少?

4. 一口水井, 水面比井口低 3 米, 一只蜗牛从水面沿着井壁往井口爬, 第一次往上爬了 0.5 米后下滑了 0.1 米; 第二次往上爬了 0.47 米后又下滑了 0.15 米; 第三次往上爬了 0.6 米后下滑了 0.15 米; 第四次往上爬了 0.8 米后再次下滑了 0.15 米; 第五次往上爬了 0.55 米没有下滑; 第六次往上爬了 0.47 米. 请你猜想蜗牛爬上井口了没有.





5. 小聪聪放学回家路上看见同村的王、李、张、林四位大伯正在讨论怎样将右图所示的农田分块承包. 为公平起见, 四家打算将它分成形状和面积都相同的四块分别承包, 大家一时想不出合理的分法, 请你同小聪聪一起想想, 有什么好方法帮助他们解决. (单位: 米)



6. 比较下列各数的大小: $\frac{6}{29}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{12}{59}$.

【(1-3) 基础演练】

1. 下列各数中, 无理数有 () 个.
 - ① $\sqrt{2}$, ② $\sqrt{4}$, ③ $\sqrt{9}$, ④ $\sqrt{16}$, ⑤ $\sqrt{25}$, ⑥ $\sqrt{36}$, ⑦ $\sqrt{49}$, ⑧ $\sqrt{64}$, ⑨ $\sqrt{81}$, ⑩ $\sqrt{100}$
2. 下列各数中, 有理数有 () 个.
 - ① $\frac{1}{2}$, ② $\frac{1}{3}$, ③ $\frac{1}{4}$, ④ $\frac{1}{5}$, ⑤ $\frac{1}{6}$, ⑥ $\frac{1}{7}$, ⑦ $\frac{1}{8}$, ⑧ $\frac{1}{9}$, ⑨ $\frac{1}{10}$, ⑩ $\frac{1}{11}$

【(3-4) 能力提升】

3. 比较下列各数的大小: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$.
4. 比较下列各数的大小: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$.



二

谁解猛虎金铃 方丈题难众佛子 语惊佛门众生 师父连夸莽和尚

(人生成功三角形 数学猜想)

从前,有座庙中的方丈想测试一下徒弟中谁最聪明,就在说法堂上出了一题:如有一头猛虎,颈上挂着一个金铃,请问如何取下这个金铃?

谁敢在老虎头上抓苍蝇,更别提去解虎颈的金铃了,徒弟们一听这道题都傻了眼,或低头不语,或用眼互探,均哑口无言。

这时走进一个莽和尚,平时师兄们都瞧不起他,让他专干挑水劈柴之类的粗笨活。师父重复一遍这个问题,让莽和尚回答。莽和尚不假思索,脱口而出。师父听后,马上连声赞道:“答得好!答得好!”

请你猜猜看,莽和尚的答案是什么。

答案 莽和尚说:“解铃还须系铃人。既然他有本事把铃系上虎颈,自然也应该有本事解下金铃。”

莽和尚脱口而出讲出答案,说明他:一:充满自信,答案肯定正确;二:肯动脑筋,平时对这类问题早有思索,成竹在胸,师父的考查成了他展露才华的机会。

学习数学,需要自信。而不少同学缺乏的就是自信,学习是场硬仗,两军相遇勇者胜。学习中自信是第一条,自信产生毅力,毅力产生学习方法,可用“人生成功三角形”来表示,见右图。

天生我材必有用,所以自信的第一层含义是“我说行,我就行!”如果真有一头系着金铃的猛虎向你奔来,而系铃人又不在,该怎么办?有没有解下虎颈金铃的自信与勇气?此刻你一定在想,系铃人呵,快来救救我吧!其实只要在老虎出现之前你早一点找到系铃人,认真向他请教制服猛虎解铃的方法就是了。一旦也有了系铃人的本事和胆略,老虎见你就服服帖帖了。所以自信的第二层含义是把别人的本事学到手,艺高人胆大,就会越来越自信。

数学学习,不能满足于前辈数学家千辛万苦证出的结论,而要参与其中,探索他们怎样证出结论的思维方法,那么,“给我以方法,我也能成为巨人”,你就成为一个聪明人了。

下面我们学习数学猜想。数学家高斯小时候用巧妙的方法解出一道从1加到100的连加题,对我们很有启迪,请看[例2-1]讨论。

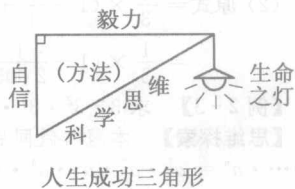
【例2-1】 用速算法求连加数 $1+2+3+4+\dots+100$ 的和是多少?

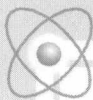
【思维探索】 面对这头“猛虎”,正面拼搏——直接逐项求和硬算,是可以的,但费工费时。数学家小高斯研究后发现:该题首位与末位数之和有一定规律,为: $1+100=101$,且第二位数字与倒数第二位数字之和是相同的,即 $2+99=101$,以此类推: $3+98=101$; $4+97=101$ ……共有50对数之和等于101,所以他列出算式:

$$(1+100) \times 50 = 5050$$

轻松、漂亮,他一下子解开了这道“难题猛虎”的金铃。猜想体现想象力,数学鼓励猜想,通过猜想探索规律,找出求解这类题的一般方法。

用速算法求 $1+2+3+4+\dots+n$ (n 是偶数)之和,其首项为1,末项为 n ,共有 $\frac{n}{2}$ 对,所以一般表达式





为: $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2} \cdot (1+n)$ (n 是偶数).

【例 2-2】 观察下式: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

根据以上观察, 计算:

(1) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9}$.

(2) $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{2002 \times 2005}$.

【思维探索】 例式的巧妙之处是把每一项分数拆项, 转化成一对对互为相反数, 再求代数和. 题(1) 直接套用上述方法还不行. 观察发现:

第 1 项: $\frac{1}{1 \times 3} = \frac{2}{2} \times \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3})$;

第 2 项: $\frac{1}{3 \times 5} = \frac{2}{2} \times \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$;

.....

由此可找到规律.

【解】 (1) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{9}) = \frac{4}{9}$.

(2) 原式 = $\frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2005})$
 $= \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{2005}) = \frac{668}{2005}$.

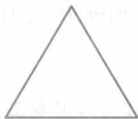
【例 2-3】 求 $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot 3^{100}$ 的结果.

【思维探索】 本题叫做同底数幂的相乘, 其计算法则是: (1) 同底数幂相乘, 指数相加: $a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot \dots \cdot a^n = a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot \dots \cdot a^n = a^{1+2+3+\dots+n}$.

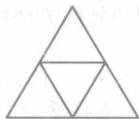
(2) 指数相加, 就是求指数的代数和, 可将例 2-1 的思路迁移过来, 即 $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(1+n)$ (n 为偶数).

【解】 $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot 3^{100} = 3^{1+2+3+\dots+100} = 3^{\frac{100(1+100)}{2}} = 3^{5050}$.

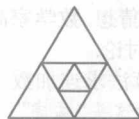
【例 2-4】 图①是一个三角形, 分别连接这个三角形各边的中点得到图②; 再分别连接图②中间的小三角形的各边中点, 得到图③, 按此方法继续下去, 请你根据每个图中三角形个数的规律, 完成下列问题:



①



②



③

图 2-1

(1) 将下表填写完整:

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|-----|
| 图形编号 | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ... |
| 三角形个数 | 1 | 5 | 9 | | | ... |

(2) 在第 n 个图形中有 _____ 个三角形 (用含 n 的式子表示).



【思维探索】 (1) 观察图形可得如下规律:

| | |
|---------|------------------------|
| 第 1 项 | 三角形个数 = 1 = 4 × 1 - 3 |
| 第 2 项 | 三角形个数 = 5 = 4 × 2 - 3 |
| 第 3 项 | 三角形个数 = 9 = 4 × 3 - 3 |
| 第 4 项 | 三角形个数 = 13 = 4 × 4 - 3 |
| | |
| 第 n 项 | 三角形个数 = 4 × n - 3 |

将 $n = 4, n = 5$ 代入得 $n_4 = 4 \times 4 - 3 = 13, n_5 = 4 \times 5 - 3 = 17$.

(2) 所以得 第 n 项的三角形个数 $a_n = 4n - 3$

【解】 (1) 13 17 (2) $4n - 3$

【例 2-5】 观察下列各式,探究规律.

考察个位上的数为 5 的自然数的平方,任意一个个位数为 5 的自然数都可写成“ $10n+5$ ”的形式,则该数的平方可写成 $(10n+5)^2$, 如:

| | |
|---------|--|
| $n = 1$ | $15^2 = 100 \times 1 \times (1+1) + 25 = 225$ |
| $n = 2$ | $25^2 = 100 \times 2 \times (2+1) + 25 = 625$ |
| $n = 3$ | $35^2 = 100 \times 3 \times (3+1) + 25 = 1\ 225$ |
| $n = 4$ | $45^2 = 100 \times 4 \times (4+1) + 25 = 2\ 025$ |
| | |
| $n = 7$ | $75^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| $n = 8$ | $85^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ |

(1) 分别写出 75^2 、 85^2 的表达式和结果.

(2) 利用(1)的结果,归纳猜想 $(10n+5)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 利用(2)的结果,归纳猜想 $1\ 995^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 (1)、(2) 从题意提示知,对 $(10n+5)^2$, 当位于第 n 项时 $(10n+5)^2 = 100 \times n(n+1) + 25$, 把 $n = 7, n = 8$ 代入,可分别求出 $75^2 = 100 \times 7 \times (7+1) + 25 = 4\ 925$ 及 $85^2 = 100 \times 8(8+1) + 25 = 6\ 425$.

(3) $1\ 995^2 = 100 \times 199 \times (199+1) + 25 = 3\ 980\ 025$.

>>> [数海筑基(1~2) 数海拾贝(3~6)] <<<

1. 填空.

① 规定了原点、 和 的直线叫做数轴.

② 有理数(或实数) a 与 $-a$ 叫做互为 数,零的相反数 ,任何一对相反数的和为 .

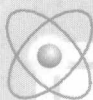
2. 速算连加数: $0.01 + 0.02 + 0.03 + \dots + 1.00 = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 观察下列等式: $1^2 - 0^2 = 1, 2^2 - 1^2 = 3, 3^2 - 2^2 = 5, 4^2 - 3^2 = 7, \dots$ 用含自然数 n 的形式表示这种规律: .

4. 观察下列顺序排列的等式:

$$\begin{aligned} 9 \times 0 + 1 &= 1, \\ 9 \times 1 + 2 &= 11, \\ 9 \times 2 + 3 &= 21, \\ 9 \times 3 + 4 &= 31, \\ 9 \times 4 + 5 &= 41, \\ &\dots \end{aligned}$$

猜想: 第 n 个等式(n 为正整数)的表达式应为 .



5. 观察下面由火柴棒拼成的一列图形,第 n 个图形由 n 个正方形组成.



①



②



③

...

- (1) 第 5 个图形由多少根火柴棒组成?
 (2) 用含 n 的代数式表示第 n 个图形所含的火柴棒根数.
 (3) 根据第(2)题的结果,写出第 30 个图形中的火柴棒的根数.

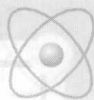
6. (1) 观察或计算,比较以下各组数的大小:

① 1^2 2^1 ; ② 2^3 3^2 ; ③ 3^4 4^3 ;

④ 4^5 5^4 ; ⑤ 5^6 6^5 ;

- (2) 归纳上题结果并猜想:当 $n \geq 3$ 时, n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小关系应是: n^{n+1} $(n+1)^n$.

- (3) 根据上题猜想结论,比较下列两数大小: $2\ 003^{2004}$ $2\ 004^{2003}$.



选干儿女 国王设计送花籽 拿空花盆 男孩诚实做王子

（“错解集”中获真知 有理数）

有一个国王，他终生的信条是“诚实”两字。一辈子中，他别的事都称心，只是为一件事发愁：没有孩子。有一天，他决定在国内找一个最诚实的孩子收养为儿女，在他死后将继承他的王位。于是他想了个办法，吩咐手下的人把花籽送发给全国所有的孩子，并且宣布：“收到花籽的孩子，谁能亲自种出最美丽的花来，我就让他（她）做我的孩子。”

孩子们都想成为国王的儿女，都把花籽种上了，每天给它浇水。

国王视察的日子到了。孩子们都穿着漂亮的衣服，脸上堆着笑，捧着盛开鲜花的花盆站在街上。其中只有一个男孩手里拿着空花盆站在门前哭。国王见了立刻叫这个男孩站在他身边，并宣布这个男孩为他的儿子。

为什么国王喜欢这个拿空花盆的孩子，让他当自己的儿子呢？你能猜到其中的原因吗？

答案 国王为测试孩子是否诚实，送发的花籽都是煮（或炒）过的，死花籽是不会发芽长叶开花的。那些拿着美丽鲜花的孩子们，都是换了活的花籽才种出花来的。

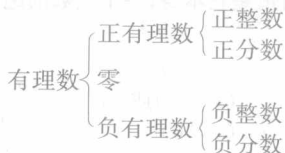
这则故事给我们如下启示：

第一点启示是：学习中的“诚实”就是要实事求是，懂就是懂，不懂就是不懂。一道题经过再三思考做不出来，就像作业本的“花盆”里长不出鲜花一样，应该在作业本上注明哪一步做不下去了，以求老师的指导。千万不要“移花接木”，去抄袭他人的作业，一交了事。这样老师看着你作业本盛开的“鲜花”，不知你是真懂还是假懂，想帮助你提高成绩，也无从下手。由于不是你辛勤的学习汗水“浇灌”的花朵，所以到考试时，试卷上就再也“开不出”美丽的鲜花，失败也就必然了。

一、有理数

（一）基础知识

1. 有理数概念：整数和分数统称为有理数。
2. 分类：



（二）注意点

1. 有理数（以后还包括实数）的每一步运算都要考虑它的正负号，正号可省略，但负数的负号绝对不能省略。
2. 一切有理数可用有限小数或无限循环小数表示。

【例 3-1】 学校对初三学生进行了引体向上测试，以做 7 个为标准，超过个数用正数表示，不足的个数用负数表示，其中 8 名男生的成绩如下表：

| | | | | | | | |
|---|----|---|---|----|----|---|---|
| 2 | -1 | 0 | 3 | -2 | -3 | 1 | 0 |
|---|----|---|---|----|----|---|---|