算學小叢書

數之意義

余介石
倪可權 著
李修睦
何魯 校

商務印書館出版

中等算學研究會叢書

數之意義

余介石
倪可權　著
李修睦
何　魯　校

商務印書館出版

㊥(55301)

算學小叢書 數之意義

著作者 余介石 倪可權 李修睦

出版者 商務印書館
上海河南中路二一一號

三聯 中華 商務 開明 聯營聯合組織
發行者 中國圖書發行公司
北京絨線胡同六十六號

發行所 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店 各地分店

印刷者 商務印書館印刷廠

1946年1月初版
1951年12月4版

定價人民幣4,500元

(滬)3701-4700

目　次

數之意義

第一章　數之概念發展史

I. 1. 數之概念之起源(1)　數爲一抽象之概念，而人類思想，率皆由具體問題發生，必經悠久之嬗遞變遷，方可逐漸完成此概念之內容。但人類歷史之有記載，比較上爲時甚短，殆不足據以確定數之概念之所自。吾人今日所能考察者，僅爲文字之起源，原始社會中民族之情況，與高等生物之行爲，初民對於數之認識，就此等間接材料，差可蠡測其一二焉。

我國"數"之一字，有英語名詞 number 及動詞 Count 二義，卽可指出"數"與"計數"二者關係之密切；但計數含有一種較精細之心理程序，必文化已達相當程度之民族，始具此能力，原始民族，則僅有數之感覺 (number sense)。動物亦間或具有此種感覺，如某種鳥類與黃蜂等，然多數情形，如犬，馬等家畜，則皆無之。所謂數之感覺，乃指在一小組之物體中，潛移去或加入一物時，卽能察覺其間已有變化之一種能力。今據英法文字語源，亦稍可見數之概念與數之感覺二者間關聯。英語之 thrice 與拉丁語之 ter，同有"三次"與"多次"二義；法語 trois "三"與 tres "甚多"二詞，亦頗相近，是故數之概

---

(1) 1—3 節多採 Dantzig: Number 第一章。

念之起源，當卽以此小量中變遷之認識爲萌芽，惟其事必遠在有史時代以前，其實況已無可考見矣。

I. 2. 計數與對應　動物既與人類同具數之感覺，然一則故步自封，一則絕塵奔軼，以至相去不可以道里計，其故安在。吾人臆度之，乃人類於範圍狹小之數之感覺外，能得一效力極宏之方術，致有此長足之進展，斯術卽爲“計數”。今日人類學者，對原始種族之研究，已闡明一事，卽未達於用手指計數者，不能認識數之概念。Curr 氏研究澳洲之各民族，認爲土人能知“四”者極少，知“七”者則絕無其人，原始民族所具“多寡”之具體觀念，粗陋而散漫，藉計數之方術，始得整理之，充實之，使成一整齊而抽象之“數”之概念，算學之可能，亦於是奠其基。

原始民族，又有一比較多寡之重要方術，是爲對應 Correspondance。今舉一例，以釋對應之義。設吾人欲辨別一戲院中座位與觀客孰多，不待計數，卽可知之。因苟人皆得一座，座無虛設，則人數與座數必相同；有未得座之人，則人數較多；有虛座則人數必較少，此卽所謂之“單對應”也。今復以字源考之，英語謂計算爲 tally 或 Calculate，前一字本於拉丁語 talea，爲刻劃之義，後一字本於拉丁語 Calculus，爲石子之義。蓋先民無數碼記其所蓄畜牧之數，皆賴在樹上刻劃或堆石子，以表其多寡，由此所生數之概念，卽爲基數 (Cardinal number)。以對應爲本，而與計數初不相涉。然藉刻劃或堆聚以記數，不能建立計數之手續，必須區別各堆，按其多寡，依次排列成序，而創一組之數。於是吾人計數一組物體時，乃使每一物與此依次排列中之一項相配，直至各物已畢始止。排列中與最後一物相配之項，卽稱爲此組之序數(Ordinal number)。

至此吾人欲明一組物之多寡,亦即欲定其數時,不必求一單對應之堆聚,以作標準,而只須計數之即可。是故吾人所求者,雖爲純數,然不克賴此以樹立一種算術。算術之運算中,暗含有一假設,即吾人能自任何數達於其相續之一數,斯即序數之主要意義也。

對應與相續二原則,已融合滲透於一切數理之中,吾人數系之組織,亦利賴之。無論在其構成之邏輯次第上,或發展之心理程序上,皆非此莫辦也。至於此二原則產生之孰先孰後,抑係同時,雖經原始文化與語言學上之研究,迄未能確定云。

I. 3. 數碼 (Numerals) 之由來　序數中各項,必賦予專名,如是而有數碼。先民最初計數之法,皆用手指,殆無可疑,因而有手勢碼(Gesture numerals)。近代語言學之研究,已足證明此爲一普遍現象,因一切 Indo-European, Semetic, 蒙古各種語,以及多數原始民族語中,皆以 10 爲記數法之底。人類之採用十進制,乃受生理上之影響,(2)初非此制在　理上有何優越處。如就理論言之, 12 有四個因數,而 10 則僅有二,故十八世紀自然學家 Buffon 頗主張用十二進制,又大算學家 Lagrange 則主張以任何質數爲底。但以今日計算方法之完善,改底不足增加若何便利,而悠遠之積習,一經改革,必生紛擾。故此種建議,殆無考慮之價值。

語言碼(Spoken numerals)之產生,遠在手勢碼之後,至於起於何時,今已莫能考。但有可注意者,則語言碼最少變遷,今之語言學者,猶藉此以考各種語言之來源之異同。今日所可

(2) Aristotle 於 Book of Problems 一書中,曾提出一問題曰:"何以人類計數,皆以十進,野蠻人如是,希臘人亦復如是?"而自應之曰:"此乃因人類之手有十指,天然上手乃算術計算之輔助也。"

稽考者,語言碼多表具各數之習見實物,如國語"二"與"耳"同音,藏文"二"有"翼"之義,(3)梵語"五"爲 Pantcha 與波斯語 Pentcha (手)相近,皆可見一斑矣。

近代計算之進步,全賴有完全之書寫碼(Written numerals)制度,希臘與羅馬之書寫,因缺乏位置原則與符號 0,故其計算方法,極爲幼稚。Whitehead 教授謂"在阿拉伯數碼未輸入以前,乘法至爲繁難,除法每非天才莫辦。現代因強迫教育之影響,西歐人民,不論貴賤,皆能演算大數之除法,如起希臘算學家於九原,使聞其事,其所受之震驚必極巨,因彼認此爲不可能之事也。"(4)又在十五世紀時,德國有一商人,欲使其子受商業方面之高等教育,乃請益於一名教授,乞示以求學之所。該教授告以如商人僅欲其子熟嫻加減法,則於德國大學中或可得之;如欲習乘除,則除赴意大利留學外,更無他處可獲得此項知識云。(5)當時簡陋之情形,亦足令人發噱矣。彼羅馬人以武功政治著稱,發揚學術,非其所長,蓋重實際而輕理智,不能增進先民知識,淺薄之譏,(6)自無可諱,亦殆不足責;獨怪天才卓絕之希臘民族,對於文哲科學各方面,皆嘗建樹不朽之偉業,至今爲吾人所矜式,乃對此紀數之法,竟毫不講求,致使算術之於幾何,瞠乎其後者甚遠。蓋希臘人之幾何天才雖高,而對符號推演之能力則低,與印度人適相反。算學技術上之基礎,厥爲推證與計算,缺其一則難收相輔之效,大業之完成,職是遲至千載後,惜哉!

(3) Fine: The Number System of Algebra, p. 83 下註。

(4) Whitehead: Introduction to Mathematics, Chap. V.

(5) Dantzig: Number, p. 25.

(6) Whitehead: Introduction to Mathematics, Chap. III. 末。

據 Hankel 之懸揣,印度記數法之獨稱完備,係因宗教上大數之應用特多。至於發明之時代,已無從稽考。所可知者,距今千三百年以前,其法已完備可用。(7)此法之傳入歐洲,約爲公元十三世紀事。傳播之功,阿拉伯人有足多者。考"零"一字之語源,在印度爲 Sunya, 其義爲"空",並未涵有"虛無"之意。十世紀阿拉伯人採用時,譯之爲 Sifr, 意義未改。迨十三世紀傳入意大利時,受拉丁化,而有 Fephirum 一字,更經百餘年之演變,爲拉丁文 Zero。但今之英語,仍有 cipher 一字,即由 Sifr 而成。此種符號,雖甚美備,而初傳入時,並不受歡迎,甚至有反對採用者。Sifr 一字,初變爲 Cifra, 當時竟用作一祕密符號。故今之英語,有 decipher 一字, 爲索隱之義。嗣經舊派算盤家(Abacists)與新派計算家 (Algorists)之對峙者數百年,至十六世紀,新派終獲完全勝利。(8)

I. 4. 分數　Kronecker 有言,"自然數由於帝力,他種數則由人力,"(9)誠不易之論。今之所謂分數也,無理數也,負數也,虛數也, 皆人心之自由創造, 而可謂爲數之掩飾形式。此等數在今日雖各有其實用上之價值,然當其產生,則多由於數理上之需要,而未嘗有效用上之鵠的。

數之範圍初步擴充,厥爲由自然數而分數。經此等擴充,數得有一新性質,於相應及計算之外,更爲表度量之具。分數之發現極早,世界最古之算數學書 Ahmes Papyrus 名 Directions for Attaining to the Knowledge of All Dark Things,

---

(7) Weber: Enzyklopadie der Elementarmathematik (鄭太朴譯數學全書)第一卷 §7 第4節。

(8) Dantzig: Number. pp. 31—34.

(9) Weber: Jahrb. Deutsch, Math, Ver. (21891—92) p. 19.

約係公元前 1700 年前之作品,其中已有一種記分數之符號。是法化分數爲自然數倒數(稱爲單位分數 unit fraction, 因其分子爲 1 也)之和,而於整數上加一點,以表此種倒數。例如 $\frac{2}{5}$ 記爲 $\dot{3}\ \dot{1}5$, $\frac{2}{13}$記爲 $\dot{8}\ \dot{5}2\ 1\dot{0}4$, 即 $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$ 也。(10)

至於分數之理論,始於 Fuclid, 係以幾何形式表出之,即其所謂可通約量之比,但氏未嘗視此等比值爲一數。當時希臘人對純正算術理論與實用計算方法,區別甚嚴,而視分數之問題,屬於後者。直至公元 300 年時, Diophantus 始確用分數,自是分數方獲得其算術上之地位,以迄於今。

分數之意義, 可自二方面論之。(11) 如就其實際上解釋入手,並由是說明其運算規律,則爲吾人初習算術時之方法。如據形式上觀點,則分數爲二整數所構成之一數耦(Number pair),猶之二幾何量所定之比, 而不復以分數爲一表可度量之單純本質。如是則分數之算律,應在形式融和之限制下定之。前說爲心理的,後說爲邏輯的,前說意味豐富,後說理解謹嚴,各有其得失,在中等算學教育上,教學時自以採具體而富實際意義之前說爲宜,是不待言矣。

I. 5. 無理數 無理數概念, 導源於幾何直覺及其需要。(12)此種貢獻,亦出自希臘人之手。公元前 550 年頃, Pytha-

(10) Fine: Number System of Algebra, §91.

(11)參看Klein-Hedrick: Elementary Mathematics, I pp. 28—30.

(12)本節所備多據 Bell: Queen of Sciences (劉乙閣君譯科學女王), Chap. IV, Fine: Number System of Algebra, §§94, 95, 106, 121, 129, Klein: Elementary Mathematics, pp. 31—35.

goras 發現其著名之定理，因而引起幾何上之不盡根問題。相傳氏創獲此理時，曾宰牛百千，廣設盛筵，以誌慶賀，其重視斯理，可以想見。Pythagoras 本人對於此種新數之認識，至如何程度，頗屬疑問。有謂氏爲首先認識無理數者，亦自傳氏之宇宙論，以一切數皆爲有理數，聞有人指$\sqrt{2}$爲無理數者，大爲不懌，竟誘而溺之，以爲破壞其理論者戒。但今可徵信者，公元400 年左右 Plato 時代，無理數之性質，已獲相當之了解，有謂 Plato 曾嘗不知$\sqrt{2}$爲無理數者，非人而實獸云。無理數最初之系統理論，見 Euclid Elements 第十卷，其形式全爲幾何，所論者非數之有理與無理，乃二線段之可否通約。希臘人之觀點，率皆爲幾何的，不獨 Euclid 如是也。氏並曾述及較複雜之形式如$\sqrt{a+\sqrt{b}}$，一般言之，其所論者，限於由迭次開平方而得之式，蓋如此卽可藉規矩作圖。至於無理論之普通概念，希臘人固未嘗知之；亦未嘗如吾人今日之所爲，從算術之觀點求一方法，藉有理數以確定無理數。然 Euclid 雖只涉及二線段之比，但其取此等比之方法，一如今日吾人所施於實數者；細考其定義，卽可見其說實爲現代 Dedekind 無理數論之前驅。蓋 Dedekind 創之新說之動機，乃欲補救解析學中應用幾何直覺之缺陷，由推求"連續"之定義，遂確立無理數之基礎焉。(13)

至於無理數之一般概念，實始於十六世紀末葉，而係受小

---

(13) Dedekind 於 Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872)一書（朱言鈞君譯連續性與無理數，載光華第四卷第五期）之序中，謂以『幾何方法說明解析學中概念或證明解析學中定理時，在學理上爲一絕大缺點……必得一純粹論數之原則 爲解析學立一不拔之基……所謂連續，其義何指，未嘗有一精密定義。……』

數引入後之影響。由有理數化成之小數，不為有限，則必循環，因之勢必思及無限而又不循環之小數，如此即由差近之方法，得由無有理數以定無理數，而開 Cantor, Weierstrass 諸氏理論之先河。無理數嚴密理論之基礎，直至十九世紀中葉，始克奠立。1869 年法人 Méray 氏於 Revue des Societes savantes, sc. math. (2) 4 中刊布其新說，至 1872 年 Weierstrass, Dedekind, Cantor 三氏不期而同時發表其理論。(14) Méray 與 Cantor 二氏之方法，皆用有理數所成之纇數，Weierstrass 氏方法，為其特例。Dedekind 則創"切斷"(Schnitte) 之說，其觀點雖異，實則可證明二者相通。Cantor 方法較 Dedekind 者為易於伸引，是其優點；但在形式上，則不若後者易使無理數眞義明確，(15)斯亦寸有所長，尺有所短耳。

無理數之算術理論既立，往昔幾何中直覺所攝取之事理，遂得謹嚴之根據。Cantor 訂立數與直線上點成單應之假設，為解析幾何奠一不拔之基，而空間之意義，亦得藉數以表之。關於此，(16)吾人可分空間之感覺為二方面。由直接度量所控制者，為經驗上之直覺；由心靈抽象所構成者，為內在之觀念，設吾人欲測定二點間之距離，其結果之精確程度有一限制。據

(14) Weierstrass 之意見，係 Heine 氏代爲發表，載 Crelle, Vol. 74, p. 174; Cantor 之說，載 Math. Annalen, Vol. 5, p. 123, 文中揭示數與直線上點之單對應，今稱 Cantor 假設。Dedekind 之名著 Stetigkeit ……係在 Braunschweig 地方出版。

(15)參考 Hobson: Theory of Functions of a Real Variale Vol. I, §§27, 33—35.

(16)下文節取 Klein-Hedrick: Elementary Math. pp. 35--37 之說。

光學之理，物件度量之小於 $\frac{1}{1000}$mm 者，即最佳之顯微鏡，亦不克辨別之。是以直接用光學器械所測得之長，以 mm 爲單位表之，僅首三位小數有意義。逾乎此，非愚昧即欺人之談。是爲經驗直覺所得之空間。若空間之內在觀念，則誠如莊子所言，"一尺之棰，日取其半，萬世不絕，"其精密可達無限之域。由是以論算學，亦可分爲差近與絕對精確二方面，後者由於理智上一種要求，又爲前者之根據，而實際上致用，則不得不讓前者專美。無理數概念，屬於精確算學，而實際運算時，率取其差近之有理值代之。就數學原則論，無理數之精確理論，既難引起一般中學生之興趣，尤非大多數學生所能領悟。差近程度達於 $\frac{1}{1000}$mm 時，已足使學生感覺神奇，爲始料所不及此；除特賦算學天才之中學生，應予以完備之解釋外，對中材生僅能示以實例即可。如教師能使高材生獲得所需之補充說明而未嘗犧牲多數學生之興趣者，則其教學之技能，殊足讚美矣。

I. 6. 負數[17]　分數與無理數之理論，導源於幾何，已如前述。負數與虛數，則係應方程式解法之需要而生。在今日理論之立場，負數遠不如無理數之艱深，然考歷史上經過，則無理數概念，易於爲人接收，負數則歷長期之奮鬬，始獲公認。蓋在數之形式理論未完成以前，一種數苟不得具體之實際說明，則不易取得其在數系內之地位。分數與無理數，由幾何直觀而得，其具體之形象可見，而由方程式解法所得之負數與虛數，其具體意義，尙有待尋求，二者認識上之難易，自適然不同，非無故也。希臘人對於負數，未嘗有所論列，首先提負根者，爲印

(17) Fine: Number System of Algebra, §125.

度人 Bhaskara，乃公元 1150 年之事，但氏謂"負根不能用，因一般人對於負數未嘗承認。"蓋雖知有此，仍摒之於"數"以外也。迨對正負量相對之實際意義，如資產與負債，相反方向之距離，當時印度算學家，已加採用。要之，彼等對於形數之別，不如希臘人之理論謹嚴，其思想之緻密，自有遜色；然形數之溝通，最足促數理之進步，其所得亦足償所失而有餘矣。在歐洲方面，直至文藝復興時，負數始漸見採用，然持異議者，尚大有人在。十六世紀之偉大代數學者法人 Vieta (1540–1603) 對於方程式負根，依然摒棄；德人 Stifel 於 1544 年宣稱此種數爲"荒謬"，謂自零減去"零上實數"所得爲"無稽之零下"。文藝時代之算學家，對於此點，僅 Cardan (1501—1570) 與 Bombelli 有較深遠之見解。(18)迨 1637 年 Descrates 之劃分時代偉著 Géometric，附其哲學名著 Discours de la Méthode 後刊行，由坐標之規約，使負數在算學中得一新地位，如此不特求得一眞實之解釋，且顯出負數之能力，非此不足解除不易避免之困難。代數中採用負數之情形，隨 Descrates 幾何中解析方法以俱進。負數雖因其具體性與應用性，而獲世人公認，然其在純正代數上之地位，尚待確定。英人 Peacock 於 1830 年刊布 Arithmetical and Symbolical Principle of Permance of Equivalent Forms 之說。1867 年，德人 Hankel 所著 Theorie der Komplexen Zahlsysteme 一書中，更推衍其理。此說大意謂算法代數中之符號，僅表正數，遇減法，須受被減數大於減數之區別，而符號代數中則否。吾人於是假設算術代數中關於符號演算之定律，毋需改變，即能應用於符號代數。

(18) Cajori: History of Malh, pp. 93, 141

換言之，運算本身及其結果之意義，由運算之規律確定之。負數相乘之符號律（及分指數意義之規定），卽由此而生。[19] 努力於此律之證明者，初頗不乏其人，今則已知其爲不可證。吾人所當注意者，爲此律在邏輯上之和諧性，及其在實際上之應用性。至於所以如是規定者，乃欲求在某種限制（如形式永住原則），及某種實例下之便利，而非有邏輯上之強制性。夫負數及其運算法則之引入，爲算學上一大進步，一方面數之意義有新拓展，往昔算學家所固執數必表量之觀念，至此打破，而加入"向"之區別。一方面因其形式符號上意義，又可增強數之抽象性。負數旣有如是偉大之功能，其運算法則，復能維持已有之定律，不生矛盾，乃反不受歡迎，備遭排斥，於是見人類之囿於積習，每爲革新之障礙。Klein 氏謂，"代數符號每較採用者爲更合理"，誠慨乎言之矣。負數概念之完成，歷悠久時期之有機生長，而非由於一二思想家有意識之反省，亦可見純正邏輯在建設新觀念上之用途，在於調整，而不能作建設途徑之南針。因如僅顧及邏輯上和諧性之要求，則尙有他種系統存在，其去取又何能定乎？[20]

I. 7. 虛數　虛數之萌芽，亦在代數方程式中發育。[21] Bhaskara 已指出負數平方根之不可能，雖未克認識虛數，已能明瞭其發生之原因。文藝復興前之歐洲算學家，對於負數尙未能認識，其不能了解虛數，自不待言。Cardan 於 1545 年

(19) Fine: Number System of Algebra, §§118, 125.

(20)參考 Klein: Elementary Math, p. 27 及 Young: Fundamental Concept of Algebra and Geomery, pp. 108—112, 115.

(21) Fine: Number System of Algebra, §§104, 115, 124, 126, 127; Klein, p. 56; Cajori, p. 333.