21世纪高职高专精品课程系列

GAODENGSHUXUE

高等数学

主 编◎陈福川/卢 璟

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

21世纪高职高专精品课程系列

GAODENGSHUXUE

高等数学

主　编◎陈福川/卢　璟

中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／陈福川，卢璟主编．—北京：中国经济出版社，2009.8

ISBN 978－7－5017－9268－9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…②卢…　Ⅲ．高等数学　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 081482 号

出版发行： 中国经济出版社（100037·北京市西城区百万庄北街 3 号）

网　　址： www.economyph.com

责任编辑： 伏建全　焦晓云（咨询电话：010－68319290，投稿邮箱：jiaoxiaoyun@126.com）

责任印制： 张江虹

封面设计： 任燕飞设计室

经　　销： 各地新华书店

承　　印： 北京市昌平新兴胶印厂

开　　本： 787mm×1092mm　1/16　　**印张：** 14.5　　**字数：** 342 千字

版　　次： 2009 年 8 月第 1 版　　**印次：** 2009 年 8 月第 1 次印刷

书　　号： ISBN 978－7－5017－9268－9/G·1310　　**定价：** 26.00 元

中国经济出版社
21 世纪高职高专精品课程系列教材编委会

前言

培养具有实践能力的创新型人才是高职高专院校的主要任务.作为高职高专院校基础课的高等数学,其教学目的是使学生掌握在分析、解决专业学习与实践中遇到问题的基本数学工具.我们力求打破传统意义上的“本科压缩型”模式,切合高职高专院校高等数学教学改革“降低理论,加强应用,增加实践性环节”的指导思想,突出强调数学概念与实际问题的联系,既不过多强调其逻辑的严密性、思维的严谨性,也不追求过分复杂的计算和变换,而重视培养学生灵活运用和解决问题、分析问题的能力,建设一个以专业需求为导向、关注应用思维,以一种新的“工具课”模式出现的创新型高等数学课程体系.

基于高职教育层次的特点和实际情况,结合编者长期从事高职高专数学课程教学的经验,我们对高等数学知识体系进行了重新整合.本教材具有以下四大特点:

一、力求贯彻“够用、管用、会用”的三用原则,删去了传统高等数学教材中微积分部分难而繁的内容,增添了以往传统教材中没有的同时又是必须的线性代数和概率论与数理统计内容,使教材更适合高职高专各专业的需要.

二、结合数学建模,突出以应用为目的,培养学生求解数学模型的能力.通过相关知识引入数学章节,再将数学知识应用到各种实际问题中,用实例反映数学的应用,加深学生对数学知识的理解,增加可读性.

三、注重强调数学基本概念和原理的通俗易懂,数学的基本技能和技巧叙述准确清晰,每节后有练习题,围绕本节知识内容进行学习和训练,每章后有综合练习,供学有余力的学生进一步提高数学水平选用.

四、注意有关概念及结果的解释,力求表述确切、思路清晰、通俗易懂,在附录中编入了希腊字母的英文写法和读音以及数学用表,这样能促进学生对数学知识的掌握和提高.

本教材由琼台师范高等专科学校陈福川副校长、西安职业技术学院卢璟副教授合作编写,陈福川副校长编写第一至四章,卢璟副教授编写第五至七章。本教材可作为高职高专通用数学教材,适合高职高专各专业使用,也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家和广大读者批评指正.

编　者

二〇〇九年六月

目　录

第一章　函数、极限与连续

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 我国古代数学家刘徽(公元3世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术,就是极限思想在几何学上的应用. 在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法,已成为高等数学中的一种基本方法. 公元1200年,Leonardo Fibonacci 提出了一个著名的数列$\{a_n\}$(称作 Fibonacci 数列),它的通项满足:$a_1=a_2=1$,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,通过递推,可得

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\approx 0.618$$

希腊人把这个比值称作"黄金分割".

微积分研究的主要对象是变量和函数,微分学、积分学的理论都是通过极限的理论作为基础和工具进行研究和建立的.

§1.1　函　数

一、函数的概念

(一)变量与常量

我们在观察某一现象的过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,我们把其称之为常量;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,我们则把其称之为变量.

如果在过程中还有一种量,它虽然是变化的,但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的,我们则把它看作常量.

如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示其变化范围.

(二)函数的定义

定义1　设有一非空实数集 D,如果存在一个对应法则f,使得对于每一个$x\in D$,都有一个唯一的实数y与之对应,则称对应法则f是定义在 D 上的一个函数,记作$y=f(x)$,其中x为自变量,y为因变量,习惯上称y是x的函数,D 称为定义域.

当自变量x取定义域 D 内的某一定值x_0时,按对应法则f所得的对应值y_0,称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$时的函数值,记作$f(x_0)$,即$y_0=f(x_0)$. 当自变量x取遍 D 中的数,所有对应的函数值y构成的集合称为函数的值域,记作M,即

$$M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

☞**例1**　已知$f(x)=x^2-x-1$,求$f(0)$,$f(1)$,$f(-x)$.

解 $f(0)=0^2-0-1=-1$

$f(1)=1^2-1-1=-1$

$f(-x)=(-x)^2-(-x)-1=x^2+x-1.$

☞**例 2** 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$

(2) $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$

解 (1)要使函数有意义,必须有 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1\geqslant 0$, 即 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x<-1$ 或 $x>1$, 所以,定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

(2)由于 $\begin{cases}6+x-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3,\\ x>-1,\end{cases}$

所以定义域为 $(-1,3]$.

由函数定义可知,定义域与对应法则一旦确定,则函数随之唯一确定.因此,我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素.如果两个函数的定义域、对应法则均相同,那么可以认为这两个函数是同一函数.反之,如果两要素中有一个不同,则这两个函数就不是同一函数.

例如 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $\varphi(x)=1$, 因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$, 即这两个函数的对应法则相同,而且定义域均为 R,所以它们是相同的函数.

又如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$, 虽然 $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, 但由于这两个函数的定义域不同,所以这两个函数不是同一函数.

通常函数可以用三种不同的形式来表示:表格法、图形法和解析法(或称公式法).三种形式各有其优点和不足,实际问题中往往把三种形式结合起来使用.

用两个以上表达式表达的函数关系叫分段函数.

如 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 1\\ x-1, x<1\end{cases}$, $x=1$ 称为分段点.

二、函数的性质

(一)单调性

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义,若对 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2, 当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加;若当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少,区间 (a,b) 称为单调区间.

(二)奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,若对于任意的 $x\in D$, 都有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为偶函数;若有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

在直角坐标系中,奇函数与偶函数的定义域必定关于原点对称,且偶函数的图象关于 y 轴对称,奇函数的图象关于原点对称.如图 1.1.1.

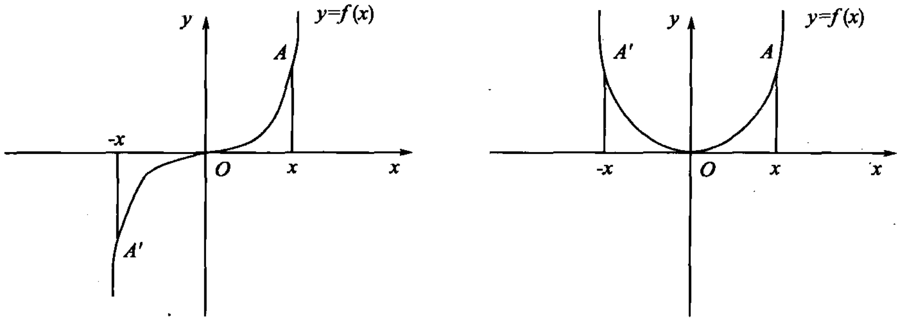

图 1.1.1

(三)有界性

若存在一个正数 M,使得对任意的 $x \in (a,b)$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(四)周期性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,若存在一个正实数 T,对于任意的 $x \in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 如图 1.1.2.

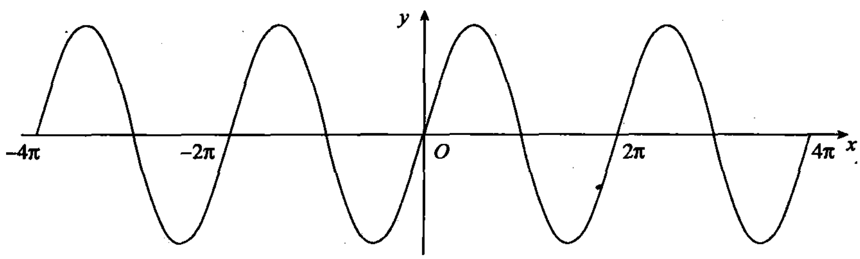

图 1.1.2

通常所说的周期函数的周期,是指它们的最小正周期. 如 $y=\sin x$ 的周期是 2π(图 1.1.2),$y=\tan x$ 的周期是 π,$y=A\sin(wx+\varphi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{w}$.

三、反函数

设函数的定义域为 D,值域为 M. 对于任意的 $y \in M$,在 D 上至少可以确定一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就可以得到一个新的函数: $x=f^{-1}(y)$. 我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而把函数 $y=f(x)$ 称为原函数.

应当说明的是,虽然直接函数 $y=f(x)$ 是单值函数,但是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 却不一定是单值的. 例如,$y=f(x)=x^2$ 的定义域为 $D=R$,值域 $M=[0,+\infty)$. 任取非零的 $y \in M$,则适合 $y=x^2$ 的 x 的数值有两个: $x_1=\sqrt{y}, x_2=-\sqrt{y}$. 所以,直接函数 $y=x^2$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$

是多值函数：$x = \pm\sqrt{y}$. 如果把 x 限制在区间 $[0, +\infty)$ 上，则直接函数 $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 的反函数 $x = \sqrt{y}$ 是单值的，并称 $x = \sqrt{y}$ 为直接函数 $y = x^2, x \in R$ 的反函数的一个单值分支. 显然，反函数的另一个单值分支为 $x = -\sqrt{y}$.

例如 $y = \sqrt{x}$ 的反函数是 $y = x^2(x > 0)$，其定义域就是 $y = \sqrt{x}$ 的值域 $[0, +\infty)$，值域是 $y = \sqrt{x}$ 的定义域 $[0, +\infty)$，如图 1.1.3(a)所示.

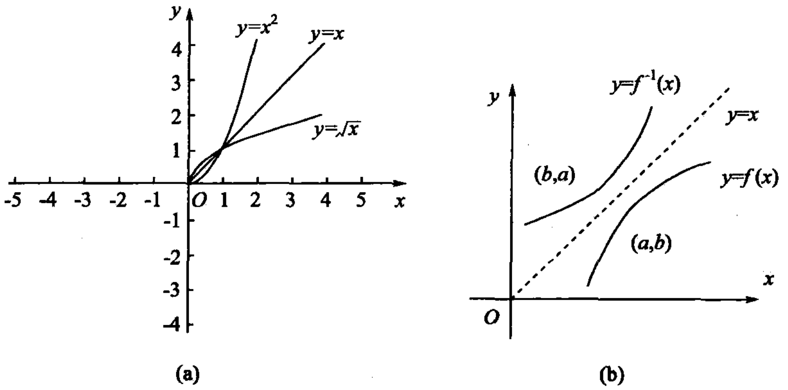

图 1.1.3

在同一直角坐标系中，函数 $y = f(x)$ 和其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. 如图 1.1.3(b)所示.

四、初等函数

(一)基本初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数.

1. 常数函数 $y = c$ (c 为常数)，其图形为一条平行或重合于 x 轴的直线.
2. 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数)，其在第一象限内的图形如图 1.1.4 所示.

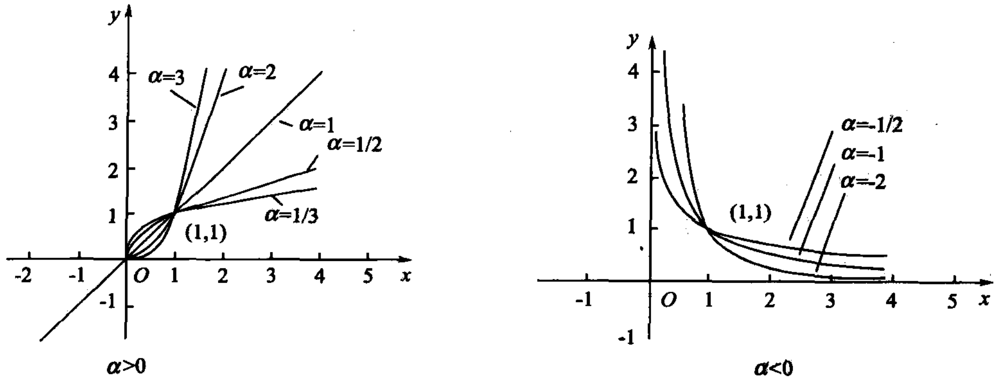

图 1.1.4

3. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$),定义域为 R,值域为 $(0, +\infty)$, 图形如图 1.1.5(a)所示.

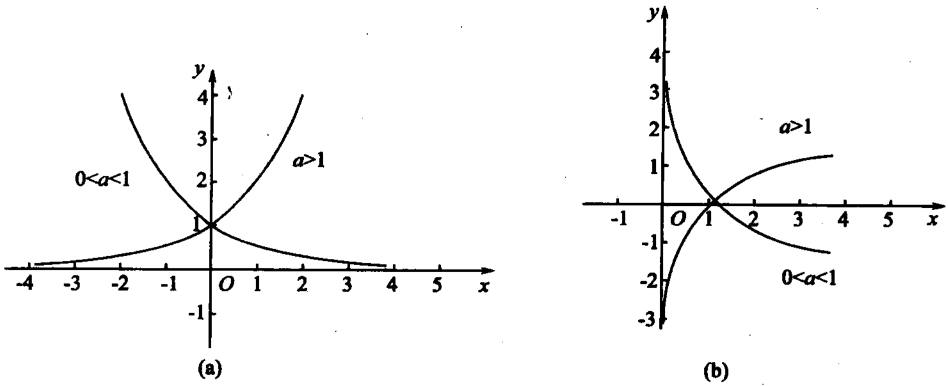

图 1.1.5

4. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 定义域 $(0, +\infty)$, 值域为 R,如图 1.1.5(b)所示.

5. 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$. 其中正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域都为 R, 值域都为 $[-1,1]$, 正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \in R, 且\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$, 值域为 R,这三个函数的图形如图 1.1.6 所示.

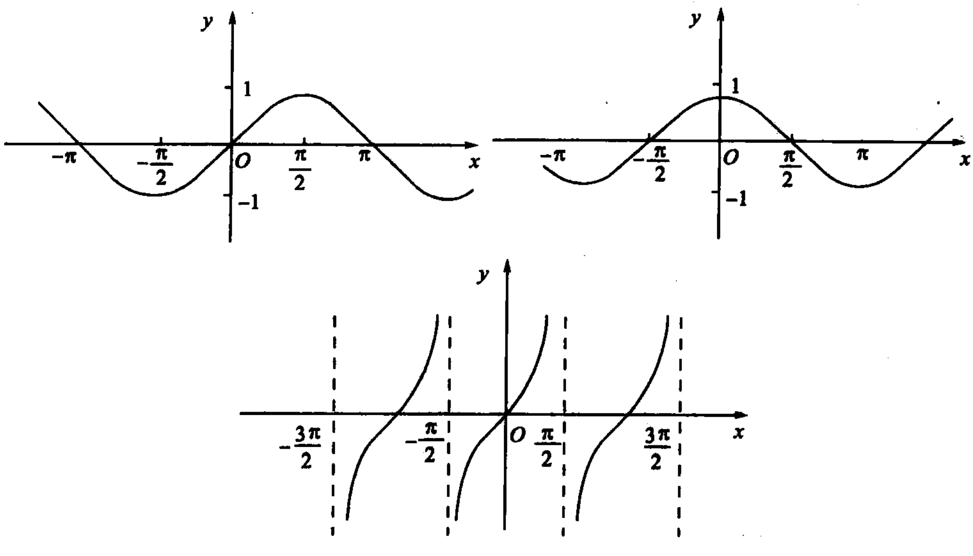

图 1.1.6

6. 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \text{arccot} x$, 其中反正弦函数 $y = \arcsin x$ 与反余弦函数 $y = \arccos x$ 的定义域都为 $[-1,1]$, 值域分别为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0,\pi]$, 反正切函数 $y = \arctan x$ 的定义域 R,值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(二)复合函数

定义2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D, 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M, 若 $M\cap D\neq\varnothing$, 则将 $y=f[\varphi(x)]$ 称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, u 称为中间变量, x 为自变量.

如函数 $y=\ln u, u=x^2+1$, 因为 $u=x^2+1$ 的值域 $[1,+\infty)$ 包含在 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内, 所以 $y=\ln(x^2+1)$ 是 $y=\ln u$ 与 $u=x^2+1$ 复合而成的复合函数.

说明 (1)并不是任何两个函数都可以复合的, 如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合. 因为 $u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$, 而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$, 所以对于任意的 x 所对应的 u, 都使 $y=\arcsin u$ 无意义;

(2)复合函数还可推广到由三个及以上函数的有限次复合.

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成并可以用一个式子表示函数叫做初等函数.

如 $y=\ln(\sin 2x)+x^2, y=e^{\sqrt{\arctan x}}+\cos x$ 等都是初等函数, $y=|x|$ 不是初等函数.

☞**例3** 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt[3]{2x+1}$ (2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$

解 (1) $y=\sqrt[3]{2x+1}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}$ 与 $u=2x+1$ 复合而成的;

(2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 是有 $y=\ln u, u=\tan v, v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成的.

☞**例4** 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$, 求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解 由 $-1\leqslant\ln x\leqslant 1$, 得 $\dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant e$.

所以, $f(\ln x)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$.

五、建立函数关系举例

运用函数解决实际问题, 通常先要找到这个实际问题中的变量与变量之间的依赖关系, 然后把变量间的这种依赖关系用数学解析式表达出来(即建立函数关系), 最后进行分析、计算.

☞**例5** 如图1.1.7, 从边长为 a 的正三角形铁皮上剪一个矩形, 设矩形的一条边长为 x, 周长为 P, 面积为 A, 试分别将 P 和 A 表示为 x 的函数.

解 设矩形的另一条边长为 $\dfrac{a-x}{2}\cdot\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}(a-x)}{2}$

该矩形周长 $P=\sqrt{3}(a-x)+2x=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{3}a,\ x\in(0,a)$

矩形面积 $A=\dfrac{\sqrt{3}(a-x)}{2}\cdot x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ax-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2,\ x\in(0,a)$.

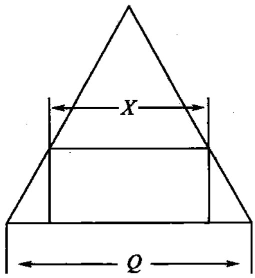

图1.1.7

☞**例6** 电力部门规定, 居民每月用电不超过30度时, 每度电按0.5元收费, 当用电超过30度但不超过60度时, 超过的部分每度按0.6元收费, 当用电超过60度时, 超过部分按每度0.8元收费, 试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系.

解 当 $0 \leqslant w \leqslant 30$ 时，$G = 0.5W$.

当 $30 < W \leqslant 60$ 时，$G = 0.5 \times 30 + 0.6 \times (w - 30) = 0.6w - 3$.

当 $w > 60$ 时，$G = 0.5 \times 30 + 0.6 \times 30 + 0.8 \times (W - 60) = 0.8W - 15$.

所以 $G = f(w) = \begin{cases} 0.5w, & 0 \leqslant w \leqslant 30, \\ 0.6w - 3, & 30 < w \leqslant 60, \\ 0.8w - 15, & w > 60. \end{cases}$

习题 1.1

1. 判断正误.

(1) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = x$ 相同. ( )

(2) $y = (2^x + 2^{-x})\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是奇函数. ( )

(3) 凡是分段表示的函数都不是初等函数. ( )

(4) $y = x^2 (x > 0)$ 是偶函数. ( )

(5) 两个单调增函数之和仍为单调增函数. ( )

(6) 实数域上的周期函数的周期有无穷多个. ( )

(7) 复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域即 $g(x)$ 的定义域. ( )

(8) $y = f(x)$ 在 (a,b) 内处处有定义，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一定有界. ( )

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$　　(2) $y = \sqrt{4 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

(3) $y = \lg(x + 2) + 1$　　(4) $y = \lg\sin x$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leqslant x < 1, \\ x - 1, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$ 求 $f(3)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y = x^2\sin x$　　(2) $y = \sin x + \cos x$

(3) $y = x^2 + 2\cos x$　　(4) $y = \dfrac{e^{-x} - 1}{e^x + 1}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y = 3x + 1$　　(2) $y = 1 - \ln x$

(3) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

6. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y = \sin^3(8x + 5)$　　(2) $y = \tan(\sqrt[3]{x^2 + 5})$

(3) $y = 2^{1-x^2}$　　(4) $y = \lg(3 - x)$

7. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $f(\sin x)$ 的定义域.

§1.2 数列的极限

一个实际问题:如何用渐近的方程法求圆的面积?

设有一圆,首先作内接正四边形,它的面积记为 A_1;再作内接正八边形,它的面积记为 A_2;再作内接正十六边形,它的面积记为 A_3;如此下去,每次边数加倍,一般把内接正 $4\times 2n-1$ 边形的面积记为 A_n. 这样就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n\cdots\cdots$$

设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$ 读作 n 趋于穷大),即内接正多边形的边数无限增加,在这个过程中,内接正多边形无限接近于圆,同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值,这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面有次序的数(数列) $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n\cdots\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

再看下面两个按一定次序排列的一列数.

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\cdots$

我们称它们为数列,分别记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

现在来考察 n 无限增大时,这两个数列的变化趋势. 为清楚起见,我们把这两个数列的前 n 项: $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$ 分别在数轴上表示出来.

上述两个数列具有相同的变化特征,即当 n 无限增大时,它们都无限接近于一个确定的常数. 对于具有这样特征的数列,我们给出定义.

一、数列极限的定义

定义 1 如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系:对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

记为 $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\ (n\to\infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\quad \exists N\in N^{+},\quad 当\ n>N\ 时,\quad 有\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

如 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (|q|<1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1\ (a>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在,即数列 $\{(-1)^n\}$ 是发散的.

☞**例 1** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$.

分析 $|x_n - 1| = \left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$,

对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-1|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\in N^+$,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

☞**例 2** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$.

分析 $|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}$.

对于 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$. 只要 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

证明 因为 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]\in N^+$,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

☞**例 3** 观察下面数列的变化趋势,并写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$　　(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$

(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$　　(4) $x_n=4$

解 (1) $x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 的项依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\cdots\cdots$,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 0,

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0.$$

(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$ 的项依次为 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}\cdots\cdots$,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 1,

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$ 的项依次为 $-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots\cdots$,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 0,

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(-3)^n}=0.$$

(4) $x_n=4$ 为常数数列,无论 n 取怎样的正整数,x_n 始终为 4,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}4=4$.

一般地,一个常数数列的极限等于这个常数本身,即

$$\lim_{n\to\infty}C=C\ (C\text{ 为常数}).$$

需要指出的是,并不是所有数列都有极限,如数列 $x_n=2^n$,当 n 无限增大时,x_n 也无限增