KH 科海图书
25年 · IT技术出版专家

高等数学

李晓东 朱海涛 主编

中国人民大学出版社
北京科海电子出版社
www.khp.com.cn

高 等 数 学

李晓东　朱海涛　　主编

中国人民大学出版社
·北京·

北京科海电子出版社
www.khp.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 李晓东，朱海涛主编.
北京：中国人民大学出版社，2008
ISBN 978-7-300-09740-4

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①李…②朱…
Ⅲ. 高等数学
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 145020 号

高等数学
李晓东 朱海涛 主编

出版发行	中国人民大学出版社 北京科海电子出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
	北京市海淀区上地七街国际创业园 2 号楼 14 层	邮政编码	100085
电　　话	（010）82896442 62630320		
网　　址	http: //www.crup.com.cn		
	http: //www.khp.com.cn（科海图书服务网站）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京市鑫山源印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm 1/16 开本	版　　次	2008 年 10 月第 1 版
印　　张	10.75	印　　次	2008 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	261 千字	定　　价	20.00 元

内容提要

本书是为了适应我国的新课程改革，由多位富有教学经验的一线教师共同编写完成的，能够满足新时期高职高专院校工科类专业的教学改革需要。

本书共 6 章，包括函数极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分以及定积分的应用等内容。

本书不仅结构合理、内容翔实，还适当降低了理论难度。本书既可以作为高职高专院校的教材，也可以作为其他大中专院校的教材或参考书。

目　录

第 1 章　函数极限与连续

高等数学是一门以变量为研究对象的数学课程，函数关系是一类主要的变量依赖关系。极限思想是讨论变量问题的基本思想，极限理论是高等数学的奠基理论，极限方法是研究变量的基本方法，极限这一基本研究手段贯穿高等数学课程始终。本章介绍函数、极限、连续等基本概念及其基本性质。

第 1 节　函　　数

一、常用的数集及点集

1. 常用的数集及其记法

在中学阶段我们已经知道，所谓**集合**是指具有某种特定性质的事物的总体，而其中某个个体称为集合的**元素**。元素 a 属于集合 A，表示为 $a \in A$；元素 b 不属于集合 A，表示为 $b \notin A$。

我们研究的数集，常用以下英文字母标记：

实数集——R	有理数集——Q	正整数集——N_+
自然数集——N	整数集——Z	无理数集——$R \setminus Q$

关于某数（点）对称的开区间，常称为**邻域**，表示为 U（a），即开区间（$a-\delta$，$a+\delta$）。若需要指明区间的宽度，也可以表示为 U（a，δ），读作 a 的 δ 邻域。如图 1-1 所示，称 δ 为**邻域的半径**。

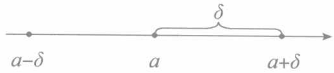


图 1-1

有的时候，我们讨论的邻域是不包含 a 点的开区间，表示为$\overset{o}{U}(a)$ 或$\overset{o}{U}(a,\delta)$，读作 a 的 **δ 去心邻域**。即：$\overset{o}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 或$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$。

2. 常用的点集及其记法

我们所研究的点集，主要是二维空间和三维空间上的点集。二维空间可以用平面直角坐标系来表示，记作 R^2；三维空间可以用空间直角坐标系来表示，记作 R^3。这两种坐标系是我们中学阶段所熟知的。

例 1　直角坐标平面 R^2 及空间 R^3 表示为

$$R^2=\{(a,b)|a\in R,b\in R\}=R\times R$$

$$R^3=\{(a,b,c)|a\in R,b\in R,c\in R\}=R\times R\times R$$

这里的“×”号读作**直积**。

例 2　圆 $x^2+y^2=r^2$（$r>0$）上的点集 E 表示为

$$E=\{(x,y)|x^2+y^2=r^2\}$$

球 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 内部的点集 F 表示为

$$F=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant r^2\}$$

显然 $E\subset R^2$，$F\subset R^3$。

例 3　两个闭区间的直积表示为，即

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)|x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

二、函数的概念

定义　设 y 与 x_1，x_2，…，x_n 是 $n+1$ 个变量，其中 x_1，x_2，…，x_n 属于集合 D（表示为$P=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D$）。若对于每一个 $P\in D$，按照某种对应法则f，总能有唯一确定的数$y\in f(D)$ 与之对应，则称 **y 是 P 的函数**。记作 $y=f(P)$ 或 $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$。称 x_1，x_2，…，x_n 为 n 个独立的**自变量**，称 y 为**因变量或函数**。称 D 为**定义域**，称 $f(D)$为**值域**。

特别地，当 $n=1$ 时，就是我们中学熟知的函数关系 $y=f(x)$，也称之为**一元函数**。本教材上册主要讨论一元函数，相应地称 $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 为 **n 元函数**。

下面我们仅就一元函数举例说明函数关系。

例4 常数函数 $y=c$（取 $c=3$），$D=R$，$f(D)=\{c\}$，如图1-2所示：

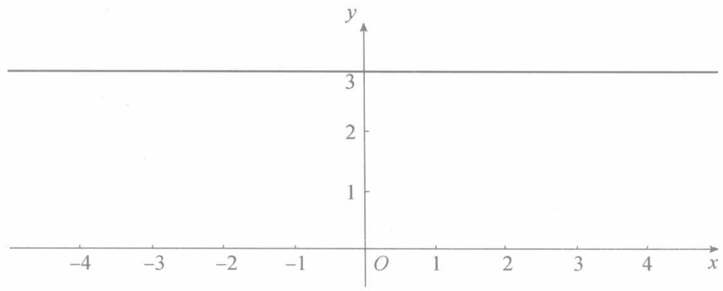


图1-2

例5 幂函数 $y=x^{\mu}$，$\mu=1$，$\mu=-1$，$\mu=3$，$D=R$（$D=R/\{0\}$），$f(D)=R$（$f(D))=R/\{0\}$），如图1-3所示：

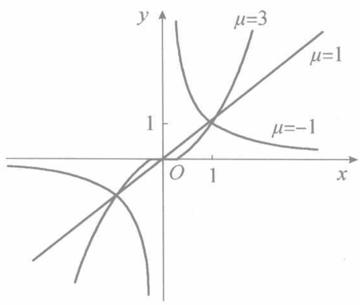


图1-3

例6 指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$），$D=R$，$f(D)=(0,+\infty)$，如图1-4所示：

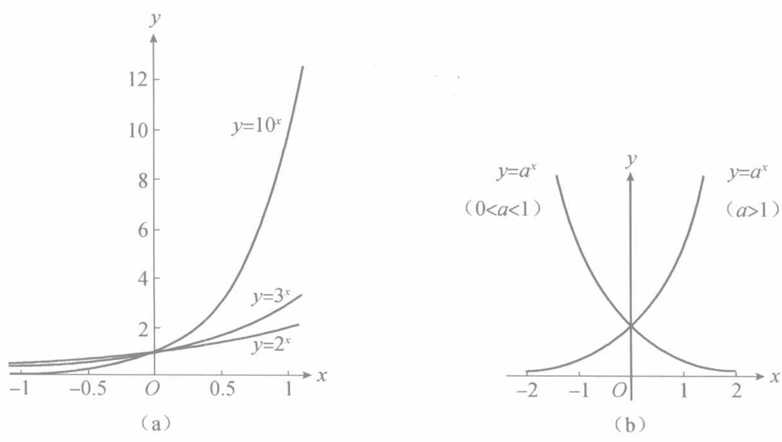
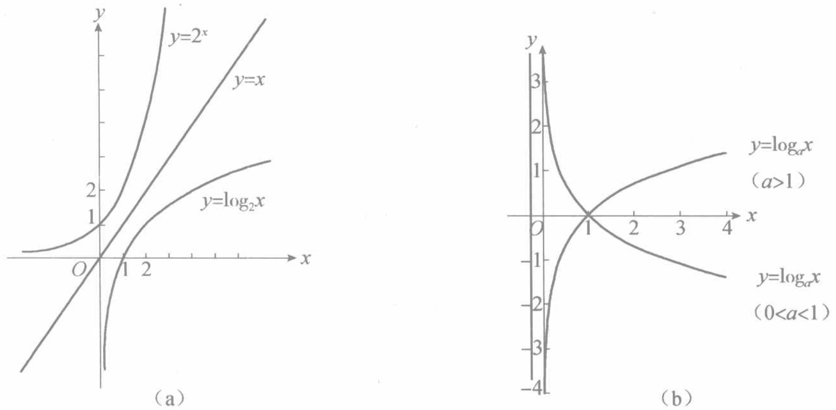


图1-4

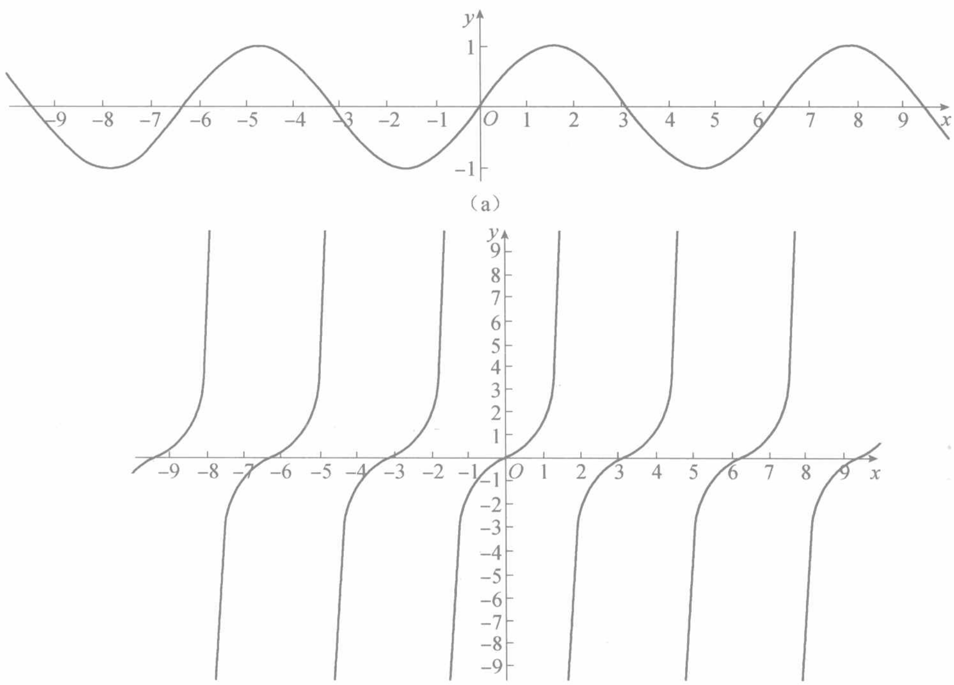
例 7 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$), $D=(0, +\infty)$, $f(D)=R$, 如图 1-5 所示:



(a)　　　(b)

图 1-5

例 8 三角函数以 $y=\sin x$, $D=R$, $f(D)=[-1, 1]$ 与 $y=\tan x$, $D=\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $f(D)=R$ 为例, 如图 1-6 所示:



(a)

(b)

图 1-6

例 9 反三角函数 $y=\arcsin x$, $D=[-1, 1]$, $f(D)=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 如图 1-7 所示:

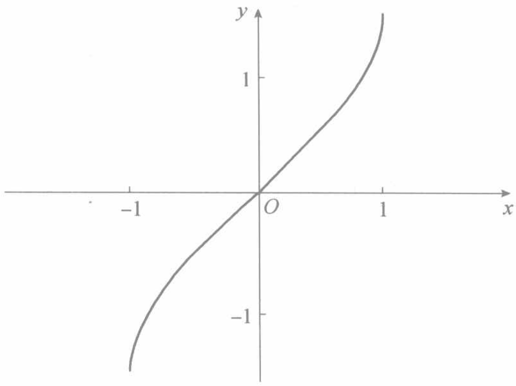


图 1-7

例 10　函数 $y=|x|$，$D=R$，$f(D)=[0,+\infty)$，如图 1-8 所示：

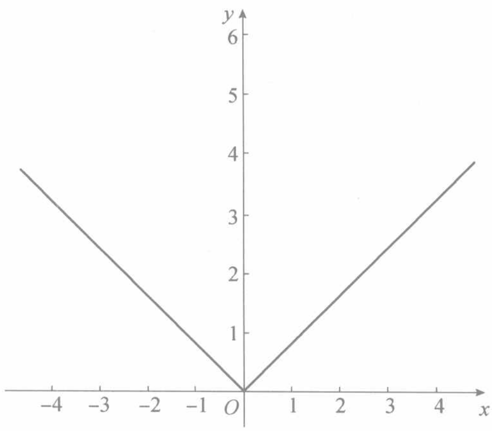


图 1-8

例 11　**取整函数** $y=[x]$，$D=R$，$f(D)=Z$ **与取余函数** $y=\{x\}$，$D=R$，$f(D)=[0,1)$，如图 1-9 所示：

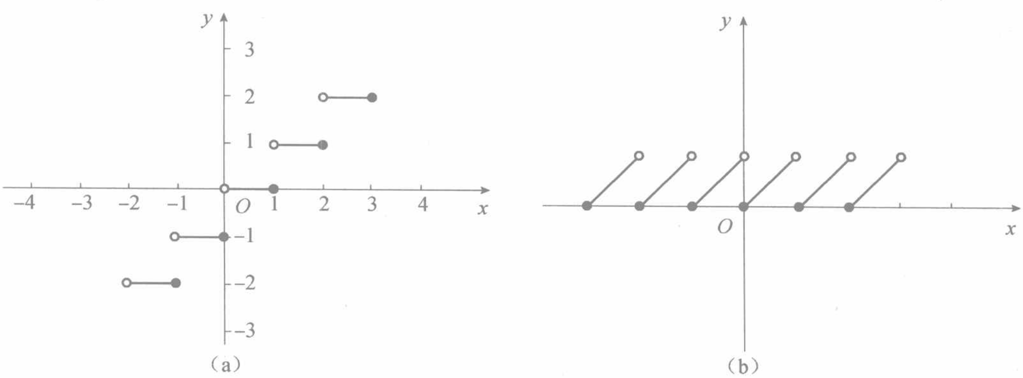


图 1-9

例 12 **Diriclet**（狄里克莱）函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in R\setminus Q\end{cases}$，$D=R$，$f(D)=\{0,1\}$ 与

Riemann（黎曼）函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,1\\ 0, & x\in(R\setminus Q)\cap(0,1)\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\in Q\cap(0,1)\end{cases}$，$D=[0,1]$，$f(D)=\left\{\dfrac{1}{n}\mid n\in N^*\right\}\cup\{0\}$，其图像无法具体描绘。

例 13 **符号函数** $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$D=R$，$f(D)=\{-1,0,1\}$，如图 1-10 所示：

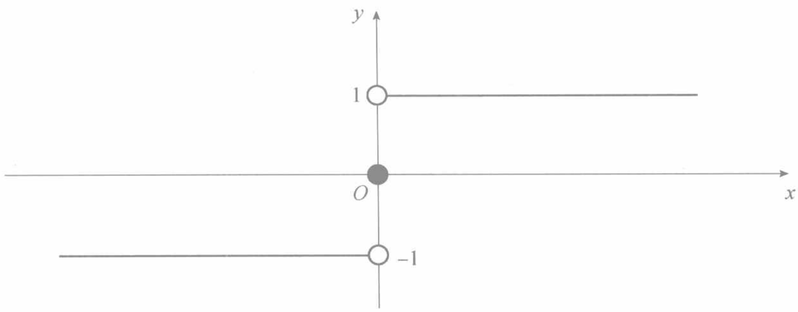


图 1-10

三、函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 设函数 $f(x)$ 定义在 D 上，若对于任意 $x\in D$，$|f(x)|$ 都不超过预先给定的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上有界。

用量词语言可以描述为：$\exists M>0$，$\forall x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M \Leftrightarrow f(x)$ 在 D 上有界。

例如，$\exists 1>0$，$\forall x\in R$，有 $|\sin x|\leqslant 1$。故函数 $f(x)=\sin x$ 在 R 上有界。

又如，$\exists 5>0$，$\forall x\in[-1,1)$，有 $|2x+1|\leqslant 5$。故函数 $f(x)=2x+1$ 在 $[-1,1]$ 上有界。

定义 若不论预先给定什么样的正数 M，都可以在 D 中找到 $x_0\in D$，使 $|f(x_0)|\geqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 无界。

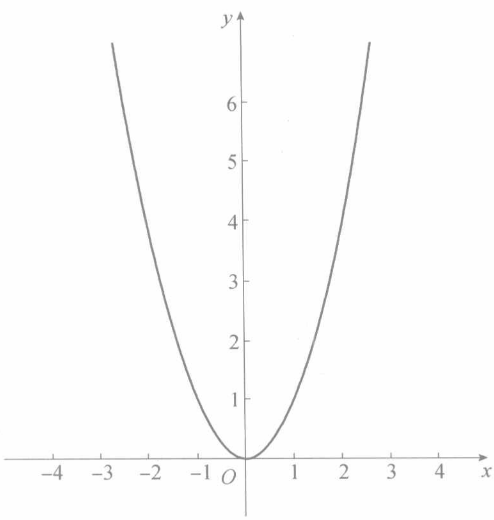
用量词语言可以描述为：$\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，有$|f(x_0)|\geqslant M \Leftrightarrow f(x)$ **在 D 无界**。

例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1]$，任取 $M>0$，总可以找到 $x_0=\frac{1}{M+1}$，使 $|f(x_0)|=M+1>M$。故 $f(x)=\frac{1}{x}$在（0，1）上无界。

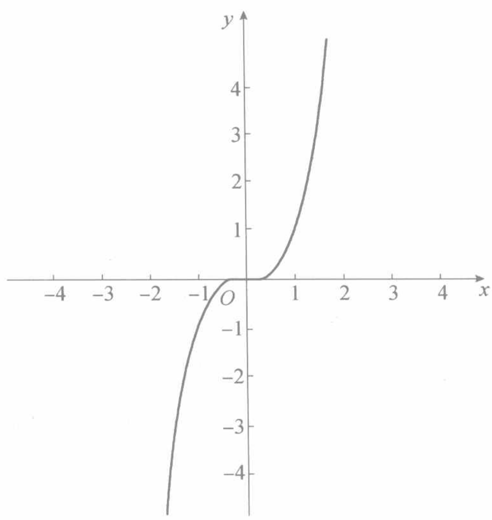
2. 函数的单调性

定义 设函数$f(x)$在区间 I 上有定义，若对于$\forall x_1$，$x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称$f(x)$ **在区间 I 是单调增加（减少）的**。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**。

例如，$f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，在 $(-\infty,0]$ 单调减少。但在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f(x)$ 不是单调函数。又如$f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的。如图1-11所示：



（a）



（b）

图 1-11

3. 函数的奇偶性

定义 设函数$f(x)$的定义域关于原点对称（即$\forall x\in D$ 必有 $-x\in D$）。若$\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$，则称$f(x)$ **是定义在 D 上的奇（偶）函数**。

例如，$f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数，因为 $\forall x\in R$ 有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。

又如，$f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，因为 $\forall x\in R$ 有 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。

偶函数的图像是关于 y 轴对称的，奇函数的图像是关于原点对称的。有的函数不具有奇偶性，比如函数 $f(x)=x^2+\sin x$。

4. 函数的周期性

定义 设函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若 $\exists T\neq0$，$\forall x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x\pm kT)=f(x)$，$k\in Z$，则称 $\boldsymbol{T}$ 为 $f(x)$ 的**周期**，称 $f(x)$ 是以 $\boldsymbol{T}$ 为周期的**周期函数**。

通常我们说的周期是指函数的最小正周期。

比如，$f(x)=\cos x$ 以 2π 为周期；$f(x)=\tan x$ 以 π 为周期。

又如，常数函数 $f(x)=c$ 是以任意正数为周期的函数，但它没有最小正周期。

从前面正弦函数的图像我们可以看到，每一段横向上相隔 2π 的图像，其形状是完全相同的，这是周期函数的一个重要特性。

四、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$。若 $\forall y\in f(D)$，有唯一的 $x\in D$ 与之对应，则称这种函数关系是一一对应的函数关系。若将其定义域与值域互换，这时的对应关系仍然是函数关系，称之为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**。记为 $x=\phi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$。但在习惯上，我们将自变量记为 x，将因变量记为 y，于是 $y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$。

这样一来，原来的点 (a,b) 就变成了 (b,a)。所以在这种记法下，**互为反函数的两个函数其图像关于直线 $y=x$ 对称**。

需要说明的是，并非所有的函数都有反函数。比如 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上定义，就有反函数 $y=\arcsin x$；但若在 R 上定义，就没有反函数。

定理 一一对应的函数必然可以确定反函数。

比如，底数相同的指数函数与对数函数互为反函数；正弦函数与反正弦函数互为反函数。

例 14 函数 $y=2x+3$ 在 R 上单调增加，其反函数为 $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$，也在 R 上单调增加。如图 1-12 所示：

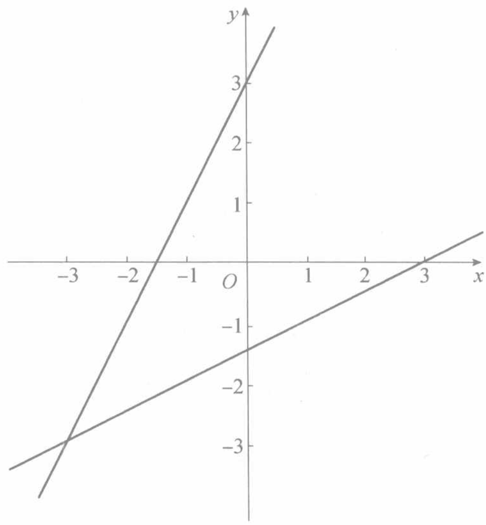


图 1-12

需要指出的是，定理 1 只是给出了具有反函数的充分条件。

五、基本初等函数

我们把以下 6 类函数统称为基本初等函数：

1. 常数函数 $y=c$，c 是常数；
2. 幂函数 $y=x^{\mu}$，$\mu\neq 0$；
3. 指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$）；
4. 对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq 1$）；
5. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；
6. 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot} x$。

六、复合函数

考查函数 $y=\sin x^{2}$，它可以拆解为 $y=\sin u$，$u=x^{2}$。像这样的函数关系，我们称之为复合函数。该函数是由幂函数和正弦函数复合而成的。这种运算也称为复合运算。

定义 设函数 $u=g(x)$ 定义域为 D，值域为 $W=g(D)$，若在 W 上定义函数 $y=$

$f(u)$，则有函数 $y=f[g(x)]$，称之为复合函数。其定义域为 D，值域为 $f(W)=f[g(D)]$。复合函数通常表示为 $y=f\circ g(x)$。

例如，$y=\log_2(x^2+1)$ 是复合函数，可以拆解为 $y=\log_2 u$，$u=x^2+1$，其中 u 函数关系是两个基本初等函数（幂函数和常数函数）之和。

七、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或复合运算得到的函数，统称为**初等函数**。

例 15 求函数 $y=\ln\sqrt[3]{\sin x}$ 的定义域。

解：因为

$$\sqrt[3]{\sin x}>0$$

所以

$$x\in(2k\pi,2k\pi+\pi),k\in Z$$

例 16 求函数 $y=\sqrt{3x-5}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-x}}$ 的定义域。

解：解不等式

$$\begin{cases}3x-5\geqslant 0\\4-x>0\end{cases}$$

得

$$x\in\left[\frac{5}{3},4\right)$$

并非所有的函数都是初等函数，比如我们前面介绍的符号函数、取整函数、取余函数、Diriclet 函数、Riemann 函数就不是初等函数。

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域与值域。

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$　　(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$

(4) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\0, & x=0\end{cases}$　　(5) $y=\ln(x+1)$

2. 在下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$　　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

3. 设 $f(x)=x^2+2x$，求下列函数值。

$$f(0),f(2),f(-1),f\left(\frac{1}{a}\right),f(x_0+\Delta x),f(x_0-\Delta x)$$

4. 设 $g(x)=\arccos\frac{x}{2}$，求下列函数值。

$$g(0),g(1),g(-\sqrt{2}),g(a+b)$$

5. 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$。

6. 判断下列函数的奇偶性。

（1）$y=x(1-x^2)$　（2）$y=\frac{1+x^2}{x^2}$　（3）$y=\sin x\cdot\tan x$

（4）$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　（5）$y=\sin 3x+\cos 2x$

第2节　数列的极限

数列是指定义在自然数集上的函数，记为 $a_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$，由于全体自然数可以排成一列，因此可将数列按顺序排成一串数。

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

简记为 $\{a_n\}$。数列中每一个数字为**数列的项**。从第1个数开始，依次称为**首项**，**第2项**，…，**第 n 项**。其中 $a_n=f(n)$ 称为**数列的通项**。

例如，数列 $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots$

其通项为 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$。

注意，我们在这里谈论的数列是**无穷数列**。这与中学教材里定义的数列是有区别的。

下面我们来研究当数列的项数 n 无限增大时 $(n\to\infty)$，对应的 $a_n=f(n)$ 的变化趋势。考查它能否无限地接近于某个常数，这就是数列的极限问题。

上例中的数列 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 列表如下：

n	1	10	101	1000	10001	100000	…
a_n	1	-0.1	$\frac{1}{101}$	-0.001	$\frac{1}{10001}$	-0.00001	…

由上表可以看到，当 n 无限增大时，a_n 无限接近一个常数 0，这个常数就是 a_1，a_2，…，a_n，…这个数列的极限。

一般地，若数列 $\{a_n\}$ 当 n 无限增大时，a_n 无限接近于某个常数 a，则称 $\{a_n\}$ **以 a 为极限**，或称 a_n **收敛于 a**，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a(n \to \infty)$$

符号"→"读作**趋向于**。

那么，如何刻画这种无限趋向呢？首先我们考虑 $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 与常数 0 的距离 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|$，我们看到，这个距离当 n 充分大时是可以任意小的。也就是说，对于预先给定的任意小的正数 ε，不论 ε 有多小，都可以在某一项之后使得所有的距离小于 ε，比如 $\varepsilon=\frac{1}{100}$ 时，只须让 $n>100$ 就可以了。又比如取 $\varepsilon=\frac{1}{10000}$ 时，只须让 $n>10000$ 就可以让 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}-0\right|<\varepsilon$。

一般地，**对于数列 $\{a_n\}$，若对于任意小的正数 ε，总能找到一个自然数 N，使任一个 $n>N$ 对应的项 a_n 与常数 a 的距离 $|a_n-a|$ 小于 ε，则可以说明 $\{a_n\}$ 以 a 为极限。**

定义 1 对于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N \in N_+$，$\forall n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=a$。

定义 2 若 $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall N \in N_+$，$\exists n_0>N$，则 $|a_{n_0}-a| \geq \varepsilon \Leftrightarrow a_n \not\to a\ (n\to\infty)$。

"$\not\to$"读作**不收敛于或不趋向于**。

如果 $\{a_n\}$ 不趋向于任意一实数，则称 $\{a_n\}$ **发散**，比如数列

$$\{(-1)^n\}: -1,1,-1,1,-1,1,\cdots(-1)^n,\cdots$$

我们看到它是不收敛的。

数列极限有着明显的几何意义（如图 1-13 所示）。

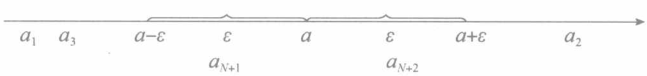


图 1-13