21世纪

高等院校工科类数学教材

高等数学

（上册）

褚宝增　陈兆斗　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪
高等院校工科类数学教材

高 等 数 学

（上册）

褚宝增　陈兆斗　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学・上册/褚宝增,陈兆斗主编. 一北京：北京大学出版社，2008.8
(21世纪高等院校工科类数学教材)
ISBN 978-7-301-13535-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①褚… ②陈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第039295号

书　　名：高等数学(上册)
著作责任者：褚宝增　陈兆斗　主编
责 任 编 辑：刘　勇
封 面 设 计：林胜利
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-13535-8/O・0747
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62752021　出版部62754962
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
787mm×960mm　16开本　16.75印张　350千字
2008年8月第1版　　2008年8月第1次印刷
印　　数：0001—5000册
定　　价：26.00元

内容简介

本书是根据教育部《工科高等数学课程教学基本要求》编写的工科类本科高等数学教材，编者全部是具有丰富教学经验的教学一线教师. 全书共十二章，分上、下两册出版. 上册内容包括：极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程等；下册内容包括：空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用，重积分，曲面积分与曲线积分，无穷级数及傅里叶级数等. 本书按节配置习题，每章有总练习题，书末附有答案与提示，便于读者参考.

本书根据工科学生的实际要求及相关课程的设置次序，对传统的教学内容在结构和内容上作了合理调整，使之更适合新世纪高等数学教学理念和教学内容的改革趋势. 其主要特点是：选材取舍精当，行文简约严密，讲解重点突出，服务后续课程，衔接考研思路，注重基础训练和学生综合能力的培养.

本书可作为高等院校工科类各专业本科生高等数学课程的教材，也可作为相关专业的大学生、自学考试学生的教材或教学参考书.

前　言

当前，我国高等教育蓬勃发展，教学改革不断深入，高等院校工科类数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中.为适应高等教育21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们应北京大学出版社的邀请，经集体讨论，分工编写了这套《21世纪高等院校工科类数学教材》，其中高等数学分上、下两册出版.

本教材参照教育部《工科高等数学课程教学基本要求》，按照"加强基础、培养能力、重视应用"的指导方针，精心选材，力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐与统一，集中体现了编者长期讲授工科类高等数学课所积累的丰富教学经验，反映了当前工科数学教学理念和教学内容的改革趋势.具体体现在以下几个方面：

1. 精心构建教材内容.本教材在内容选择方面，根据工科学生的实际要求及相关专业课程的特点，汲取了国内外优秀教材的优点，对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的调整，为后续课程打好坚实的基础.

2. 内容讲述符合认知规律.以几何直观、物理背景或典型例题作为引入数学基本概念的切入点；对重要概念、重要定理、难点内容从多侧面进行剖析，做到难点分散，便于学生理解与掌握.

3. 强调基础训练和基本能力的培养.紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题，并剖析一些综合性例题.按节配有适量习题，每章配有总练习题，书末附有答案与提示，便于读者参考.

4. 注重学以致用.紧密结合几何、物理中的应用，通过分析具有典型意义的应用例题和配置多样化习题，以培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力.

本书的第一章极限、第二章导数与微分由王翠香编写，第三章微分中值定理与导数的应用、第六章常微分方程由褚宝增编写，第四章不定积分由吴飞编写，第五章定积分及其应用由陈瑞阁编写，第七章空间解析几何与向量代数由邓燕编写，第八章多元函数微分法及其应用由陈振国编写，第九章重积分、第十章曲线积分与曲面积分由赵琳琳编写，第十一章无穷级数、第十二章傅里叶级数由陈兆斗编写.全书由褚宝增、陈兆斗二位教授统稿.

本书的主要特点是：选材取舍精当，行文简约严密，讲解重点突出，服务后续课程，衔接考研思路等.

特别感谢许伯济教授、王祖朝教授、高世臣教授、田东风教授、闫庆旭教授对本书的认真审稿及所提出的修改意见.

囿于编者水平及编写时间较为仓促,教材之中难免存在疏漏与不妥之处,恳请广大读者不吝指正.

编　者

2008年3月

目　　录

第一章 极限

极限是高等数学中最重要、最基本的概念，这是因为高等数学中其他的基本概念都可用极限概念来表达，且解析运算也可用极限运算来描述．极限用于描述数列和函数在随变量无限变化过程中的变化趋势，极限的方法是微积分中的基本方法，是人们由有限认识无限、由近似认识精确、由量变认识质变的一种数学方法．本章将对极限的概念、运算及基本性质进行系统的讲述．

§1.1 数列的极限

一、数列极限的定义

所谓数列，简单地说就是一串编了号的无限多个数，可写成：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots.$$

数列还可以看做一种特殊的函数

$$x = x(t),$$

其定义域为全体自然数 **N**，称为**整标函数**，从而可理解为一串无限多个数

$$x(1), x(2), x(3), \cdots, x(n), \cdots.$$

我们将它们记为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，写成数列 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为数列的一般项．例如

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \cdots;$$

$$1, 8, 27, \cdots, n^3, \cdots;$$

$$-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$$

都是数列的例子，它们的一般项 x_n 分别是 $\frac{1}{2^n}$，$1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，n^3，$(-1)^n$．

数列 $\{x_n\}$ 可以根据 n 的变化看做一列变量，下面我们要研究数列这

种变量的变化规律——数列的极限. 在数学史上，很早就有朴素的数列极限概念，战国时代哲学家庄周所著的《庄子 · 天下篇》中有句名言："一尺之棰，日取其半，万世不竭."如果把每天截后剩下部分的长度记录下来(单位为尺)，所得到的数列就是$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. 不难看出，当$n$不断增大时，该数列无限地接近于0，但是，不论$n$多么大，$\frac{1}{2^n}$总不等于0. 再考查数列$\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$，随着$n$的无限增大，一般项$1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$无限地接近于1. 这两个数列反映了一类数列的某种公共特性，即对于数列$\{x_n\}$，存在某个常数a，随着n的不断增大，x_n无限地接近于这个常数a，也就是说，只要n变得充分大以后，x_n与a的距离$|x_n-a|$就可以任意地小. 这时，我们称a为数列$\{x_n\}$的极限.

为了精确刻画出x_n与a可以无限接近，即距离$|x_n-a|$可以变得任意小，我们引入符号ε(读艾普西隆)，要求对预先任意给定的正数ε，无论它多么小，都可以使距离$|x_n-a|$小于ε. 但这不是要求所有的x_n均满足不等式$|x_n-a|<\varepsilon$，而是让n相当大以后的所有项x_n满足$|x_n-a|<\varepsilon$即可. 我们用正整数N表示这个"相当大"的数，使得$n>N$以后，即一切x_{N+1}，x_{N+2}，…，都有$|x_n-a|<\varepsilon$成立. 例如对数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，取$a=0$，由于$|x_n-a|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}$，因此

对$\varepsilon=\frac{1}{100}$，要使$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}$，只要$n>6$，因此，当$n>6$以后，就有$|x_n-0|<\frac{1}{100}$；

对$\varepsilon=\frac{1}{1000}$，要使$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$，只要$n>9$，因此，当$n>6$以后，就有$|x_n-0|<\frac{1}{1000}$；

对$\varepsilon=\frac{1}{10000}$，要使$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10000}$，只要$n>13$，因此，当$n>6$以后，就有$|x_n-0|<\frac{1}{10000}$.

一般地，不论给定的正数ε多么小，总可以找到正整数N，使得$n>N$的一切x_n均满足不等式$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$. 这就是$\frac{1}{2^n}$无限接近于0的实质.

综合上述，给出下面数列极限的定义.

定义 设$\{x_n\}$是一个数列，a是一个常数，若对任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$n>N$时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon, \qquad ①$$

则称a为**数列$\{x_n\}$的极限**，或者说**数列$\{x_n\}$收敛于**a，记做

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限，则称它是**发散的**或**发散数列**.

关于数列极限的定义需要说明两点：首先正数ε是预先任意给定的，一旦给出，它就是固定的，根据这个固定的ε再去寻找对应的满足①式的正整数N；其次关于N，我们关心的

是它的存在性，而不是它的具体数值. 显然，如果对某个 $\varepsilon>0$，正整数 N 满足①式，则把任何一个比 N 大的正整数作为 N，①式仍然成立.

如果将常数 a 及数列$\{x_n\}$的各项在数轴上用对应的点表示出来，则对于任意给定的正数 ε，不管它多么小，总存在一个正整数 N，使数列$\{x_n\}$中的从第 $N+1$ 项起的一切项所表示的点，全部落在以 a 为中心，以 ε 为半径的开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内，在此开区间外，至多有数列$\{x_n\}$的有限个点，见图 1.

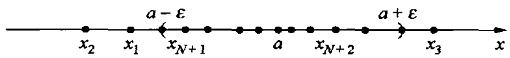

图 1

例 1 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $|x_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$，要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 即 $n>\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，就有

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

由数列极限定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0.$$

注 $[x]$表示取整函数，其值是不超过 x 的最大整数，例如

$$[5]=5,\quad [-3.5]=-4,\quad [6.5]=6.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中 $0<|q|<1$.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=|q^n|<\varepsilon$，直接解不等式，得到

$$n\ln|q|<\ln\varepsilon.$$

由于 $0<|q|<1$，故 $\ln|q|<0$，因此有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

由数列极限的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0.$$

从上述两个例子可以看出，用定义来证明数列$\{x_n\}$的极限是 a，关键是解不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon\quad 或\quad a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

由此找到一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时上述不等式成立即可.

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n},$$

要使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

只要 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$. 所以取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,就有

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon.$$

由数列极限的定义,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

例 3 用到了所谓"适当放大"的方法,即将 $|x_n-a|$ 放大成 $\frac{c}{n^\alpha}$(α,c 为正的实常数),再由不等式 $\frac{c}{n^\alpha}<\varepsilon$ 求出正整数 N,这是一种常用的简化方法.

二、收敛数列的性质

定理 1(唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则它的极限是唯一的.

证 反证法. 假设当 $n\to\infty$ 时,有 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$,且 $a<b$. 取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$,根据极限定义,则分别存在正整数 N_1 及 N_2,使得当 $n>N_1$ 时,有

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}; \qquad ②$$

而当 $n>N_2$ 时,有

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2}. \qquad ③$$

令取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,②,③两式同时成立.

但由②式有 $a_n<\frac{b+a}{2}$,而由③式又有 $a_n>\frac{b+a}{2}$,这就产生了矛盾,所以收敛数列不可能有两个不同的极限,即数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

给定数列 $\{x_n\}$,如果存在正数 M,使对一切正整数 n,都有 $|x_n|\leqslant M$,则称数列 $\{x_n\}$ 是**有界的**. 这时数列的全部项所对应的点都落在区间 $[-M,M]$ 内.

定理 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则它是有界数列.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,根据极限的定义,当取 $\varepsilon=1$ 时,存在 N,使对一切正整数 $n>N$,有

$$|x_n-a|<1, \quad 即 \quad |x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,则对一切正整数 n,都有

$$|x_n| \leqslant M,$$

所以$\{x_n\}$是有界数列.

数列的有界性是数列收敛的必要条件,从而易知无界数列必然是发散的,例如数列$\{n^3\}$是发散数列.

在讨论数列的极限问题时,常常涉及数列的子数列的概念.一个数列的**子数列**,就是在该数列的排列中,按由前到后的次序抽取其一部分项构成的一个(无限)数列.一般说来,如果我们在$\{x_n\}$中首先取出x_{n_1}作为子数列的第1项,然后在x_{n_1}后面再取一项x_{n_2}作为第2项,…,如此下去,就得$\{x_n\}$的一个子数列:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots.$$

子数列的第k项x_{n_k}恰好是原数列的第n_k项.根据选取的次序,不难得出:

$$n_k \geqslant k; \quad \text{若 } k_1 < k_2, \text{则 } n_{k_1} < n_{k_2}.$$

定理3(收敛数列与子数列的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列收敛,且极限也是a.

证 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.对任意给定的$\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,根据极限的定义,可知存在一个正整数$N$,使当$n>N$时,有

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

此时令$K=N$,则当$k>K$时,有$n_k \geqslant k > K = N$,从而有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

这就证明了$\{x_{n_k}\}$的极限是a.

这个定理不仅保证了子数列的极限等于原数列的极限,而且提供了判断数列发散的一个方法:如果在一个数列中找到两个子数列,它们都有极限,但极限值却不同,这时原数列就不可能有极限.例如数列$\{(-1)^n\}$是发散的,这是因为当n为偶数时组成的子数列$\{x_{2k}\}$极限为1,当n为奇数时组成的子数列$\{x_{2k+1}\}$极限为-1.

习 题 1.1

1. 设$x_n=\dfrac{n+1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,并填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	…
N						

2. 用数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$;　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;