

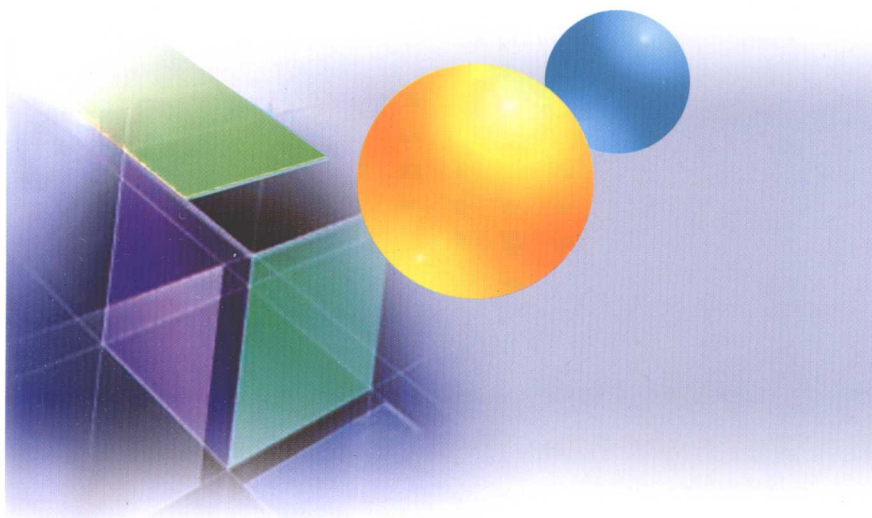


军队院校士官数学系列通用教材（大专版）

高等数学学习指导

Advanced Mathematics Learning Guide

■ 主编 褚仁华 王运行



国防工业出版社

National Defense Industry Press

军队院校士官数学系列通用教材（大专版）

高等数学 学习指导

主编 褚仁华 王运行



国防工业出版社
National Defense Industry Press

内 容 简 介

本指导书是为了适应士官教学的需求,在军队院校数学联席会的组织策划下编写而成的。指导书体例新颖,着力概念理解,内容丰富,题型全面。每章分为教学基本要求、释疑解惑、典型题型分析、习题全解、同步测试题等五个模块。撰写了学习概念和计算过程中容易发生的错误,以求加深对概念的理解和计算方法的掌握;介绍了各章可能出现的主要题型及其基本解题方法;为了帮助大家掌握解题方法,对教材中的全部习题都作了解答。

本书是士官大专高等数学的同步教学辅导书,它的使用将对军校士官的数学学习起到积极的促进作用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/褚仁华,王运行主编. —北京:国防工业出版社,2009.7

(军队院校士官数学系列通用教材.大专版)

: ISBN 978-7-118-06303-5

I. 高... II. ①褚...②王... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 061072 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 17½ 字数 305 千字

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—6000 册 定价 30.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

军队院校士官数学系列通用教材(大专版)
高等数学学习指导

编委会名单

主编 褚仁华 王运行

编者 (以姓氏笔画为序)

王 品 生汉芳 朱志富 严斌辉

杜春彦 李 璞 李彦明 吴 忠

邱 华 胡江安 蒋 彦 韩黎明

廖毕文 魏春霞

主审 侯云畅

军队院校士官数学系列通用教材(大专版)

高等数学学习指导

参加编写院校名单

主编院校

海军蚌埠士官学校

第二炮兵青州士官学校

参编院校 (以编者姓氏笔画为序)

陆军航空兵学院

海军航空工程学院青岛分院

重庆通信学院

空军雷达学院

空军第一航空学院

武警石家庄指挥学院

空军工程大学

装备指挥技术学院

海军潜艇学院

军事经济学院襄樊分院

西安通信学院

装甲兵技术学院

武汉军械士官学校

空军大连通信士官学校

主审单位 军队院校数学联席会



高等数学课程是军队院校学员不可或缺的重要基础理论课,对提高数学素养、文化素质和培养创新思维能力,具有其他学科所不能替代的作用。为了加强军事职业教育,提高士官数学教学质量,在军队院校数学联席会的具体组织策划下,编写了军队院校士官数学系列通用教材,得到了广大教员、学员的支持和认同,同时,他们要求能有与之相应的学习指导书和电子教案。为了满足大家的需求,数学联席会组织了相关教师进行了认真的研究,达成了共识,编写和制作了与士官数学系列通用教材相配套的大专《高等数学学习指导》、《高等数学电子教案》,中专《数学学习指导》、《数学电子教案》。指导书体例新颖,着力概念理解,内容丰富,题型全面。相信该套学习指导书,将对于军校士官的数学学习会起到积极的促进作用。

指导书按通用教材的各章撰写,每章分五个模块:

(1) 教学基本要求 了解总参谋部要求达到的教学目标。概念、理论分为“理解”、“了解”,方法、运算分为“掌握”、“会”两个不同层次。

(2) 释疑解惑 撰写了学习概念和计算过程中容易发生的错误,以求加深对概念的理解和计算方法的掌握。

(3) 典型题型分析 介绍了各章可能出现的主要题型及其基本解题方法,并且指出其应该注意的问题。

(4) 习题全解 为了帮助大家掌握解题方法,克服解题中遇到的困难,对教材中的全部习题都作了解答。希望大家在解题之前,首先要认真思考,最好能独立完成作业;当思考再三,仍不能解决时,才看此习题全解,搞清解题方法,找出自己解不出的症结所在,这样才能起到理解概念,掌握方法,举一反三的功效。千万不能看着习题全解做题,甚至照抄题解了事,这样就背离了编写指导书的初衷。

(5) 同步测试题和参考答案或提示 供大家检查学习质量之用。

本书主编为褚仁华、王运行。

编者(以姓氏笔画为序)为王品、严斌辉、李璞、吴忠、蒋彦、廖毕文。

全书由军队院校数学联席会、空军工程大学侯云畅主审并统稿。

在编写过程中,得到了相关院校各级领导和教研室同仁的支持和帮助,还得到了国防工业出版社领导和崔晓莉编辑的大力支持,在此谨向他们致以衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中的错误和不当之处,请读者不吝指正。

编者

2009年2月



第一章 集合与函数

一、教学基本要求 / 1

二、释疑解惑 / 1

问题 1 单调函数必有单值反函数,不单调的函数是不是一定没有单值反函数? / 1

问题 2 怎样判断一个函数是不是周期函数? / 2

问题 3 是否所有的周期函数都有最小正周期? / 2

问题 4 三角函数的角的度量为什么要采用弧度制? / 2

问题 5 两个无界函数的乘积仍然无界吗? / 3

问题 6 分段函数一定不是初等函数吗? / 3

三、典型题型分析 / 3

1. 集合的运算 / 3

2. 求函数的定义域 / 4

3. 求函数的表达式 / 5

4. 求反函数 / 6

5. 判定函数的奇偶性 / 6

6. 指数运算和对数运算 / 7

7. 三角恒等式的化简、求值与证明 / 7

8. 三角函数的最值与周期 / 8

9. 求反三角函数的值 / 9

10. 函数的复合与分解 / 10

四、习题一全解 / 11

五、同步测试题和参考答案或提示 / 19

第二章 极限与连续函数

一、教学基本要求 / 23

二、释疑解惑 / 23

问题1 有哪几种情形,极限可能不存在? / 23

问题2 已知函数的极限值,如何确定函数中的常数? / 24

问题3 无穷小是零吗? / 25

三、典型题型分析 / 26

1. 求函数极限的方法 / 26

2. 讨论函数的连续性 / 29

3. 讨论函数的间断点 / 30

4. 利用零值定理证明根的存在性 / 30

四、习题二全解 / 31

五、同步测试题和参考答案或提示 / 40

第三章 一元函数的导数与微分

一、教学基本要求 / 43

二、释疑解惑 / 43

问题1 $f'(x_0)$, $(f(x))'$ 与 $(f(x_0))'$ 有何区别与联系? / 43

问题2 如何求分段函数的导数? / 44

问题3 函数的导数与微分有何区别与联系? / 44

问题4 一阶微分形式的不变性有何意义? / 45

三、典型题型分析 / 45

1. 用导数的定义讨论函数的导数 / 45

2. 求函数和、差、积、商的导数 / 46

3. 求复合函数的导数 / 46

4. 分段函数的导数 / 47

5. 利用导数的几何意义求曲线的切线及法线 / 47

6. 求函数的高阶导数 / 48

7. 求函数的微分 / 48

8. 求隐函数的导数 / 49

9. 求参数方程所确定的函数的导数 / 50

10. 导数的应用 / 50

四、习题三全解 / 51

五、同步测试题和参考答案或提示 / 67

第四章 导数的应用

一、教学基本要求 / 71

二、释疑解惑 / 71

问题1 利用洛必达法则求未定式的极限要注意哪些问题? / 71

问题2 函数的单调性如何判定? / 72

问题3 如何利用函数的单调性证明函数(数值)不等式? / 73

问题4 求函数的极值和最值的一般步骤是什么? / 74

问题5 怎样确定曲线的凹凸性及拐点? / 74

三、典型题型分析 / 75

1. 利用洛必达法则求极限 / 75

2. 讨论函数的单调性 / 75

3. 用函数的单调性证明根的唯一性 / 76

4. 证明函数不等式 / 76

5. 求函数的极值与最值 / 77

6. 判定曲线的凹凸性及拐点 / 77

四、习题四全解 / 77

五、同步测试题和参考答案或提示 / 88

第五章 不定积分

一、教学基本要求 / 91

二、释疑解惑 / 91

问题1 “若 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的不定积分”, 这种说法对吗? / 91

问题2 若 $f(x)$ 在某区间内不连续, 则在该区间内 $f(x)$ 必无原函数吗? / 92

问题3 不定积分可以有多种表达式吗? / 92

问题4 凡奇函数的原函数都是偶函数, 偶函数的原函数都是奇函数, 对吗? / 92

问题5 下面的计算过程错在哪里? / 92

问题6 求分段函数的不定积分时应注意什么? / 93

三、典型题型分析 / 93

1. 直接积分法 / 93
2. 已知函数的原函数求函数 / 94
3. 用第一类换元法求积分 / 94
4. 用第二类换元法求积分 / 98
5. 用分部积分法求积分 / 100
6. 简单有理函数的积分 / 102
7. 分段函数的不定积分 / 103
8. 已知函数或函数的原函数,求含有导函数的积分 / 103

四、习题五全解 / 104

五、同步测试题和参考答案或提示 / 116

第六章 定积分及其应用

一、教学基本要求 / 121

二、释疑解惑 / 121

问题1 在定积分的定义中, $\lambda \rightarrow 0$ 和 $n \rightarrow \infty$ 等价吗? / 121

问题2 对积分上限的函数求导应注意什么? / 122

问题3 用牛顿—莱布尼茨公式计算定积分时,不会因为所选的原函数不同而导致不同的结果,这是为什么? / 122

问题4 定积分 $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$,为什么用两种方法计算结果不同? / 122

问题5 不定积分和定积分的第二换元法有何不同? / 123

问题6 怎样计算被积函数含有绝对值符号的定积分? / 123

问题7 用微元法为何有两个要求? / 124

三、典型题型分析 / 124

1. 利用定积分的性质比较积分值的大小 / 124
2. 与积分上限的函数有关的计算 / 125
3. 用换元法计算定积分 / 126
4. 用分部积分法计算定积分 / 127
5. 被积函数含绝对值的定积分 / 128
6. 利用被积函数的奇偶性计算定积分 / 129
7. 定积分应用 / 130

四、习题六全解 / 131

五、同步测试题和参考答案或提示 / 152

第七章 常微分方程

一、教学基本要求 / 154

二、释疑解惑 / 154

问题1 微分方程的通解是否包含所有的解? / 154

问题2 微分方程会出现漏解吗? / 154

问题3 如何使用解的结构定理? / 155

问题4 如何用微分方程解决实际问题? / 155

三、典型题型分析 / 155

1. 关于微分方程的基本概念的问题 / 155

2. 可分离变量方程 / 156

3. 一阶线性微分方程——公式法或常数变易法 / 157

4. 可降阶的高阶微分方程 / 159

5. 二阶常系数齐次线性微分方程——特征方程法 / 161

6. 二阶常系数非齐次线性微分方程——待定系数法 / 162

7. 微分方程的应用 / 164

四、习题七全解 / 165

五、同步测试题和参考答案或提示 / 176

第八章 向量代数与空间解析几何

一、教学基本要求 / 180

二、释疑解惑 / 180

问题1 空间一点的坐标和向量的坐标都是三元有序实数组,它们有什么不同? / 180

问题2 向量的内积有哪些应用? / 181

问题3 向量的向量积有哪些应用? / 182

问题4 如何求点在直线或平面上的投影点及其应用? / 182

三、典型题型分析 / 183

1. 求两点间的距离 / 183

2. 向量的线性运算 / 183

- 3. 求向量的内积 / 184
 - 4. 求向量的向量积 / 184
 - 5. 关于空间曲面的问题 / 185
 - 6. 求旋转曲面的方程 / 185
 - 7. 建立平面的方程 / 186
 - 8. 建立空间直线的方程 / 186
 - 9. 平面、空间直线之间的关系 / 187
- 四、习题八全解 / 188
- 五、同步测试题和参考答案或提示 / 197

第九章 二元函数的微分与积分

一、教学基本要求 / 201

二、释疑解惑 / 201

问题 1 一元函数的极限与二元函数的极限有何异同? / 201

问题 2 一元函数的导数记号 $\frac{dy}{dx}$ 可以理解为 dy 与 dx 之商, 多元函数的

偏导数记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 能否理解为 ∂z 与 ∂x 之商? / 202

问题 3 二元函数在一点处极限存在、连续、可导、可微之间有什么关系? / 202

问题 4 二元函数的极值是否一定在驻点取得? / 203

问题 5 二重积分的定义与定积分的定义有哪些相同和不同之处? / 203

问题 6 计算二重积分分哪几步? 如何确定累次积分的上、下限? / 204

问题 7 如何利用积分区域的对称性计算二重积分? / 204

三、典型题型分析 / 205

- 1. 求二元函数的表达式 / 205
- 2. 求二元函数的极限 / 205
- 3. 证明二元函数的极限不存在 / 206
- 4. 求二元函数的偏导数 / 206
- 5. 求二元函数的全微分 / 208
- 6. 二元复合函数求导 / 208
- 7. 求二元函数的极值和最值 / 208
- 8. 计算二重积分 / 209

四、习题九全解 / 210

五、同步测试题和参考答案或提示 / 217

第十章 无穷级数

一、教学基本要求 / 221

二、释疑解惑 / 222

问题 1 无穷级数是否满足结合律和交换律? / 222

问题 2 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 是否一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$? / 222

问题 3 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 当 $x = \pm R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 是否收敛? / 222

问题 4 如何求幂级数的和函数? / 223

问题 5 函数展开为傅里叶级数, 其形式是否唯一? / 223

三、典型题型分析 / 223

1. 利用级数收敛的定义判定级数的敛散性 / 223

2. 利用级数收敛的必要条件与级数的性质判定级数的敛散性 / 224

3. 正项级数的审敛法 / 225

4. 交错级数的审敛法 / 226

5. 任意项级数的审敛法 / 226

6. 求幂级数的收敛半径和收敛区间 / 227

7. 求幂级数的和函数 / 228

8. 求常数项级数的和 / 229

9. 将函数展开成幂级数 / 229

10. 将函数展开成傅里叶级数 / 230

四、习题十全解 / 232

五、同步测试题和参考答案或提示 / 248

附录 教学质量评价抽测题及其参考答案 / 251

参考文献 / 264

本章主要内容有集合、函数、基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)及其运算、复合函数、初等函数等. 集合是数学的基础, 函数是高等数学研究的主要对象, 基本初等函数是函数的重要组成部分, 而幂运算、对数运算、三角恒等运算等则是数学运算的基础. 所以本章的内容是构建微积分学大厦的基石.

一、教学基本要求

1. 了解集合的概念. 会集合的运算. 了解充要条件的意义.
2. 理解函数概念. 了解函数的性质. 了解反函数概念.
3. 掌握指数幂、对数运算. 理解幂函数、指数函数、对数函数的概念, 了解其图像与性质.
4. 理解任意角三角函数的定义. 了解正弦函数、余弦函数、正切函数的图像与性质. 会用同角三角函数的基本关系式, 两角和与差及二倍角公式. 了解反三角函数.
5. 理解复合函数、初等函数的概念. 了解分段函数.

二、释疑解惑

问题 1 单调函数必有单值反函数, 不单调的函数是不是一定没有单值反函数?

解答 不是的. 一个函数是否存在单值反函数, 取决于它的对应法则 f 在定义域 D 与值域 R_f 之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应, 那么必有单值反函数; 否则就没有单值反函数. 函数在区间 I 上单调只是一种特殊的

——对应关系,因此单调仅是存在单值反函数的充分条件,而不是必要条件.

例如,函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & -1\leq x\leq 0, \\ x+1, & 0<x\leq 1 \end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上不单调,但它存

在单值反函数 $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x, & 0\leq x\leq 1, \\ x-1, & 1<x\leq 2. \end{cases}$

又如,函数 $\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调,但有单值

反函数 $\varphi^{-1}(x)\equiv\varphi(x)$.

问题 2 怎样判断一个函数是不是周期函数?

解答 基本方法是利用周期函数的定义,假设 $f(x)$ 满足 $f(x+T)=f(x)$, 取定一点 x_0 , 应有 $f(x_0+T)=f(x_0)$, 把它看做以 T 为变量的方程,如果能求出全部解 $T=T_i (i=1,2,\dots)$, 然后检验 $f(x+T_i)=f(x)$ 是否成立,若有某些 T_i 使恒等式成立,则最小的 T_i 即是 $f(x)$ 的周期.

若函数的定义域是有上界或有下界的,或 $f(x)-f(x_0)$ 的零点不呈周期性,则此函数必非周期函数.

例 1 讨论下列函数是不是周期函数.

(1) $f(x)=x-[x]$; (2) $f(x)=\sin\sqrt{x}$; (3) $f(x)=\sin x^2$.

解 (1) 设有 $f(x+T)=f(x)$, 取 $x=0$, 有 $T=[T]$, 解得 T 为整数, 取 $T=1$, 易知 $f(x+1)=f(x)$ 成立, 所以函数 $f(x)=x-[x]$ 是以 1 为周期的周期函数;

(2) $f(x)$ 的定义域为 $x\geq 0$, 有下界, 故 $f(x)$ 不是周期函数;

(3) $f(x)$ 的零点为 $x=\pm\sqrt{n\pi}$, 相邻两零点间的距离 $d=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}$, 可见, 零点分布没有周期性, 因此 $f(x)$ 不是周期函数.

问题 3 是否所有的周期函数都有最小正周期?

解答 不一定. 例如, 狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$, 所

有非零有理数都是其周期, 而非零有理数无最小正数.

又如, 常值函数 $y=C$, 所有非零实数都是其周期, 而非零实数无最小正数.

问题 4 三角函数的角的度量为什么要采用弧度制?

解答 这是因为高等数学中的许多重要性质, 如等价无穷小、连续性、求导数公式以及泰勒展开式等, 都是直接或间接地建立在重要极限 $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的基

础上的,而在证明这个极限的过程中,用到圆弧长的计算公式 $l=xR$,这里圆心角 x 用的是弧度,因此在高等数学中三角函数的角的度量均采用弧度制.

如果角 x 的度量采用角度制,那么将有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$,这是因为 $x^\circ = \frac{\pi}{180}x$ 之故,从而许多重要结论,如 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$, $(\sin x)' = \cos x$ 等就都要改变,代替它们的将是繁杂的表达式,例如 $(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x$,这会带来许多不便.

问题 5 两个无界函数的乘积仍然无界吗?

解答 不一定.例如, $f(x) = \tan x$, $g(x) = \cot x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内都无界,但 $f(x)g(x) = 1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是有界的.

$$\text{又如, } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ (1-x)(2-x)^2, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{(1-x)(2-x)}, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

在 $(0, 2)$ 内都无界,但 $f(x)g(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 在 $(0, 2)$ 内是有界的.

问题 6 分段函数一定不是初等函数吗?

解答 初等函数是指由基本初等函数经有限次四则运算及复合步骤所得到的,并能用一个式子表示的函数.一般地,分段函数在不同的定义区间用不同的表达式表示,但也可能用一个表达式表示.

例如, $\varphi(x) = |x|$, 通常写成分段函数的形式 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 但也可写

成一个表达式 $|x| = \sqrt{x^2}$, 因此函数 $\varphi(x) = |x|$ 是初等函数. 所以不能说分段函数一定不是初等函数.

三、典型题型分析

1. 集合的运算

集合有交集、并集和补集三种运算. $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$; $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$; $\complement_I A = \{x | x \in I, \text{且 } x \notin A\}$.

例 1 已知 $A = \{x | x^2 - px + 15 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{3\}$, 求 A, B 及 p, q 的值.

解 由 $A \cap B = \{3\}$, 故 $3 \in A, 3 \in B$,