

聚 焦 考 研

经济类

2005 版

主 编 | 陈文灯/黄先开
曹显兵

编 用正版书 赠 增值卡

基础加题型

——考研数学成功的保证

严格遵循考试大纲，精辟阐释解题思路，全面展现题型变换，将浩渺的习题浓缩于有限的“题型”之中，迅速拨高考生快速、准确、灵活的解题能力。

题型集粹与练习题集

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

数 学

MATHS
NETEM

W 世界图书出版公司



有此防伪标志皆为正版



聚 焦 考 研



经济类

2005 版

主 编 | 陈文灯 / 黄先开
曹显兵

编 用正版书 赠 增值卡

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

题型集粹与练习题集

数 学

NETEM
MATHS

世界图书出版公司

北京 · 广州 · 上海 · 西安

85088152-010 : 服务热线



FOCUS
聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 经济类 / 陈文灯, 黄先开, 曹显兵编著. —7 版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2003

ISBN 7-5062-5210-4

I. 数... II. ①陈...②黄...③曹... III. 高等数学-研究生-入学考试-习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 014884 号

数学题型集粹与练习题集(经济类) (2005 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵

责任编辑: 武海燕

封面设计: 京 A 企划

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 62116800 邮编 100010)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 26.375

字 数: 499 千字

版 次: 2004 年 2 月第 7 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5210-4/O · 335

定价: 38.80 元

服务热线: 010 - 62198078

第七版最新修订说明

《数学题型集粹与练习题集》(经济类)作为《数学复习指南》(经济类)的续篇,自第一版问世已经第七个年头了。纵观七年,这两本书全面覆盖了考研数学经济类试题中的各类题型。2004年考研数学试题中的题型无一出其右者。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

◆ 2005版《数学题型集粹与练习题集》(经济类)主要改动如下:

- ① 根据新的考研数学中数学三和数学四的大纲要求,将数学四不作要求内容用“*”号进行标注,使考生复习时更加有的放矢。
- ② 根据新大纲要求,分别对模拟题中主客观题的比例进行了调整,选择题与填空题的比例由过去的30%增加到40%,解答题(包括证明题)的比例由过去的70%减少到60%。增加了两道选择题,减少了一个解答题。
- ③ 考研结束后第一时间内在附录中增加了2004年数学三、四试题与参考答案。
- ④ 将文字和内容进行了逐字校对,追求无差错率出版。
- ⑤ 对版式进行了重新调整,层次感更强,更加有利于读者学习。
- ⑥ 赠送网络名师答疑,并在2004年11月赠送模拟冲刺题一套,具体内容详见封三。

◆ 本书主要特色如下:

- ① 重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所给的思路、方法去分析将会迎刃而解。
- ② 针对性强,覆盖面大。本书不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。
- ③ 超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题系作者多年的教学心得、呕心沥血之所成。读者通过做这些例题不仅可以各知识点串在一起,而且可以拓宽思路,遇到“从未见到”的题时,可以从容应对。

另外,本书编写的模拟试题,请读者复习完本书后,严格掌握在3小时内独立做完试卷,及时查缺补漏。

书后附录还给出2003年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学三、数学四试题及参考答案。

成书仓促,定有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

目 录

第一篇 微 积 分

第一章 函数·极限·连续 1

一、函数 1

1. 有关函数概念的题型 1

题型 I 判别函数的等价性 1

题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示
无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式 1

2. 函数的性质 2

题型 I 函数奇偶性的判别 2

题型 II 求解给定函数的周期或周期性证明 3

题型 III 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的
判别 4

题型 IV 函数有界性的判别 4

3. 复合函数 5

二、极限 6

1. 数列的极限 6

题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表
达式,求数列的极限 6

题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限 8

题型 III 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限 10

题型 IV 通项为积分形式的数列的极限 10

题型 V 利用子序列的极限与函数的极限
等值定理,求数列极限 11

2. 函数的极限 12

题型 I $\frac{0}{0}$ 型未定式的定值法 12

题型 II $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的定值法 14

题型 III $\infty - \infty$ 型未定式的定值法 15

题型 IV $0 \cdot \infty$ 型未定式的定值法 16

题型 V $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的定值法 17

3. 无穷小的阶及极限式中常数值确定 18

题型 I 确定无穷小的阶 18

题型 II 极限式中常数值的确定 19

三、函数的连续性 21

题型 I 函数连续性的讨论(重点) 21

题型 II 确定函数的间断点及其类型 22

题型 III 分段函数式中参数的确定(重点) 24

第二章 导数与微分 26

题型 I 利用导数定义求极限 26

题型 II 利用导数定义求函数在某点处的
导数 27

题型 III 利用导数定义解函数方程 29

题型 IV 求复合函数的导数 30

题型 V 隐函数微分法 32

题型 VI 分段函数的导数的求法(重点) 33

题型 VII 高阶导数的求法 35

题型 VIII 综合题 36

第三章 不定积分 38

题型 I 第一换元积分法(凑微分法) 38

题型 II 第二换元积分法 42

题型 III 分部积分法 43

题型 IV 综合题 46

第四章 定积分 48

题型 I 利用定积分定义和性质求解的题型 48

题型 II 利用变上限积分的可微性求解的
题型 51

题型 III 被积函数含有绝对值符号的定积分
的计算 54

题型 IV 利用奇偶函数与周期函数的性质简
化定积分计算 55

题型 V 由三角有理式与其他初等函数通过
四则运算或复合而成的被积函数的

积分	56
题型 VI 被积函数中含“变上限积分”的积分	57
题型 VII 被积函数的分母为两项,而分子为分母中其中一项的积分	57
题型 VIII 定积分等式的证明技巧	58
题型 IX 定积分不等式的证明技巧	62
题型 X 定积分的杂例	66
题型 XI 广义积分的计算	67

第五章 中值定理

题型 I 有关闭区间上连续函数的命题的证明	70
题型 II 欲证结论为 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题的证法	71
题型 III 欲证结论为 $f^{(n)}(\xi) = k$ ($k \neq 0$), 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式的证法	72
题型 IV 欲证结论为 (a, b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	75

第六章 一元微积分的应用

一、导数的应用

题型 I 利用导数判别函数单调增减性的方法证明不等式	77
题型 II 求函数的极值与最值	78
题型 III 关于方程根的研究	81
题型 IV 综合题	84
题型 V 函数图形在区间 I 上凹凸性的判别	86
题型 VI 渐近线类型: (1) 水平渐近线; (2) 铅直渐近线; (3) 斜渐近线	86

二、定积分的应用

题型 I 微元法及其应用	87
题型 II 平面图形面积的求法	88
题型 III 求立体体积	89

第七章 多元函数微分学

题型 I 抽象的复合函数的偏导数的求法	91
题型 II 多元微分学的有关证明题	93
题型 III 多元函数的极值	94
题型 IV 综合题	95

第八章 重积分

题型 I 关于二重积分概念及其性质的命题	98
题型 II 更换积分次序	100
题型 III 选择积分次序	101
题型 IV 选择坐标系	101
题型 V * 分段函数的积分	102
题型 VI 涉及二次累次积分不等式的证明	104
题型 VII 综合题	105

第九章 * 无穷级数

题型 I 有关级数概念及性质的命题	107
题型 II 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$) 的判敛	108
题型 III 任意项级数的判敛	109
题型 IV 有关数项级数的命题的证明	111
题型 V 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域、收敛半径 R	113
题型 VI 求函数的幂级数展开式	114
题型 VII 级数求和	117

第十章 * 常微分方程

题型 I 可求解的一阶微分方程	120
题型 II 可降阶的高阶微分方程的解法	124
题型 III 高阶常系数线性微分方程的解法	126

第二篇 线性代数

第一章 行列式

题型 I 利用行列式的定义计算行列式	130
题型 II 利用行列式的性质与按行(列)展开定理计算行列式	131
题型 III 按行(列)展开公式求代数余子式	133
题型 IV 利用多项式分解因式计算行列式	134
题型 V 抽象行列式的计算或证明	135
题型 VI 利用特征值计算行列式	136
题型 VII n 阶行列式的计算	136
题型 VIII 利用克莱姆法则解方程组	139

第二章 矩阵

题型 I 计算逆矩阵	140
------------------	-----

题型 II	已知含有矩阵 A 的等式, 讨论矩阵 A 的可逆性	142
题型 III	求解矩阵方程	143
题型 IV	利用矩阵结合律简化计算	144
题型 V	利用伴随矩阵 A^* 进行计算或证明	146
第三章 向量		148
题型 I	判定向量组的线性相关性	148
题型 II	已知一组向量线性无关, 讨论另一组向量的线性相关性	151
题型 III	把一个向量用一组向量线性表示	153
题型 IV	求向量组的极大无关组	156
题型 V	求向量组与矩阵的秩	159
题型 VI	有关矩阵秩的证法	163
第四章 线性方程组		164
题型 I	含有参数的线性方程组的求解	164
题型 II	利用方程组求向量的线性组合	168
题型 III	抽象线性方程组的求解	169
题型 IV	求两个方程组的公共解	170
题型 V	已知方程组的解, 反求系数矩阵或系数矩阵中的参数	172
题型 VI	有关基础解系的证明	174
第五章 特征值与特征向量		176
题型 I	数值型矩阵特征值、特征向量的计算	176
题型 II	计算抽象矩阵的特征值	178
题型 III	求解特征值、特征向量的逆问题	181
题型 IV	矩阵相似与对角化的讨论	183
题型 V	特征值、特征向量与相似矩阵的应用问题	188
第六章 * 二次型		192
题型 I	化二次型为标准形	192
题型 II	已知二次型通过正交变换化为标准形, 反求二次型中的参数	194
题型 III	有关正定二次型(正定矩阵)命题的证明	194

第三篇 概率论与数理统计初步

第一章	事件的概率	197
题型 I	利用古典概型与加法定理计算 概率	197
题型 II	利用条件概率与乘法公式计算 概率	198
题型 III	利用全概公式和逆概公式(贝叶 斯公式) 计算概率	201
题型 IV	单项选择题	203
第二章	随机变量及其分布	204
题型 I	一维随机变量的分布函数及分布 密度	204
题型 II	二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及 其密度	209
题型 III	一维随机变量函数 $Y=g(X)$ 分布律 (分布密度)的求法	211
题型 IV	二维随机变量 (X,Y) 函数 $g(X,Y)$ 的分布律(分布密度)的求法	212
第三章	随机变量的数字特征	216
题型 I	一维随机变量的数字特征	216
题型 II	一维随机变量函数的数字特征	219
题型 III	求二维随机变量的数字特征	221
题型 IV *	二维随机变量 (X,Y) 函数 $Z=g(X,Y)$ 的数字特征	223
题型 V	多维随机变量数字特征的求解技巧 (0-1)分布分解法简介	224
题型 VI	有关证明题	227
第四章	大数定律和中心极限定理	228
题型 I	估算随机事件的概率	228
题型 II	试验次数 n 的确定	231
题型 III	证明题	232
第五章 *	数理统计初步	234
题型 I	样本容量 n , 样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的求法	234

题型 II	求抽样分布	237
题型 III	统计量的点估计 $\begin{cases} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{cases}$	239
题型 IV	正态总体均值与方差的区间估计	241
题型 V	估计量的评选标准	243
题型 VI	一个正态总体均值的假设检验	245
题型 VII	一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检验	247
题型 VIII	两个正态总体均值的检验	248
篇后篇	单项选择题的解题技巧	251
数学三	模拟试题(一)及参考答案	261
数学三	模拟试题(二)及参考答案	270
数学三	模拟试题(三)及参考答案	278
数学三	模拟试题(四)及参考答案	285
数学三	模拟试题(五)及参考答案	294
数学三	模拟试题(六)及参考答案	300

数学三	模拟试题(七)及参考答案	308
数学三	模拟试题(八)及参考答案	315
数学四	模拟试题(一)及参考答案	322
数学四	模拟试题(二)及参考答案	329
数学四	模拟试题(三)及参考答案	337
数学四	模拟试题(四)及参考答案	344
数学四	模拟试题(五)及参考答案	350
数学四	模拟试题(六)及参考答案	357
数学四	模拟试题(七)及参考答案	363
数学四	模拟试题(八)及参考答案	371

附录 1

2003 年硕士研究生入学考试数学试题	
三、四及参考答案	379

附录 2

2004 年硕士研究生入学考试数学试题	
三、四及参考答案	392

注:带 * 章节,数四考生不必看。

第一篇 微 积 分

第一章 函数 · 极限 · 连续

一、函数

1. 有关函数概念的题型

题型 I 判别函数的等价性

【例 1.1】设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则与 $f(x)$ 等价的函数是

$$(A) y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx.$$

$$(B) y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt.$$

$$(C) y = \int f'(x) dx.$$

$$(D) y = e^{\ln(x^2 - 2x)}.$$

【解】设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$, 则 $f(x) = x^2 + 2xl$,

两边取 $x \rightarrow 1$ 时的极限, 得 $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$.

(A) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

$$(B) y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt = x^2 - 2x.$$

(C) $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$, 定义域 $x < 0$ 或 $x > 2$, 与 $f(x)$ 定义域不同, 故 (B) 入选, 实际做题时不必像以上那样处理, 求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出 (B) 入选.

题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

解题提示

一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达式形式, 然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”, 然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式. 多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式:

$$(1) f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 1 + \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2, \quad |x| > 1.$$

$$(2) f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, \quad 0 < x < 1.$$

【解】(1) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} + \sin\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + 2,$

$$\text{故 } f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2, \quad |x| > 2$$

$$(2) f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = -2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x},$$

$$\text{故 } f(x) = -2x + \frac{1}{1 - x}, \quad 0 < x < \sin^2 1.$$

【例 1.3】设 $f(x)$ 满足方程: $af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$.

【解】令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$, 于是原方程变为 $bf(t) + af(-\frac{1}{t}) = -\sin \frac{1}{t}$,

由“无关特性”得 $bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x}$.

$$\text{解联立方程组 } \begin{cases} af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x \\ bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{得 } f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \sin x + b \sin \frac{1}{x}).$$

【例 1.4】设 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$, 求 $f(x, y)$.

【解】令 $u = x+y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 则

$$f(u, v) = (\frac{u}{1+v})^2 - (\frac{uv}{1+v})^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2}$$

$$\text{故 } f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2} \quad (y \neq -1).$$

2. 函数的性质

A 题型 I 函数奇偶性的判别

解题提示

判别函数奇偶性的方法:

- (1) 主要依据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶函数之积为偶函数; 偶数个奇函数之积为偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数).
- (2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.
- (3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若函数的定义域关于原点不对称, 则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】判别下列函数的奇偶性:

$$(1) F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为连续的偶函数.}$$

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \text{ 其中 } f(x) \text{ 是连续的奇函数.}$$

$$(3) F(x) = \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right) f(x), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上有定义, 且对}$$

任何 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

【解】 (1) $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} \int_0^x f(u) du,$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \quad \textcircled{1}$$

$$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \quad \textcircled{2}$$

$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数} \quad \therefore f(x) + f(-x) = 0, \quad \textcircled{3}$$

$$\text{又} \therefore \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t) dt \right] du \xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x \left[\int_0^{-v} f(t) dt \right] (-dv) = - \int_0^x \left[\int_0^{-u} f(t) dt \right] du, \quad \textcircled{4}$$

由 ①②③④ 得

$$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt - \int_0^{-u} f(t) dt \right] du = \int_0^x \left[\int_{-u}^u f(t) dt \right] du = 0,$$

故 $F(x)$ 为奇函数.

$$(3) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数.

$$\text{又} \therefore f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$

$$\text{又 显然有 } 0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 II 求解给定函数的周期或周期性证明

解题提示 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

【例 1.6】设 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数, 证明 $f(ax) (a > 0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】令 $F(x) = f(ax)$, 由于

$$F\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T) \xrightarrow[\substack{\therefore T \text{ 是} \\ f(x) \text{ 的周期}}]{\text{}} f(ax) = F(x),$$

故 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$),

求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】由题设有 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)] \\ &= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)], \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T = 2(b-a)$.

题型 III 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

解题提示 若没有言明函数 $f(x)$ 可导, 则用单调性定义判别; 若言明函数 $f(x)$ 可导, 则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, 证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调增加.

$$\begin{aligned} \text{【证】 } F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt \\ &= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt, \end{aligned}$$

$\therefore (x-a)^2 > 0$ 且 $f(x)$ 单调增加, 当 $x > t$ 时, $f(x) - f(t) \geq 0$,

$\therefore F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

题型 IV 函数有界性的判别

解题提示 证明或判别函数有界性的思路:

- (1) 利用有界性定义.
- (2) 闭区间上连续函数的有界性.
- (3) 有极限数列必有界.
- (4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【证】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \therefore$ 对于取 $\varepsilon = \frac{|l|}{2}, \exists X > a,$

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2},$

又 $|f(x) - l| > |f(x)| - |l|$ 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2},$

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|.$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S, \text{使 } |f(x)| < S, x \in [a, X].$

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\},$ 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M,$

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【例 1.10】试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x te^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【证】 令 $g(x) = \int_0^x te^{t^2} dt,$

$$\therefore g(-x) = \int_0^{-x} te^{t^2} dt \stackrel{\text{令 } u = -t}{=} \int_0^x -ue^{(-u)^2} (-du) = \int_0^x ue^{u^2} du,$$

$\therefore g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x) = e^{-x^2} g(x)$ 也为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上

有界即可.

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x te^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists X > 0$, 当 $x \in [X, +\infty)$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad 0 < f(x) < 1,$$

又 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 于是, $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in [0, X]$, 恒有 $0 \leq f(x) \leq l$, 取 $M = \max\{1, l\}$, 则对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

3. 复合函数

解题提示 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法:

- (1) 代入法 (适用于初等函数的复合);
- (2) 分析法 (适用于初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合);
- (3) 图示法 (适用于两个分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

$$\text{【解】 } f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n\text{次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$.

$$\text{【解】 } f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} / \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较以上两式可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证.)

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

【例 1.13】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}.$$

(i) 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$$

(ii) 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2};$$

综上所述 有 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x + 2 & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$

【例 1.14】设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】图示法的解题程序:

- (1) 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图象;
- (2) 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xou 坐标面上画出 (这是若干条平行于 x 轴的直线);
- (3) 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;
- (4) 将(3)所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|], \quad (*)$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像, 图 1.1 所示, 以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$

的分界点 $u = 0$ (xou 平面上的 x 轴)

当 $x < 0$ 时, $u = x, (u < 0)$

当 $x \geq 0$ 时, $u = x^2, (u \geq 0)$

将以上所得结果代入(*)式, 得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

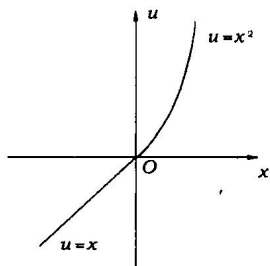


图 1.1

二、极限

1. 数列的极限

题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

解题提示

或者利用单调有界数列必有极限定理求解 (求解程序: ① 判断极限的存在性

② 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解

关于 l 的方程,求得 l 的值,从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$,然后在通项的两边取极限得出 l 的数值,再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2},$$

$$\because \text{由题设可知 } x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2 \therefore l = 1 + \sqrt{2}.$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|x_{n-1} - l|}{lx_{n-1}} \quad (\because x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, \\ l = 2 + \frac{1}{l} > 2) &< \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4} / 4 = \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\ &= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}}, \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1.$$

【例 1.16】 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限,

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1+l}\right) \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1+l)} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} &= 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

【另解】 由题设可知 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{x_1}{1+x_1}\right) - 1 = \frac{x_1}{1+x_1} > 0. \quad \text{于是 } x_2 > x_1.$$

$$\text{设 } x_n > x_{n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{x_n}{x_n + 1}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) = \frac{x_n}{1 + x_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0, \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$\because x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} (\because x_{n-1} > 0) < 2 \therefore \{x_n\}$ 有上界.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设其为 l , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right), \text{ 即 } l = 1 + \frac{l}{1 + l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l \text{ 非负.}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

【例 1.17】 设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, 其中 $a > 0, x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证】 $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \therefore \{x_n\}$ 有下界,

$$\text{又 } \because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right) = 1, \therefore \{x_n\} \text{ 单减,}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \text{ 可得 } l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l = \sqrt{a},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

【注】 单调数列的极限既可用极限定义法, 又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

解题提示

方法有:

- (1) 特殊级数求和法.
- (2) 利用幂级数求和法.
- (3) 利用定积分定义求极限.
- (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通项表示, 则用定积分

定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 而剩余的不能用

一个通项表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

【解】(1) 因为每一项中提出 $\frac{1}{n}$ 后, 剩余各项不能用一个通项表示出来, 所以不能用定积分定义求解.

$$1 \leftarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{故} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(3) \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \leq \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

【例 1.19】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}$.

【解】 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$

$$\therefore \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2+1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{又} \therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故} \quad \text{原极限} = \frac{\pi}{4}.$$