

21 世纪

高等院校工科类数学教材

高等数学

(上册)

褚宝增 陈兆斗 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校工科类数学教材

高等数学

(上册)

褚宝增 陈北斗 主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册/褚宝增,陈兆斗主编. —北京:北京大学出版社, 2008. 8

(21世纪高等院校工科类数学教材)

ISBN 978-7-301-13535-8

I. 高… II. ①褚… ②陈… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第039295号

书 名: 高等数学(上册)

著作责任者: 褚宝增 陈兆斗 主编

责任编辑: 刘 勇

封面设计: 林胜利

标准书号: ISBN 978-7-301-13535-8/O·0747

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021 出版部 62754962

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×960mm 16开本 16.75印张 350千字

2008年8月第1版 2008年8月第1次印刷

印 数: 0001—5000册

定 价: 26.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

本书是根据教育部《工科高等数学课程教学基本要求》编写的工科类本科高等数学教材,编者全部是具有丰富教学经验的教师。全书共十二章,分上、下两册出版。上册内容包括:极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程等;下册内容包括:空间解析几何与向量代数,多元函数微分法及其应用,重积分,曲面积分与曲线积分,无穷级数及傅里叶级数等。本书按节配置习题,每章有总练习题,书末附有答案与提示,便于读者参考。

本书根据工科学生的实际要求及相关课程的设置次序,对传统的教学内容在结构和内容上作了合理调整,使之更适合新世纪高等数学教学理念和教学内容的改革趋势。其主要特点是:选材取舍精当,行文简约严密,讲解重点突出,服务后续课程,衔接考研思路,注重基础训练和学生综合能力的培养。

本书可作为高等院校工科类各专业本科生高等数学课程的教材,也可作为相关专业的大学生、自学考试学生的教材或教学参考书。

前 言

当前,我国高等教育蓬勃发展,教学改革不断深入,高等院校工科类数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中.为适应高等教育 21 世纪教学内容和课程体系改革的总目标,培养具有创新能力的高素质人才,我们应北京大学出版社的邀请,经集体讨论,分工编写了这套《21 世纪高等院校工科类数学教材》,其中高等数学分上、下两册出版.

本教材参照教育部《工科高等数学课程教学基本要求》,按照“加强基础、培养能力、重视应用”的指导方针,精心选材,力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐与统一,集中体现了编者长期讲授工科类高等数学课所积累的丰富教学经验,反映了当前工科数学教学理念和教学内容的改革趋势.具体体现在以下几个方面:

1. 精心构建教材内容.本教材在内容选择方面,根据工科学生的实际要求及相关专业课程的特点,汲取了国内外优秀教材的优点,对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的调整,为后续课程打好坚实的基础.

2. 内容讲述符合认知规律.以几何直观、物理背景或典型例题作为引入数学基本概念的切入点;对重要概念、重要定理、难点内容从多侧面进行剖析,做到难点分散,便于学生理解与掌握.

3. 强调基础训练和基本能力的培养.紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题,并剖析一些综合性例题.按节配有适量习题,每章配有总练习题,书末附有答案与提示,便于读者参考.

4. 注重学以致用.紧密结合几何、物理中的应用,通过分析具有典型意义的应用例题和配置多样化习题,以培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力.

本书的第一章极限、第二章导数与微分由王翠香编写,第三章微分中值定理与导数的应用、第六章常微分方程由褚宝增编写,第四章不定积分由吴飞编写,第五章定积分及其应用由陈瑞阁编写,第七章空间解析几何与向量代数由邓燕编写,第八章多元函数微分法及其应用由陈振国编写,第九章重积分、第十章曲线积分与曲面积分由赵琳琳编写,第十一章无穷级数、第十二章傅里叶级数由陈兆斗编写.全书由褚宝增、陈兆斗二位教授统稿.

本书的主要特点是:选材取舍精当,行文简约严密,讲解重点突出,服务后续课程,衔接考研思路等.

特别感谢许伯济教授、王祖朝教授、高世臣教授、田东风教授、闫庆旭教授对本书的认真审稿及所提出的修改意见。

囿于编者水平及编写时间较为仓促,教材之中难免存在疏漏与不妥之处,恳请广大读者不吝指正。

编 者

2008年3月

目 录

第一章 极限	(1)
§ 1.1 数列的极限	(1)
一、数列极限的定义	(1)
二、收敛数列的性质	(4)
习题 1.1	(5)
§ 1.2 函数的极限	(6)
一、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(6)
二、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(9)
三、函数极限的定理	(11)
习题 1.2	(11)
§ 1.3 无穷小与无穷大	(12)
一、无穷小	(12)
二、无穷大	(13)
习题 1.3	(15)
§ 1.4 极限的运算法则	(16)
一、无穷小的运算性质	(16)
二、极限四则运算法则	(17)
三、复合函数求极限的运算法则	(20)
习题 1.4	(20)
§ 1.5 极限存在准则 · 两个重要极限	(21)
一、夹逼准则	(21)
二、单调有界准则	(23)
习题 1.5	(26)
§ 1.6 无穷小的比较	(27)
习题 1.6	(29)
§ 1.7 函数的连续性与间断点	(29)
一、函数连续性的概念	(30)
二、函数的间断点	(32)
习题 1.7	(34)

§ 1.8	连续函数的运算与初等函数的连续性	(35)
	一、连续函数的四则运算	(35)
	二、反函数的连续性	(35)
	三、复合函数的连续性	(36)
	四、初等函数的连续性	(38)
	习题 1.8	(39)
§ 1.9	闭区间上连续函数的性质	(39)
	一、最大值最小值定理	(40)
	二、介值定理	(40)
	习题 1.9	(41)
	总练习题一	(42)
第二章	导数与微分	(43)
§ 2.1	导数的概念	(43)
	一、关于变化率的例子	(43)
	二、导数的定义	(44)
	三、导数的几何意义	(48)
	四、函数的可导性与连续性的关系	(49)
	习题 2.1	(49)
§ 2.2	函数的求导法则	(50)
	一、导数的四则运算法则	(51)
	二、反函数的求导法则	(53)
	三、复合函数的求导法则	(54)
	四、初等函数的导数	(57)
	五、双曲函数与反双曲函数的导数	(57)
	习题 2.2	(58)
§ 2.3	高阶导数	(59)
	习题 2.3	(61)
§ 2.4	隐函数及由参数方程所表示的函数的导数·相关变化率	(62)
	一、隐函数的导数	(62)
	二、由参数方程所表示的函数的导数	(65)
	三、相关变化率	(68)
	习题 2.4	(68)
§ 2.5	函数的微分及其应用	(69)
	一、微分的概念	(69)

二、微分的几何意义	(72)
三、微分运算法则及一阶微分形式的不变性	(72)
四、微分在近似计算中的应用	(74)
习题 2.5	(75)
总练习题二	(76)
第三章 微分中值定理与导数应用	(78)
§ 3.1 微分中值定理	(78)
一、罗尔定理	(78)
二、拉格朗日中值定理	(80)
三、柯西中值定理	(81)
习题 3.1	(82)
§ 3.2 洛必达法则	(83)
习题 3.2	(85)
§ 3.3 泰勒公式	(86)
习题 3.3	(91)
§ 3.4 函数的单调与极值	(92)
一、函数的单调性	(92)
二、函数的极值	(93)
习题 3.4	(97)
§ 3.5 函数的最大值与最小值	(97)
习题 3.5	(99)
§ 3.6 曲线的凹凸性与拐点	(100)
习题 3.6	(103)
§ 3.7 函数图形的描绘	(103)
习题 3.7	(109)
§ 3.8 曲率	(109)
习题 3.8	(112)
* § 3.9 函数方程的数值解法	(113)
一、二分法	(113)
二、切线法	(114)
习题 3.9	(114)
总练习题三	(115)
第四章 不定积分	(117)
§ 4.1 不定积分的概念与性质	(117)

一、原函数与不定积分的概念	(117)
二、基本积分公式	(119)
三、不定积分的性质	(120)
习题 4.1	(122)
§ 4.2 换元积分法	(122)
一、第一换元法(凑微分法)	(122)
二、第二换元法(代入法)	(126)
习题 4.2	(129)
§ 4.3 分部积分法	(130)
习题 4.3	(133)
§ 4.4 特殊类型函数的积分	(134)
一、有理函数的不定积分	(134)
二、三角函数有理式的不定积分	(137)
三、某些根式的不定积分	(138)
习题 4.4	(139)
总练习题四	(139)
第五章 定积分及其应用	(141)
§ 5.1 定积分的概念及性质	(141)
一、问题的提出	(141)
二、定积分的定义	(143)
三、定积分的存在定理	(144)
四、定积分的几何意义	(145)
五、定积分的性质	(146)
习题 5.1	(149)
§ 5.2 微积分基本公式	(150)
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	(150)
二、积分上限函数及其导数	(151)
三、牛顿-莱布尼茨公式	(153)
习题 5.2	(155)
§ 5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	(157)
一、定积分的换元积分法	(157)
二、定积分的分部积分法	(161)
习题 5.3	(163)
§ 5.4 广义积分	(164)

一、无穷限的广义积分	(165)
二、无界函数的广义积分	(167)
习题 5.4	(170)
§ 5.5 定积分的元素法	(171)
§ 5.6 定积分的应用	(173)
一、定积分在几何上的应用	(173)
二、定积分在物理上的应用	(183)
习题 5.6	(186)
* § 5.7 定积分的数值计算方法	(187)
一、矩形法	(188)
二、梯形法	(188)
三、抛物线法	(189)
习题 5.7	(191)
总练习题五	(191)
第六章 常微分方程	(194)
§ 6.1 常微分方程的基本概念	(194)
习题 6.1	(196)
§ 6.2 可分离变量的微分方程	(197)
习题 6.2	(198)
§ 6.3 齐次方程	(199)
一、齐次方程	(199)
二、可化为齐次的方程	(200)
习题 6.3	(202)
§ 6.4 一阶线性微分方程	(202)
一、线性方程	(202)
二、伯努利方程	(204)
习题 6.4	(205)
§ 6.5 可降阶的高阶微分方程	(206)
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型	(206)
二、 $y'' = f(x, y')$ 型	(207)
三、 $y'' = f(y, y')$ 型	(207)
习题 6.5	(209)
§ 6.6 二阶线性微分方程	(209)
一、二阶线性微分方程解的结构	(209)

二、常数变易法	(212)
习题 6.6	(214)
§ 6.7 二阶常系数齐次线性微分方程	(214)
习题 6.7	(217)
§ 6.8 二阶常系数非齐次线性微分方程	(218)
一、 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	(218)
二、 $f(x) = [P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]e^{\lambda x}$ 型	(220)
习题 6.8	(222)
§ 6.9 欧拉方程	(223)
习题 6.9	(223)
* § 6.10 一阶微分方程的数值解法	(224)
§ 6.11 微分方程应用举例	(226)
一、列微分方程求解几何问题	(226)
二、用微元法求解液体浓度和流量问题	(227)
三、列微分方程求解物理问题	(228)
习题 6.11	(231)
总练习题六	(231)
附录一 二阶和三阶行列式的计算	(233)
附录二 常用的参数方程与极坐标系的曲线	(235)
习题答案与提示	(238)



极限是高等数学中最重要、最基本的概念,这是因为高等数学中其他的基本概念都可用极限概念来表达,且解析运算也可用极限运算来描述.极限用于描述数列和函数在随变量无限变化过程中的变化趋势,极限的方法是微积分中的基本方法,是人们由有限认识无限、由近似认识精确、由量变认识质变的一种数学方法.本章将对极限的概念、运算及基本性质进行系统的讲述.

§ 1.1 数列的极限

一、数列极限的定义

所谓数列,简单地说就是一串编了号的无限多个数,可写成:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

数列还可以看做一种特殊的函数

$$x = x(t),$$

其定义域为全体自然数 \mathbf{N} ,称为整标函数,从而可理解为一串无限多个数

$$x(1), x(2), x(3), \dots, x(n), \dots$$

我们将它们记为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$,写成数列 $\{x_n\}$,其中 x_n 称为数列的一般项.例如

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots; \\ & 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots; \\ & 1, 8, 27, \dots, n^3, \dots; \\ & -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots \end{aligned}$$

都是数列的例子,它们的一般项 x_n 分别是 $\frac{1}{2^n}, 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n^3, (-1)^n$.

数列 $\{x_n\}$ 可以根据 n 的变化看做一系列变量,下面我们要研究数列这

种变量的变化规律——数列的极限. 在数学史上,很早就有朴素的数列极限概念,战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》中有句名言:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”如果把每天截后剩下部分的长度记录下来(单位为尺),所得到的数列就是 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. 不难看出,当 n 不断增大时,该数列无限地接近于0,但是,不论 n 多么大, $\frac{1}{2^n}$ 总不等于0. 再考查数列

$\left\{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$,随着 n 的无限增大,一般项 $1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限地接近于1. 这两个数列反映了一类数列的某种公共特性,即对于数列 $\{x_n\}$,存在某个常数 a ,随着 n 的不断增大, x_n 无限地接近于这个常数 a ,也就是说,只要 n 变得充分大以后, x_n 与 a 的距离 $|x_n - a|$ 就可以任意地小. 这时,我们称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限.

为了精确刻画出 x_n 与 a 可以无限接近,即距离 $|x_n - a|$ 可以变得任意小,我们引入符号 ϵ (读艾普西隆),要求对预先任意给定的正数 ϵ ,无论它多么小,都可以使距离 $|x_n - a|$ 小于 ϵ . 但这不是要求所有的 x_n 均满足不等式 $|x_n - a| < \epsilon$,而是让 n 相当大以后的所有项 x_n 满足 $|x_n - a| < \epsilon$ 即可. 我们用正整数 N 表示这个“相当大”的数,使得 $n > N$ 以后,即一切 x_{N+1}, x_{N+2}, \dots ,都有 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立. 例如对数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$,取 $a = 0$,由于 $|x_n - a| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n}$,因此

对 $\epsilon = \frac{1}{100}$,要使 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$,只要 $n > 6$,因此,当 $n > 6$ 以后,就有 $|x_n - 0| < \frac{1}{100}$;

对 $\epsilon = \frac{1}{1000}$,要使 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000}$,只要 $n > 9$,因此,当 $n > 9$ 以后,就有 $|x_n - 0| < \frac{1}{1000}$;

对 $\epsilon = \frac{1}{10000}$,要使 $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10000}$,只要 $n > 13$,因此,当 $n > 13$ 以后,就有 $|x_n - 0| < \frac{1}{10000}$.

一般地,不论给定的正数 ϵ 多么小,总可以找到正整数 N ,使得 $n > N$ 的一切 x_n 均满足不等式 $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \epsilon$. 这就是 $\frac{1}{2^n}$ 无限接近于0的实质.

综合上述,给出下面数列极限的定义.

定义 设 $\{x_n\}$ 是一个数列, a 是一个常数,若对任意给定的正数 ϵ ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,有

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad (1)$$

则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者说数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ,记做

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限,则称它是发散的或发散数列.

关于数列极限的定义需要说明两点:首先正数 ϵ 是预先任意给定的,一旦给出,它就是固定的,根据这个固定的 ϵ 再去寻找对应的满足①式的正整数 N ;其次关于 N ,我们关心的

是它的存在性,而不是它的具体数值.显然,如果对某个 $\epsilon>0$,正整数 N 满足①式,则把任何一个比 N 大的正整数作为 N ,①式仍然成立.

如果将常数 a 及数列 $\{x_n\}$ 的各项在数轴上用对应的点表示出来,则对于任意给定的正数 ϵ ,不管它多么小,总存在一个正整数 N ,使数列 $\{x_n\}$ 中的从第 $N+1$ 项起的一切项所表示的点,全部落在以 a 为中心,以 ϵ 为半径的开区间 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 内,在此开区间外,至多有数列 $\{x_n\}$ 的有限个点,见图1.

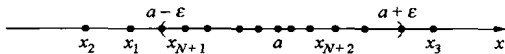


图 1

例 1 用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$.

证 对任意给定的 $\epsilon>0$,因为 $|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$,要使 $|x_n - 0| < \epsilon$,即 $\frac{1}{n} < \epsilon$,只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$,所以取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1$,则当 $n > N$ 即 $n > \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\epsilon}$ 时,就有

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0 \right| < \epsilon.$$

由数列极限定义,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$.

注 $[x]$ 表示取整函数,其值是不超过 x 的最大整数,例如

$$[5] = 5, \quad [-3.5] = -4, \quad [6.5] = 6.$$

例 2 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$,其中 $0 < |q| < 1$.

证 对任意给定的 $\epsilon>0$,要使 $|x_n - 0| = |q^n| < \epsilon$,直接解不等式,得到

$$n \ln |q| < \ln \epsilon.$$

由于 $0 < |q| < 1$,故 $\ln |q| < 0$,因此有 $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |q|}$.取 $N = \left[\frac{\ln \epsilon}{\ln |q|} \right] + 1$,则当 $n > N$ 时,就有

$$|q^n - 0| < \epsilon.$$

由数列极限的定义,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

从上述两个例子可以看出,用定义来证明数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a ,关键是解不等式

$$|x_n - a| < \epsilon \quad \text{或} \quad a - \epsilon < x_n < a + \epsilon,$$

由此找到一个正整数 N ,使得当 $n > N$ 时上述不等式成立即可.

例 3 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$.

证 对任意给定的 $\epsilon>0$,由于

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2 + a^2} - n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} < \frac{a^2}{n},$$

要使

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1 \right| < \epsilon,$$

只要 $\frac{a^2}{n} < \epsilon$, 即 $n > \frac{a^2}{\epsilon}$. 所以取 $N = \left[\frac{a^2}{\epsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1 \right| < \epsilon.$$

由数列极限的定义, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$.

例 3 用到了所谓“适当放大”的方法, 即将 $|x_n - a|$ 放大成 $\frac{c}{n^a}$ (a, c 为正的实常数), 再由不等式 $\frac{c}{n^a} < \epsilon$ 求出正整数 N , 这是一种常用的简化方法.

二、收敛数列的性质

定理 1 (唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它的极限是唯一的.

证 反证法. 假设当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $x_n \rightarrow a$ 及 $x_n \rightarrow b$, 且 $a < b$. 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, 根据极限定义, 则分别存在正整数 N_1 及 N_2 , 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}; \quad (2)$$

而当 $n > N_2$ 时, 有

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2}. \quad (3)$$

今取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, (2), (3) 两式同时成立.

但由 (2) 式有 $a_n < \frac{b+a}{2}$, 而由 (3) 式又有 $a_n > \frac{b+a}{2}$, 这就产生了矛盾, 所以收敛数列不可能有两个不同的极限, 即数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

给定数列 $\{x_n\}$, 如果存在正数 M , 使对一切正整数 n , 都有 $|x_n| \leq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 这时数列的全部项所对应的点都落在区间 $[-M, M]$ 内.

定理 2 (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它是有界数列.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 根据极限的定义, 当取 $\epsilon = 1$ 时, 存在 N , 使对一切正整数 $n > N$, 有

$$|x_n - a| < 1, \quad \text{即} \quad |x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 则对一切正整数 n , 都有

$$|x_n| \leq M,$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界数列.

数列的有界性是数列收敛的必要条件, 从而易知无界数列必然是发散的, 例如数列 $\{n^3\}$ 是发散数列.

在讨论数列的极限问题时, 常常涉及数列的子数列的概念. 一个数列的**子数列**, 就是在该数列的排列中, 按由前到后的次序抽取其一部分项构成的一个(无限)数列. 一般说来, 如果我们在 $\{x_n\}$ 中首先取出 x_{n_1} 作为子数列的第 1 项, 然后在 x_{n_1} 后面再取一项 x_{n_2} 作为第 2 项, \dots , 如此下去, 就得 $\{x_n\}$ 的一个子数列:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

子数列的第 k 项 x_{n_k} 恰好是原数列的第 n_k 项. 根据选取的次序, 不难得出:

$$n_k \geq k; \quad \text{若 } k_1 < k_2, \text{ 则 } n_{k_1} < n_{k_2}.$$

定理 3(收敛数列与子数列的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列收敛, 且极限也是 a .

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列. 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 根据极限的定义, 可知存在一个正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

此时令 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, 有 $n_k \geq k > K = N$, 从而有

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon.$$

这就证明了 $\{x_{n_k}\}$ 的极限是 a .

这个定理不仅保证了子数列的极限等于原数列的极限, 而且提供了判断数列发散的一个方法: 如果在一个数列中找到两个子数列, 它们都有极限, 但极限值却不同, 这时原数列就不可能有极限. 例如数列 $\{(-1)^n\}$ 是发散的, 这是因为当 n 为偶数时组成的子数列 $\{x_{2k}\}$ 极限为 1, 当 n 为奇数时组成的子数列 $\{x_{2k+1}\}$ 极限为 -1 .

习 题 1.1

1. 设 $x_n = \frac{n+1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 并填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	...
N						

2. 用数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$