聚焦考研

数学题型集粹与练习题集

经济类

NETEM MATHS

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

2005版

主编 陈文灯/黄先开 曹显兵

用正版书 赠 增值卡

基础加题型

——考研数学成功的保证

严格遵循考试大纲，精辟阐释解题思路，全面展现题型变换，将浩渺的习题浓缩于有限的“题型”之中，迅速拔高考生快速、准确、灵活的解题能力。

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

聚焦考研

数学

题型集粹与练习题集

NETEM MATHS

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

经济类

2005版

主编 陈文灯／黄先开
曹显兵

用正版书 赠 增值卡

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

FOCUS 聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 经济类／陈文灯，黄先开，曹显兵编著. —7 版. —北京：世界图书出版公司北京公司，2003

ISBN 7-5062-5210-4

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①陈…②黄…③曹…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 014884 号

数学题型集粹与练习题集(经济类)

(2005 版)

主　　编：陈文灯　黄先开　曹显兵

责任编辑：武海燕

封面设计：京 A 企划

出　　版：世界图书出版公司北京公司

发　　行：世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号　电话 62116800　邮编 100010)

销　　售：各地新华书店

印　　刷：廊坊人民印刷厂

开　　本：787×1092 毫米　1/16

印　　张：26.375

字　　数：499 千字

版　　次：2004 年 2 月第 7 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5210-4/O·335　　**定价**：38.80 元

服务热线：010－62198078

第七版最新修订说明

《数学题型集粹与练习题集》（经济类）作为《数学复习指南》（经济类）的续篇，自第一版问世已经第七个年头了。纵观七年，这两本书全面覆盖了考研数学经济类试题中的各类题型。2004年考研数学试题中的题型无一出其右者。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书，将会进一步拓宽思路，掌握各类题型的解题方法和技巧，大大提高做题的准确性和速度。

◆ **2005版《数学题型集粹与练习题集》(经济类）主要改动如下：**

① 根据新的考研数学中数学三和数学四的大纲要求，将数学四不作要求内容用“＊”号进行标注，使考生复习时更加有的放矢。

② 根据新大纲要求，分别对模拟题中主客观题的比例进行了调整，选择题与填空题的比例由过去的30%增加到40%，解答题（包括证明题）的比例由过去的70%减少到60%。增加了两道选择题，减少了一个解答题。

③ 考研结束后第一时间内在附录中增加了2004年数学三、四试题与参考答案。

④ 将文字和内容进行了逐字校对，追求无差错率出版。

⑤ 对版式进行了重新调整，层次感更强，更加有利于读者学习。

⑥ 赠送网络名师答疑，并在2004年11月赠送模拟冲刺题一套，具体内容详见封三。

◆ **本书主要特色如下：**

① 重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理，通过题型的形式予以强化，同时，指出解题的方法和技巧，尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题，按本书所给的思路、方法去分析将会迎刃而解。

② 针对性强，覆盖面大。本书不搞题海战术，而是以题型为纲，通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题，总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

③ 超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题系作者多年的教学心得、呕心沥血之所成。读者通过做这些例题不仅可以将各知识点串在一起，而且可以拓宽思路，遇到“从未见到”的题时，可以从容应对。

另外，本书编写的模拟试题，请读者复习完本书后，严格掌握在3小时内独立做完试卷，及时查缺补漏。

书后附录还给出2003年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学三、数学四试题及参考答案。

成书仓促，定有不当和错误之处，恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编　者

目　录

第一篇　微积分

第三篇 概率论与数理统计初步

注:带＊章节,数四考生不必看。

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

一、函数

1. 有关函数概念的题型

题型Ⅰ　判别函数的等价性

【例 1.1】设$\lim\limits_{x\to1}f(x)$存在，且$f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则与$f(x)$等价的函数是

(A)$y=\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$.　　　(B)$y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$.

(C)$y=\int f'(x)\mathrm{d}x$.　　　(D)$y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$.

【解】设$\lim\limits_{x\to1}f(x)=l$，则$f(x)=x^2+2xl$，

两边取$x\to1$时的极限，得$l=1+2l\Rightarrow l=-1\Rightarrow f(x)=x^2-2x$.

(A)$y=\frac{1}{3}x^3-x^2$与$f(x)$的对应关系不同.

(B)$y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t=x^2-2x$.

(C)$y=f(x)+C=x^2-2x+C$与$f(x)$对应关系不同.

(D)$y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$，定义域$x<0$或$x>2$，与$f(x)$定义域不同，故(B)入选，实际做题时不必像以上那样处理，求出$f(x)$的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型Ⅱ　利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解$f(x)$的表达式

解题提示　一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号$f(\ \ )$内的中间变量的表达形式，然后用“无关特性”即可得出$f(x)$的表达式. 另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”，然后通过联立方程得出$f(x)$的表达式. 多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】求解以下各小题中的$f(x)$表达式：

(1)$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin(x^2+\frac{1}{x^2})+2,\quad |x|>1$.

(2)$f(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x,\quad 0<x<1$.

【解】(1)$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}+\sin\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]+2$，

故 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sin(x^2-2)+2.\quad |x|>2$

(2) $f(\sin^2x)=1-2\sin^2x+\dfrac{1}{\cos^2x}-1=-2\sin^2x+\dfrac{1}{1-\sin^2x}$,

故 $f(x)=-2x+\dfrac{1}{1-x},\quad 0<x<\sin^21.$

【例 1.3】设 $f(x)$ 满足方程:$af(x)+bf(-\dfrac{1}{x})=\sin x$,其中 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

【解】 令 $t=-\dfrac{1}{x}$,则 $x=-\dfrac{1}{t}$,于是原方程变为 $bf(t)+af(-\dfrac{1}{t})=-\sin\dfrac{1}{t}$,

由"无关特性"得 $bf(x)+af(-\dfrac{1}{x})=-\sin\dfrac{1}{x}$.

解联立方程组 $\begin{cases}af(x)+bf(-\dfrac{1}{x})=\sin x\\ bf(x)+af(-\dfrac{1}{x})=-\sin\dfrac{1}{x}\end{cases}$

得 $f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}(a\sin x+b\sin\dfrac{1}{x}).$

【例 1.4】设 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2+\cos(xy)$,求 $f(x,y)$.

【解】 令 $u=x+y,v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow x=\dfrac{u}{1+v},y=\dfrac{uv}{1+v}$,则

$$f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2}$$

故 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}+\cos\dfrac{x^2y}{(1+y)^2}\quad(y\neq-1).$

2. 函数的性质

题型 I 函数奇偶性的判别

解题提示 判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义,有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

(2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】判别下列函数的奇偶性:

(1) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\,dt\right]du$,其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

(3) $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$,其中 $a>0,a\neq1$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且对

任何 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

【解】 (1) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[偶函数]{f(x)为} -\int_0^{x}f(u)\mathrm{d}u$,

$\because\quad F(x)+F(-x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$,

$\therefore\quad F(x)$ 为奇函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, ①

$F(-x)=f(-x)+\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, ②

$\because\quad f(x)$ 为奇函数 $\quad\therefore\quad f(x)+f(-x)=0$, ③

又 $\because\quad \int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \xlongequal{令 u=-v} \int_0^{x}\left[\int_0^{-v}f(t)\mathrm{d}t\right](-\mathrm{d}v)=-\int_0^{x}\left[\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, ④

由①②③④得

$F(x)+F(-x)=\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\int_0^{x}\left[\int_{-u}^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=0$,

故 $\quad F(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,

$\because\quad g(x)+g(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$,

$\therefore\quad g(x)$ 为奇函数.

又 $\because\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$,令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)\quad\Rightarrow\quad f(0)=0$,

又 $\quad$ 显然有 $0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$,

$\therefore\quad f(x)$ 为奇函数.

故 $\quad F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型Ⅱ 求解给定函数的周期或周期性证明

解题提示 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x)=f(ax)$,由于

$F\left(x+\dfrac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)\xlongequal[f(x)的周期]{\because T是}f(ax)=F(x)$,

故 $\quad\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b$ 均对称 $(a\neq b)$,求证:$y=f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x)=f(a-x)$, $f(b+x)=f(b-x)$,

于是 $f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]$

$=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$,

故 $\quad f(x)$ 是周期函数,其周期 $T=2(b-a)$.

题型 Ⅲ　函数$f(x)$在某区间 I 上单调性的判别

解题提示 若没有言明函数$f(x)$可导,则用单调性定义判别;若言明函数$f(x)$可导,则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(x)$单调增加,证明$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$(a,b)$内单调增加.

【证】 $F'(x)=-\dfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{f(x)}{x-a}=-\int_a^x\dfrac{f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t+\int_a^x\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$

$=\int_a^x\dfrac{f(x)-f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$,

∵ $(x-a)^2>0$且$f(x)$单调增加,当 $x>t$时,$f(x)-f(t)\geqslant 0$,

∴ $F'(x)\geqslant 0$,故$F(x)$在(a,b)内单调增加.

题型 Ⅳ　函数有界性的判别

解题提示 证明或判别函数有界性的思路:

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x\to x_0$时有极限的函数$f(x)$在x_0的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$($l$为有限数),试证:$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

【证】 ∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, ∴ 对于取$\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$,$\exists X>a$,

当 $x>X$时,恒有 $|f(x)-l|<\dfrac{|l|}{2}$,

又 $|f(x)-l|>|f(x)|-|l|$ 所以 $|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$.

∵ $f(x)$在$[a,X]$上连续,由闭区间上连续函数有界性,可知$\exists S$,使$|f(x)|<S,x\in[a,X]$.

取$M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$,则对$\forall x\in[a,+\infty)$恒有 $|f(x)|\leqslant M$,

即 函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

【例 1.10】试证$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

【证】 令$g(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,

∵ $g(-x)=\int_0^{-x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令u=-t}\int_0^x -u\mathrm{e}^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u)=\int_0^x u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$,

∴ $g(x)$为偶函数.因此$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}g(x)$也为偶函数,所以只需证明$f(x)$在$[0,+\infty)$上

有界即可.

$$\because\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\frac{1}{2},$$

$\therefore$　对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\exists X>0$, 当 $x\in[X,+\infty)$ 时,有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\quad 即\quad 0<f(x)<1,$$

又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续,于是, $\exists l>0$, 使对 $\forall x\in[0,X]$, 恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant l$, 取 $M=\max\{1,l\}$, 则对 $\forall x\in[0,+\infty)$, 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

3. 复合函数

解题提示　将两个或两个以上函数进行复合,通常有三种方法:

(1) 代入法(适用于初等函数的复合);

(2) 分析法(适用于初等函数与分段函数的复合,或两个分段函数的复合);

(3) 图示法(适用于两个分段函数的复合).

【例 1.11】 设 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$, 若 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

【解】 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big/\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较以上两式可知　$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　(由数学归纳法可证.)

于是　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=\dfrac{x}{|x|}$ $(x\neq0)$.

【例 1.13】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant0\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<1\\ \varphi(x) & \varphi(x)\geqslant1\end{cases}.$$

（ⅰ）当 $\varphi(x)<1$ 时，

$x<0,\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$，

$x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$；

（ⅱ）当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，

$x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$，

$x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$；

综上所述　有 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2} & x<-1\\x+2 & -1\leqslant x<0\\e^{x^2-1} & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\x^2-1 & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$.

【例 1.14】 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|),\varphi(x)=\begin{cases}x & x<0\\x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 图示法的解题程序：

(1) 画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图象；

(2) 将 $y=f(u)$ 的分界点在 xou 坐标面上画出（这是若干条平行于 x 轴的直线）；

(3) 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；

(4) 将(3)所得结果代入 $y=f(u)$ 中便得复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{2}[\varphi(x)+|\varphi(x)|],\qquad (*)$$

作出 $u=\varphi(x)$ 的图像，图 1.1 所示，以及 $f(u)=\dfrac{1}{2}(u+|u|)$ 的分界点 $u=0$ （xOu 平面上的 x 轴）

当 $x<0$ 时，$u=x$，$(u<0)$

当 $x\geqslant 0$ 时，$u=x^2$，$(u\geqslant 0)$

将以上所得结果代入（$*$）式，得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & x<0\\x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$.

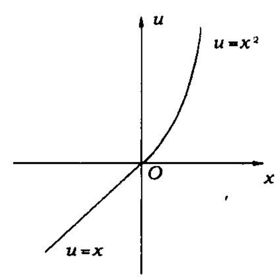

图 1.1

二、极限

1. 数列的极限

题型 Ⅰ　已知数列的前几项数值及通项的表达式，求数列的极限

解题提示　或者利用单调有界数列必有极限定理求解（求解程序：① 判断极限的存在性 $\begin{cases}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{cases}$，方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，然后通过解

关于 l 的方程,求得 l 的值,从而得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$). 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出 l 的数值,再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n-l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】 设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限

$$\Rightarrow\quad l=2+\frac{1}{l}\quad\Rightarrow\quad l^2-2l-1=0\quad\Rightarrow\quad l=1\pm\sqrt{2},$$

$\because$ 由题设可知 $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}>2\quad\therefore\quad l=1+\sqrt{2}.$

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在:

$$|x_n-l|=\left|(2+\frac{1}{x_{n-1}})-(2+\frac{1}{l})\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{l}\right|=\frac{|x_{n-1}-l|}{lx_{n-1}}(\because x_{n-1}=2+\frac{1}{x_{n-2}}>2,$$

$$l=2+\frac{1}{l}>2)<\frac{|x_{n-1}-l|}{4}<\frac{|x_{n-2}-l|}{4}\Big/4=\frac{|x_{n-2}-l|}{4^2}<\frac{|x_{n-3}-l|}{4^3}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{4^{n-1}}$$

$$=\frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}=\frac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}},$$

$$\because\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}=0\qquad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}(x_n-l)=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}+1.$

【例 1.16】 设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限,

$\Rightarrow l=1+\dfrac{l}{1+l}\Rightarrow l^2-l-1=0\Rightarrow l=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,由题设可知 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在:

$$|x_n-l|=\left|\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)-\left(1+\frac{l}{1+l}\right)\right|$$

$$=\frac{|x_{n-1}-l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|}<\frac{|x_{n-1}-l|}{2(1+l)}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{2^{n-1}(1+l)}=\frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)}=\frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}$$

$$\because\quad\lim_{n\to\infty}\frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}=0\quad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}(x_n-l)=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

【另解】 由题设可知 $x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$

$x_2-x_1=(1+\dfrac{x_1}{1+x_1})-1=\dfrac{x_1}{1+x_1}>0.$ 于是 $x_2>x_1$.

设 $x_n>x_{n-1}$,

则 $x_{n+1}-x_n=(1+\frac{x_n}{x_n+1})-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$

$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0$,

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$\because$ $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(\because x_{n-1}>0)<2$ $\therefore$ $\{x_n\}$ 有上界.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设其为 l,于是

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})$,即 $l=1+\frac{l}{1+l}$ $\Rightarrow$ $l=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,由题设可知 l 非负.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【例 1.17】 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$,其中 $a>0,x_0>0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证】 $\because$ $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$, $\therefore$ $\{x_n\}$ 有下界,

又$\because$ $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leqslant\frac{1}{2}(1+\frac{a}{(\sqrt{a})^2})=1$, $\therefore$ $\{x_n\}$ 单减,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 则由

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$,可得 $l=\frac{1}{2}(l+\frac{a}{l})\Rightarrow l=\sqrt{a}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

【注】 单调数列的极限既可用极限定义法,又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n\to\infty$ 时,n 项和的极限

解题提示 方法有:

(1) 特殊级数求和法.
(2) 利用幂级数求和法.
(3) 利用定积分定义求极限.
(4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子$\frac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列的极限;若数列的各项虽可提出一个因子$\frac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

【解】 (1) 因为每一项中提出$\frac{1}{n}$后,剩余各项不能用一个通项表示出来,所以不能用定积分定义求解.

$$1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1\quad(n\to\infty),$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\leqslant\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i,$$

$$\because\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

【例 1.19】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

【解】 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\because\quad\frac{i^2}{n^2}\leqslant\frac{i^2+1}{n^2}\leqslant\frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

又$\because$ $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$ 故 原极限 $=\frac{\pi}{4}$.