

状元笔记

教材详解

高中数学

必修 2(人教 A 版)

丛书组编：龙门书局教育研究中心

学科主编：傅荣强

本册主编：朱 岩

编 者：高玉莲 倪智慧 张 颖
傅琳雅

龍 門 書 局

北 京

策划者语

思路决定未来

“考考考，老师的法宝！

分分分，学生的命根！”

这是一句流传了很久的“校园民谣”，很真实，很形象，让你莞尔，又让你几多无奈。

有没有办法让大家轻轻松松就能考出理想的成绩？有没有可能让大家在这种环境和氛围中也能培养出素质、能力和思维？

为了解决这一课题，我们一直在探索、研究。

▣ 状元的成功规律 ▣

高考状元是考场中的高手，能不能从这些高手的经验中总结出一些规律呢？为此，几年来我们接触了几十位高考状元，追踪到一些共性。

1. 天道酬勤

很多人都会把高考状元的成功归结为聪明，事实果真如此吗？在与他们接触了很久之后，我渐渐发现：他们中有一部分人的确是绝顶聪明，但更多状元的智商并不比普通人高太多，勤奋是他们共同的特质。江苏的一位状元说自己大年三十的晚上还学习到12点；河南的一位状元说自己在病床上还坚持在看书；广东的一位状元对自己读了三年高中的县城竟然极其陌生……

这些事例再一次验证了：天道酬勤。

2. 方法决定效率

他们每个人都有一套完整科学的学习方法，而且十分有效。我曾经反复揣摩他们的这些方法，禁不住欣欣然向往之：假若我们能懂得这些方法并在实际学习中灵活运用，北大、清华等一流名校的大门就会向我们敞开着。

有思路才有方法，好方法往往事半功倍！

3. 好心态比好成绩更重要

据我观察：他们心态都很好，也很自信。心理学家们认为：心理暗示往往能让人超越自己，激发潜力，增强自信心！

■ 反思我们的学习 ■

与这些考试高手们相比较,反思一下我们成绩普通的学生,尤其是成绩中等学生的学习。近几年来,我们也总结出成绩中等学生的一些特质:

- 他们最有希望成为优等生,但往往功亏一篑!
- 他们智商都不错,但却总认为自己不够聪明。
- 他们往往也能够勤奋,但他们的勤奋很盲目,不知道自己什么地方该多下功夫去学。
- 他们试图形成自己的学习方法,但并不系统,更要命的是他们的学习方法并没有成为一种学习的习惯,很随意,很无序。
- 他们渴求全面掌握知识,但往往理解得似是而非。
- 他们的心态往往是“随大流”,缺乏必胜的信心。

.....

亲爱的同学,你有这样的问题吗?如果有,你明白自己的差距在哪里了吗?

以上这些说明你最大的问题就是:学习没有思路!

■ 好书可以改变一个人的命运! ■

在做了大量的研究之后,我们发现,学习很难轻轻松松,但是可以有高效的方法提高学习的效率。我们希望将这些研究成果融汇到本书中,帮助每一个学生高效地学习,快速地提高。

1. 没有什么比基础更重要! 第一秘诀:以教材为中心,夯实基础

曾经有位高考状元跟我说,考试中真正的难题很少,题目不会做或者做错了,多数是因为基础掌握得不够扎实。很多学生自认为自己的基础很不错,其实对知识点的掌握还是似是而非,往往“知其然不知其所以然”,并没有完全吃透知识点。

这位状元还跟我说:平时看的最多的书就是教材,每次看都会有新体会,看教材不是简单的记忆,而是深刻的理解,要把每个知识点的来龙去脉搞得清清楚楚。在考试的时候,每一道考题都可以还原成教材里的例题或者习题。

我跟很多老师探讨过这位状元所说的话,大家都深以为然,教材知识是一切知识的起点和基础。在本书的“基础知识全解”这个栏目中,我们将知识点按照重要程度采用“级”区分,每个知识点是应该“记忆”还是“理解”,存在什么样的“误区”,如何进行“延伸拓展”、“思维发散”等等都进行细致入微的讲解。目的就是帮大家尽力吃透教材,真正夯实基础。

2. 素质、能力比成绩更重要,方法、技巧是素质与能力的体现

任何知识的学习,最终要归结在素质的养成和能力的提升上。不断地机械地做题、考试是不能提升素质和能力的,最重要的是如何将知识转化成为个人的素质与能力。拥有素质与能力,就能生发解决问题的方法与技巧,也就拥有了打开一切的“金钥匙”。拥有素质与能力,也定将能考出相当理想的成绩!

在本书的“方法·技巧·能力”栏目中,我们用案例的方式,帮助你发散拓展、突破思维障碍,学会综合运用、举一反三,破解误区和陷阱,最终实现从知识向能力的转化、迁移,培养你的创造性思维和创新能力。

3. 新颖、原创、应试

兴趣是最好的老师,人类认识自然、探索自然就是从好奇、兴趣开始的。在本书的编写中,我们力求使用最新颖的素材,让大家学会运用知识理解、分析、判断社会热点问题;我们力求最大程度用新方法、新思路去做一些原创的讲解和题目,当然也要保留多年沉淀下来的经典题目;我们也力求能够将考试融汇到日常的学习中,“随风潜入夜,润物细无声”,在不知不觉中培养考取高分的素质和能力。

■ 独立之精神,自由之思想 ■

1929年,学术大师陈寅恪先生在书写纪念王国维的碑铭中提出了“独立之精神,自由之思想”,从此,独立精神和自由思想便成了中国人追求的价值取向。孟子有言曰:“尽信书则不如无书。”任何书籍都不是十全十美的,里面可能会存在一些不足之处。每一个有独立思考能力的学生在面对任何权威时都可以提出自己的见解和看法,我们欢迎大家来信讨论和赐教。

总策划:



《状元笔记·教材详解》

编委会

丛书主编:龙门书局教育研究中心

总策划:田旭

执行编委:刘娜 王涛 王美容

各学科主编:

语文:郭能全 何涛

英语:张成标 赵炳河

朱如忠 陈俊

生物:姚登江

地理:何纪延

数学:傅荣强 李新星

物理:张忠新 胡志坚

化学:朱智铭 张希顺

历史:张华中 魏明

政治:张清

编委:	崔军	陈俊	曹景国	陈建忠	陈俊亮	曹爱国	代曙光
	董玉叶	方立波	傅荣强	封秀英	樊研	高鹤	郭杰
	郭能全	高波	高玉兰	谷玉艳	郭存斌	侯翠兰	黄芳
	何纪延	郝守均	何涛	胡希	郝玉静	胡志坚	纪永华
	姬玉玲	凌春来	刘传宾	刘凌昊	李桂红	刘和水	刘红英
	陆炯	刘娟	刘江	李建全	鲁晓梅	李新星	刘岩
	李永刚	李义军	李子良	马合山	牛鑫哲	潘露	裴文
	单娟	史景辉	双金鳞	石铁明	石兴涛	涂木年	佟志军
	汤小梅	王静	王可线	魏明	王平	王学春	王亚军
	王壮	王秀敬	徐冬琴	项非	邢海燕	徐勤红	胥晓华
	夏桂芳	于长军	姚登江	杨梅	于小芹	于春芳	尤齐辉
	张成标	章端	赵方	周国强	张华中	赵炳河	赵建云
	周萍	张琪	张清	朱如忠	张硕	张升军	张书祥
	赵现标	张晓红	张希顺	翟玉明	周映平	朱岩	朱智铭
	张忠新	张美丽					

目 录

第一章 空间几何体

章前概述	1
1.1 空间几何体的结构	1
芝麻开门	1
基础知识全解	2
1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征	2
★★★多面体的结构特征	2
★★★旋转体的结构特征	9
1.1.2 简单组合体的结构特征	14
★简单组合体的基本形式	14
模糊点·易错点·障碍点	16
1. 教学理念与学习理念	16
2. 认知	17
方法·技巧·能力	18
1. 什么是立体几何	18
2. 立体几何研究的主要对象是什么	18
3. 立体几何要解决的主要问题是什么	18
4. 立体几何的学科体系如何	19
习题讲练	20
教材练习、习题解答	20
教材练习、习题变式练习	21
答案与提示	22
1.2 空间几何体的三视图和直观图	23
芝麻开门	23
基础知识全解	24
1.2.1 中心投影与平行投影	24
★投影	24
1.2.2 空间几何体的三视图	25
★★★三视图	25
1.2.3 空间几何体的直观图	28
★★★直观图	28
模糊点·易错点·障碍点	34
1. 模糊点 视线是有方向的	34
2. 易错点 图形中的角度与长度	34
3. 障碍点 虚线	35
方法·技巧·能力	35
习题讲练	40
教材练习、习题解答	40
教材练习、习题变式练习	46
答案与提示	47
1.3 空间几何体的表面积与体积	49

芝麻开门	49
基础知识全解	49
1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积	49
★★★柱体、锥体与台体的表面积	49
★★★柱体、锥体与台体的体积	52
1.3.2 球的体积和表面积	56
★★★公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 与 $S = 4\pi R^2$	56
模糊点·易错点·障碍点	58
方法·技巧·能力	60
1. 思维发散点 长方体与球组合	60
2. 方法技巧点 作截面解题	61
3. 综合能力点 分离,割补,转换,切接	63
4. 探究能力点 几何体中的函数关系	66
5. 思想方法点 对图形分类	67
习题讲练	68
教材练习、习题解答	68
教材练习、习题变式练习	72
答案与提示	73
本章知识能力整合	74
知识结构图	74
难点·综合·易错点	75
方法·技巧·能力	76
三年高考两年模拟名题赏析	78
教材复习参考题解答	80

第二章 点、直线、平面之间的关系

章前概述	87
2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系	87
芝麻开门	87
基础知识全解	87
2.1.1 平面	87
★★★平面和它的基本性质	87
2.1.2 空间中直线与直线的位置关系	92
★★★空间两条直线	92
2.1.3 空间中直线与平面之间的位置关系	97
★★★直线与平面的位置关系	97

2.1.4 平面与平面之间的位置关系	99	★★★平面与平面垂直的性质定理	146
★★★空间两个平面	99	模糊点·易错点·障碍点	149
模糊点·易错点·障碍点	100	方法·技巧·能力	151
方法·技巧·能力	101	习题讲练	155
习题讲练	104	教材练习、习题解答	155
教材练习、习题解答	104	教材练习、习题变式练习	160
教材练习、习题变式练习	107	答案与提示	160
答案与提示	108	本章知识能力整合	162
2.2 直线、平面平行的判定及其性质	109	知识结构图	162
芝麻开门	109	难点·综合·易错点	163
基础知识全解	110	方法·技巧·能力	167
2.2.1 直线与平面平行的判定	110	1. 把握学科体系	167
★★★直线与平面平行的判定定理	110	2. 书越读越薄	167
2.2.2 平面与平面平行的判定	112	3. 温故知新	168
★★★平面与平面平行的判定定理	112	4. 精通的目的在于应用	168
2.2.3 直线与平面平行的性质	114	三年高考两年模拟名题赏析	176
★★★直线与平面平行的性质定理	114	教材复习参考题解答	180
2.2.4 平面与平面平行的性质	116		
★★★平面与平面平行的性质定理	116	第三章 直线与方程	
模糊点·易错点·障碍点	118	章前概述	184
方法·技巧·能力	119	3.1 直线的倾斜角与斜率	184
习题讲练	123	芝麻开门	184
教材练习、习题解答	123	基础知识全解	184
教材练习、习题变式练习	127	3.1.1 倾斜角与斜率	184
答案与提示	128	★★★倾斜角的定义与斜率公式	184
2.3 直线、平面垂直的判定及其性质	130	3.1.2 两条直线平行与垂直的判定	189
芝麻开门	130	★★★用斜率描述两条直线平行与垂直	189
基础知识全解	130	模糊点·易错点·障碍点	192
2.3.1 直线与平面垂直的判定	130	1. 模糊点 直线平行于 x 轴与直线垂直于 y 轴是有区别的	192
★★★直线与平面垂直	130	2. 易错点 漏解或增解	193
★★★直线和平面所成的角	134	3. 障碍点 对直线的分类切入点是它有无斜率	193
2.3.2 平面与平面垂直的判定	137	方法·技巧·能力	194
★★★二面角	137	习题讲练	195
★★★平面与平面垂直的判定	142	教材练习、习题解答	195
2.3.3 直线与平面垂直的性质	145	教材练习、习题变式练习	200
★★★直线与平面垂直的性质定理	145	答案与提示	200
2.3.4 平面与平面垂直的性质	146	3.2 直线的方程	202
		芝麻开门	202
		基础知识全解	202
		3.2.1 直线的点斜式方程	202
		★★★点斜式与斜截式	202
		3.2.2 直线的两点式方程	206
		★★★两点式与截距式	206
		3.2.3 直线的一般式方程	207

★★★一般式	207
模糊点·易错点·障碍点	213
1. 模糊点 直线方程与一次函数的差异	213
2. 易错点 由 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 引起的 丢解	214
3. 障碍点 对 $Ax+By+C=0$ 分类要 从 $B=0$ 与 $B\neq 0$ 切入	214
方法·技巧·能力	217
1. 思维发散点 从方程中认识两点确 定一条直线	217
2. 方法技巧点 直线系	218
3. 综合能力点 斜率与函数	219
4. 探究能力点 查找动直线上的定点	220
5. 思想方法点 方程的直线	221
习题讲练	224
教材练习、习题解答	224
教材练习、习题变式练习	230
答案与提示	231
3.3 直线的交点坐标与距离公式	233
芝麻开门	233
基础知识全解	233
3.3.1 两条直线的交点坐标	233
★★★通过方程组确定两条直线的 位置关系	233
3.3.2 两点间的距离	236
★★★两点间的距离公式	236
3.3.3 点到直线的距离	239
★★★点到直线的距离公式	239
3.3.4 两条平行直线之间的距离	243
★★★两条平行直线间的距离公式	243
模糊点·易错点·障碍点	245
1. 模糊点 公式 $d=\frac{ C_1-C_2 }{\sqrt{A^2+B^2}}$ 中 C_1 、 C_2 的确定	245
2. 易错点 漏解	246
3. 障碍点 探索性问题	246
方法·技巧·能力	248
习题讲练	249
教材练习、习题解答	249
教材练习、习题变式练习	255
答案与提示	256
本章知识能力整合	258
知识结构图	258
难点·综合·易错点	258
1. 对称问题	258

2. 最大(小)值问题	260
方法·技巧·能力	264
三年高考两年模拟名题赏析	267
教材复习参考题解答	269

第四章 圆与方程

章前概述	275
4.1 圆的方程	275
芝麻开门	275
基础知识全解	275
4.1.1 圆的标准方程	275
★★★ $(x+a)^2+(y-b)^2=r^2$	275
4.1.2 圆的一般方程	279
★★★ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	279
模糊点·易错点·障碍点	284
方法·技巧·能力	286
习题讲练	289
教材练习、习题解答	289
教材练习、习题变式练习	295
答案与提示	295
4.2 直线、圆的位置关系	296
芝麻开门	296
基础知识全解	296
4.2.1 直线与圆的位置关系	296
★★★直线与圆的位置关系的几何特 征与代数特征	296
4.2.2 圆与圆的位置关系	301
★★★圆与圆的位置关系的几何特征 与代数特征	301
4.2.3 直线与圆的方程的应用	303
★★★建系、列式、求解、作答的解题模式	303
模糊点·易错点·障碍点	307
1. 模糊点 截距可以为零	307
2. 易错点 漏解 $x=x_0$	307
3. 障碍点 半圆与函数	308
方法·技巧·能力	309
1. 思维发散点 转化	309
2. 方法技巧点 两圆的公切线	310
3. 综合能力点 曲线与方程	312
4. 探究能力点 弦长公式	313
5. 思想方法点 方程的几何背景	314
习题讲练	315
教材练习、习题解答	315
教材练习、习题变式练习	323
答案与提示	323
4.3 空间直角坐标系	325
芝麻开门	325

基础知识全解	326	教材练习、习题解答	337
4.3.1 空间直角坐标系	326	教材练习、习题变式练习	339
★★★用坐标表示点	326	答案与提示	340
4.3.2 空间两点间的距离公式 ...	329	本章知识能力整合	341
★★★ $ P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$	329	知识结构图	341
模糊点·易错点·障碍点	333	难点·综合·易错点	341
方法·技巧·能力	334	方法·技巧·能力	343
习题讲练	337	三年高考两年模拟名题赏析	349
		教材复习参考题解答	352

第一章 空间几何体

◆◆◆ 章前概述 ◆◆◆

我们的身边存在着数以万计的物体.

人类一时一刻都离不开物体,小至我们日常的生产与生活用品,大到古时的万里长城、今天的神舟宇宙飞船.

物体,它服务于人类,人类就要探究它.本章我们将从三个方面来研究物体:第一,讨论形状规则且又为我们所经常使用的物体的结构;第二,建立物体与图形的对应关系;第三,量化物体的大小.

◆◆◆ 1.1 空间几何体的结构 ◆◆◆

芝麻开门

图 1-1 是实物图,在日常生活中,你见到过这些实物吗?

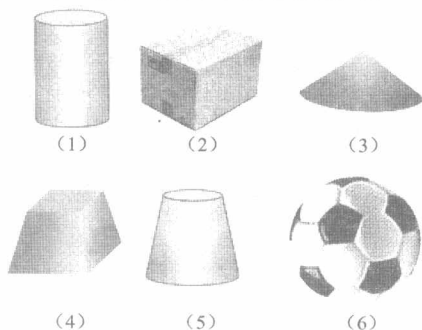


图 1-1

图中所示的物体,其最大特点就是形状规则.

图 1-2 也是实物图,图(1)所示的物体是一个形状规则的物体被截去一部分后的剩余部分,图(2)所示的物体由两个物体组合而成.

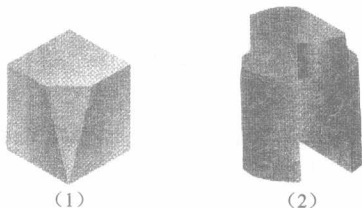


图 1-2

现实世界中的物体,绝大部分都是组合体.
对物体的探究,要从规则的几何体入手.

基础知识全解

1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征

★★★知识点一 多面体的结构特征

[了解] 观察图1-3,图(1)、(2)、(3)所示的几何体都是由平面多边形(包括它们内部的平面部分)围成的,像这样的几何体,我们称它们是多面体.其中,各个多边形叫做多面体的面,相邻两个面的公共边叫做多面体的棱,棱与棱的公共点叫做多面体的顶点.

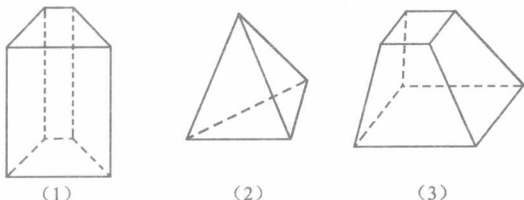


图 1-3

[掌握] (1)棱柱的结构特征

如图1-4,一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱.棱柱中,两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底;其余各面叫做棱柱的侧面,底面、侧面都可称为棱柱的面;两个面的公共边叫做棱柱的棱,其中相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱;侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点.底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱柱.如图(1)表示的棱柱可表示为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,图(2)表示的棱柱可表示为六棱柱 $A'B'C'D'E'F'-ABCDEF$.

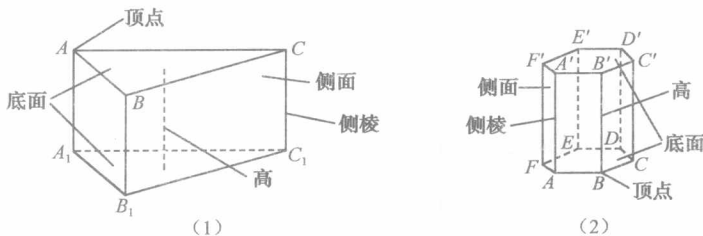


图 1-4

要注意,我们这里所讲的棱柱的结构特征是感性认识,而不是理性认识.例如,“有两个面互相平行”,对此我们只是把它承认下来,并没有对“两个平面互相平行”加以定义,这其中的道理就好比承认天棚和地面是平行的是一样的.既然如此,我们还应该承认像“电线杆与地面垂直”、“站立的人视为直线,地面视为平面,这条直线和这个平面垂直”等这样的事实,由此我们就可以描述棱柱的高,即与两个底面都垂直的直线夹在两个底面之间的线段的长叫做棱柱的高.

承认了直线和平面的垂直确实是现实存在的以后,我们就可以描述直棱柱和正棱柱了,这种描述仍处在感性认识阶段.

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱;侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱,其中,底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱.

根据以上探究,我们可以得出“棱柱的侧面都是平行四边形”、“直棱柱的侧棱长与高相等”等这样的一些结论.

(2) 棱锥的结构特征

[掌握] 如图 1-5,有一个面是多边形,其余各面是有一个公共顶点的三角形,这些面围成的几何体叫做棱锥. 这个多边形叫做棱锥的底面,其余各面叫做棱锥的侧面,相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱,各侧面的公共点叫做棱锥的顶点,过顶点作底面的垂线,顶点与垂足间的线段的长叫做棱锥的高.

如果棱锥的底面是正多边形,且各侧面全等,就称它为正棱锥. 正棱锥的侧面是全等的等腰三角形,它的底边上的高叫做正棱锥的斜高.

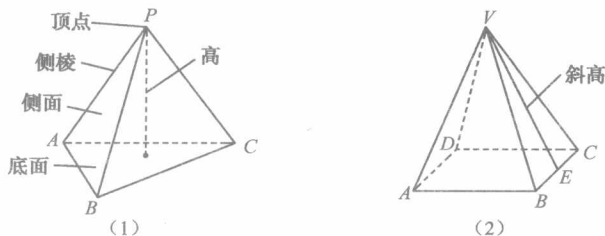


图 1-5

棱锥形状的物体很多,例如:金字塔,打桩用的水泥柱……

棱锥可用表示顶点的字母和表示底面的字母来表示. 如,图(1)所示的棱锥可表示为三棱锥 $P-ABC$,图(2)所示的棱锥可表示为四棱锥 $V-ABCD$,如果它还是正棱锥,它还可以表示为正四棱锥 $V-ABCD$.

(3) 棱台的结构特征

[掌握] 如图 1-6,用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面与截面之间的部分叫做棱台. 原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面,其他各面叫做棱台的侧面,相邻侧面的公共边叫做棱台的侧棱,与两个底面都垂直的直线夹在两底面间的线段的长叫做棱台的高.

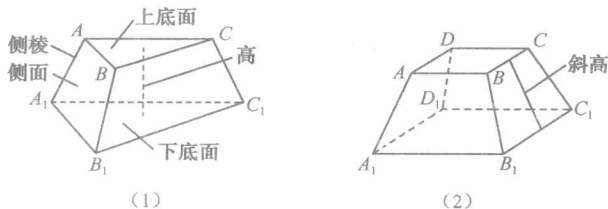


图 1-6

用正棱锥截得的棱台叫做正棱台. 正棱台的侧面是全等的等腰梯形, 它的高叫做正棱台的斜高.

类似于棱柱、棱锥, 棱台也有三棱台、四棱台等.

图 1-6 中的棱台可分别表示为三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$, 四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

【例 1】(原创题) 解答下列各题:

(1) 在图 1-7 所示的几何体中, 图(1)、图(2)、图(3)和图(4)所示的分别是多面体、棱柱、棱锥和棱台.

①写出图(1)中多面体的面、棱和顶点;

②写出图(2)中棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面、侧面和侧棱;

③在图(3)所示的棱锥 $V-ABC$ 中, 写出 V 的名称, 再写出 A 、 B 、 C 的名称;

④根据图(4)引出的直线, 指出直线 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 所指几何对象的名称.

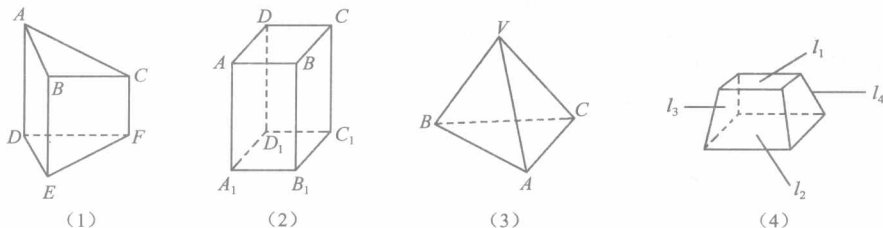


图 1-7

(2) 图 1-8 中, 图(1)所示的是直棱柱, 图(2)所示的是正四棱锥, 图(3)所示的是正三棱台.

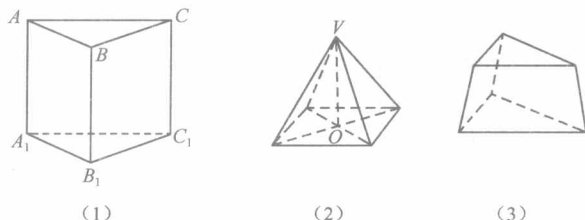


图 1-8

①图(1)中, 侧面 ABB_1A_1 是矩形吗? CC_1 可以作为棱柱的高吗?

②图(2)中, VO 是棱锥的高吗?

③怎样确定图(3)中棱台的高?

思路分析 据多面体的定义以及棱柱、棱锥、棱台的结构特征作答.

规范解答 (1) ①面: 三角形 ABC , 三角形 DEF , 四边形 $ACFD$, 四边形 $BCFE$, 四边形 $ABED$.

棱: $AB, AC, BC, DE, DF, EF, AD, BE, CF$.

顶点: A, B, C, D, E, F .

②底面: 底面包括上底面 $ABCD$ 和下底面 $A_1B_1C_1D_1$.

侧面: 四边形 ABB_1A_1 , 四边形 ADD_1A_1 , 四边形 CDD_1C_1 , 四边形 BCC_1B_1 .

侧棱: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 .

③ V :三棱锥 $V-ABC$ 的顶点; A 、 B 、 C 都是棱锥的底面的顶点.

④ l_1 :指上底面, l_2 :指下底面, l_3 :指一个侧面, l_4 :指一条侧棱.

(2)①侧面 ABB_1A_1 是矩形; CC_1 可以作为棱柱的高.

②是.

③上下底面中心的连线段的长度就是棱台的高.

方法规律

安排本例,意在认识几何体,尤其是几何体中各个几何对象的名称以及怎样找几何体的高.回答这类问题的最好办法就是读懂、读熟几何体的结构特征.

变式 1: 解答下列各题:

(1)棱柱、棱锥、棱台至少有几个面、几条棱?

(2)判断下列描述正确与否?

①有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的几何体是棱柱;

②四棱锥的四个侧面可能都是直角三角形;

③棱台的侧棱延长后不一定相交.

规范解答: (1)棱柱至少有 5 个面, 2 个底面、3 个侧面, 9 条棱; 棱锥至少有 4 个面, 1 个底面、3 个侧面, 6 条棱; 棱台至少有 5 个面, 2 个底面、3 个侧面, 9 条棱.

(2)①不正确.

如图 1-9(1), 图中面 ABC 与面 $A_1B_1C_1$ 平行, 其余各面都是平行四边形, 但它不是棱柱.

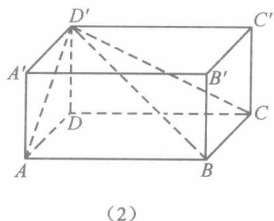
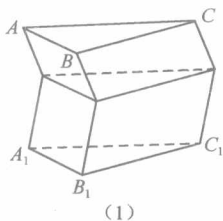


图 1-9

②正确.

如图 1-9(2), 嵌入在长方体 $A'B'C'D'-ABCD$ 中的四棱锥 $D'-ABCD$ 的四个侧面都是直角三角形.

③不正确.

棱台由棱锥截来, 侧棱延长后一定相交.

拓展提升

我们现在的学习处在感性学习阶段, 有些关系从理论层面上并没有被承认, 但从生活常识角度把它承认下来也没什么不好的. 例如, 图(2)中, 三角形 BAD' 、三角形 BCD' 都是直角三角形, 它源于我们先承认了 BA 与侧面 $ADD'A'$ 垂直、 BC 与侧面 $CDD'C'$ 垂直, 其道理就像人站立在地面上人与地面垂直一样, 只不过是方向上略有差异.

掌握几何体的“家底”是一件好事,即一个几何体有多少个面、多少条棱、多少个顶点等,都是我们应该了解的.时间长了,你还要掌握几何体中各几何元素的相互关系,例如,图(2)中, $A'D' \parallel BC$, $AA' \perp A'D'$,等等,只有这样你才能更进一步地去了解、掌握、使用几何体.

变式2:解答下列各题:

(1)三棱锥的四个面有可能都是直角三角形,对吗?

(2)请你给出一个找四棱台的高的思路.

规范解答:(1)对.

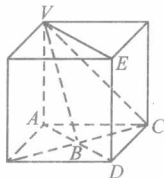
如图1-10(1),嵌入在正方体中的三棱锥 $V-ABC$ 的四个面都是直角三角形.

道理如下:

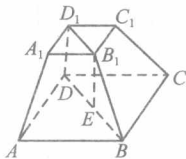
正方形的对角线互相垂直, $AD \perp BC$, $\triangle ABC$ 是直角三角形.

VA 与下底面垂直, $VA \perp AB$, $VA \perp AC$, $\triangle VAB$ 、 $\triangle VAC$ 都是直角三角形.

CB 与截面 $VADE$ 垂直, $CB \perp VB$, $\triangle VBC$ 是直角三角形.



(1)



(2)

图 1-10

(2)如图1-10(2),在四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中,连结 B_1D_1 、 BD .

四边形 B_1BDD_1 是平面四边形,在四边形 B_1BDD_1 中,作 $B_1E \perp BD$ 于 E , B_1E 就是这个四棱台的高.

拓展提升

第(1)小题中, $\triangle VBC$ 是直角三角形不太好理解,这由我们目前欠缺空间想象能力所致.第(2)小题中,四边形 B_1BDD_1 是平面四边形,是指这个四边形和平面几何中学习的四边形是一样的.

现行教材对立体几何的安排是先进行感性教育再进行理性教育.在感性教育期间,先承认一些垂直、平行关系,还有一些成角关系,大部分是借助实物、生活常识来完成的.既然如此,我们当前的任务就应该是在几何体中讨论几何对象的相互关系,等基础打牢了,再转至理性教学阶段.

变式3:设 A_2 、 B_2 、 C_2 分别是三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 的中点,求证: $\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2$. 再设 A_3 、 B_3 、 C_3 分别是 AA_1 、 BB_1 、 CC_1 的四等分点,分别靠近点 A 、 B 、 C , $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_3B_3C_3$ 全等吗? 再作与 $\triangle A_2B_2C_2$ 、 $\triangle A_3B_3C_3$ 类似的三角形若干个,结论又会如何呢? 所有的这些三角形面它们之间相互平行吗?

规范解答:如图1-11(1),在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1B_1B 是平行四边形.

因为 A_2 、 B_2 分别是侧棱 AA_1 、 BB_1 的中点,

所以

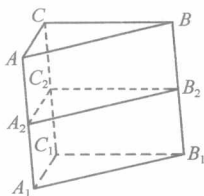
$$A_2B_2 = AB.$$

同理

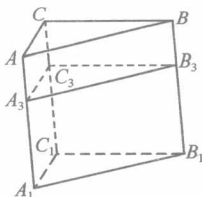
$$B_2C_2 = BC, A_2C_2 = AC.$$

所以

$$\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2.$$



(1)



(2)

图 1-11

如图 1-11(2), 仿上可知, $\triangle ABC$ 、 $\triangle A_3B_3C_3$ 的三边对应相等,

所以 $\triangle ABC \cong \triangle A_3B_3C_3$.

再作与 $\triangle A_2B_2C_2$ 、 $\triangle A_3B_3C_3$ 类似的三角形若干个, 即 $\triangle A_iB_iC_i$, $i=4, 5, \dots$, 结论是 $\triangle ABC \cong \triangle A_iB_iC_i$, $i=4, 5, \dots$. 所有的这些三角形面它们之间是相互平行的.

拓展提升

安排本题, 旨在达到两个目的:

第一, 多边形的全等, 初中阶段是在同一个平面内讨论的. 本例中, $\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2$, 是在两个平面内讨论的, 理由是三边对应相等. 设想, 把一块三角板向空中抛出, 三角板在空中可以有无数个形式, 任一时刻这块三角板的形状都不会有变化, 它和原三角板总是全等的, 这表明平面几何中的全等理论可以推广至空间.

第二, 本题告诉我们, 棱柱的两个底面与平行于它们的截面是全等的多边形.

变式 4: 如图 1-12, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 称截面 AA_1C_1C 为这个四棱柱的对角面.

(1) 求证: 对角面 AA_1C_1C 是平行四边形;

(2) 从感性认识出发, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直棱柱时, 各个侧面以及截面 AA_1C_1C 是怎样的四边形?

规范解答: (1) 棱柱的侧面都是平行四边形,

所以 $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \parallel CC_1$,

所以 $AA_1 \parallel CC_1$,

所以, 截面 AA_1C_1C 是平行四边形.

(2) 从感性认识出发, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直棱柱时, 侧棱与底面垂直, 各个侧面以及截面 AA_1C_1C 都是矩形.

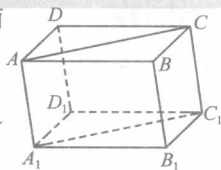


图 1-12

拓展提升

安排本题, 意在解释两个问题, 接受一个理念.

问题 1, 在棱柱中, 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形.

问题 2, 直棱柱的侧面都是矩形, 过不相邻的两条侧棱的截面也是矩形.

现行教科书对空间几何体的处理是从感性认识切入的, 所以, 每一位学习者就没有必要去追究一些结论的源头, 这儿有没有先前的知识作为理论基础, 那儿有没有定义、公理、定理作保证, 这些都不是我们关心的问题, 我们先把有关的概念承认下来, 使用一段时间, 经过感性认识过程, 慢慢地再把它们提升到理性认识的高度, 这样才能够适应现行教科书要完成的教学理念. 如果总是这儿也不行那儿也不妥, 那么老师就教不下去了, 学生也学不下去了.

变式5: 在正三棱锥 $A-BCD$ 中, 各侧面都是直角三角形, $AB=1$.

(1) 在侧面 ABC 内画表示这个正三棱锥的斜高的线段, 并求斜高;

(2) 求底面 BCD 的面积.

规范解答: (1) 如图 1-13. 正棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形, 正三棱锥 $A-BCD$ 的各侧面都是直角三角形,

所以, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC=90^\circ$.

取棱 BC 的中点 E , 连结 AE , AE 就是侧面 ABC 内表示这个正三棱锥的斜高的线段.

$AB=1, AC=AB=1, \angle BAC=90^\circ$,

所以 $AE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即正三棱锥 $A-BCD$ 的斜高是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 连结 DE .

在等边 $\triangle BCD$ 中, E 是 BC 的中点, $BC=\sqrt{2}$,

所以, $\triangle BCD$ 的面积是

$$\frac{1}{2}BC \cdot DE = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

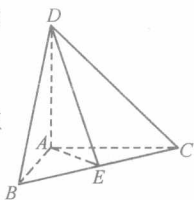


图 1-13

拓展提升

本题给了我们一个启示, 那就是画空间中的两两互相垂直的三条直线, 最直观的实物就是墙角, 最好的模型就是长方体的一个“角”, 即从一个顶点出发的三条棱. 学习立体几何, 过空间想象能力这一关是必由之路, 这种能力的培养和形成离不开画图, 每一个初学立体几何的人都要在此下一点功夫, 逐步地积累经验, 功到自然成.

在本变式题中, 正三棱锥的各侧面都是直角三角形, 最直观的实物就是墙角, 仿此画出来的图形效果最佳. 我们就是这样做的, 这是明智之举. 不过要注意, 图中三棱锥的顶点并没有画在上端, 而是画在了下端, 这取决于观望者的角度, 不是本质上的要求. 从多个角度能看懂实物、看懂图形, 这还真是一种能力, 既值得借鉴更值得提倡.

变式6: 三棱锥又可称为四面体. 在四面体中, 所有的棱长都相等时, 又可称它为正四面体. 在正四面体 $ABCD$ 中, E 是棱 BC 的中点, $AB=a$, 求截面 ADE 的面积.

规范解答: 如图 1-14, 在正四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle DBC$ 也是正三角形, 且 $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

E 是 BC 的中点, $AB=a$,

所以 $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\triangle ADE$ 是等腰三角形, $AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}a, AD=a$,

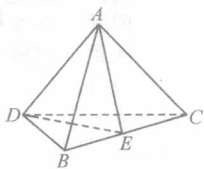


图 1-14