

大學用書

微分方程式

D. A. MURRAY 著

周夢鑾 譯

龍門聯合書局出版

大學教本

微分方程式

INTRODUCTORY COURSE
IN
DIFFERENTIAL EQUATIONS

DANIEL A. MURRAY, PH.D.

周夢麐譯

龍門聯合書局印行

例 言

1. 本書之遙譯在便利學者，使其免於因文字之隔閡而增加學習之困難。

2. 本書乃根據原著改訂本(1898)第二十二版譯成。原書印刷之錯誤，爲譯者所已發現者，譯本中均已訂正。其文筆間有不易使人明瞭之處，爲存真起見，仍照原文譯出，但另加註解，以便初學。

3. 所有數學及物理專名均以教育部公佈之“數學名詞”及“物理學名詞”爲根據；其爲兩書所未載者，則依通用之詞譯出；如兩書未載，且亦無通用之詞時，始自行杜撰，惟爲慎重起見，特將此類自行撰擬之詞，於書末另附一表，以就正於高明，并望教育部能續予公佈。

4. 人名之翻譯，除“數學名詞”中已有者外，根據商務印書館之中外人名地名表，或自行音譯。

5. 原著所引參考書刊，其著者與名稱均仍照原文刊出，未予翻譯，以便查閱。

6. 本書譯成後，經范會國教授詳予指正，謹此申謝！

7. 本書倉卒譯成，譯者學力有限，舛誤之處，在所難免，教者學者，幸不吝指正。

一九四七年八月十日周夢麟識

原 序

本書之目的在對於解微分方程式所用之若干方法，予以一簡明之陳述。於學習前，必先具有關於基本積分公式之知識，故即稱之為積分學入門中補充之一章，亦未嘗不可。

著者乃一教師，於歷年經驗中，相與接觸之學生凡二類，即依此二類學子之需要，確定本書之性質。其一類為研習物理學與工程學者，彼等之希求僅在應用此一學科作為一種工具，而絕少餘暇致力於一般理論之探求。因此之故，本書所作理論之解釋，在不妨礙清晰與健全之推理限度內，遂力求其簡要，但對於例題之演解，幾又無處不求其周詳，而於實際之應用，尤為關切，特列兩章以專論幾何學與物理學之問題。

本書之另一對象，為攻習一般文理科學程之學子，彼等可有較為充裕之時間以滿足彼等在此一學科中所感引之興趣；而其中欲進修高等數學者亦大有人在。因此，為此等學生計，遂在本書之後揭載附註多則。其中若干則為本書所已論及或未完全證明之定理的論證。此等討論，如在當時即不厭求詳，或反足使初學者氣為之餒，於是乃將若干定理之嚴格的證明稍予延擱，待學者對於習題之演習已具相當之熟練後再行提出，或反覺其較為有益也。

全書中有甚多歷史性及傳記性之腳註，頗饒意味。為使初學者對此學科，能具一較廣而較佳之概念起見，於微分方程式之研究

中，指示其發展之最主要路線，似為理所當然之事，若干腳註之提出，蓋即着眼於此耳。此外，為達此目的計，復在本書正文中加置少數節目，藉以敘述里卡提 (Riccati)，貝塞爾 (Bessel)，勒襄特 (Legendre)，拉伯拉斯 (Laplace) 及布阿松 (Poisson) 諸氏之方程式與夫超越幾何級數之方程式，此在一般入門書中，均不加論列者也。

在若干節目中，對於論點之研討，未免出之於簡略，因特列舉若干參考書篇，於其中儘可獲得較為充分之解釋與夫更進一步之發展也。此等參考資料之列舉，殆均以學者易於接近之來源為限，而引列特多者為蒲利 (Boole)，福爾賽斯 (Forsyth) 及約翰孫 (Johnson) 諸氏用英文所寫之標準論著。

對於僅能以極少時間從事此項研究之學子，特於目次之後，將一種學習捷程 (short course) 之主要章節一一指明。

所有習題中，新創者雖非少數，但多數均採自著名大學之試卷中。亦有不少習題，為微分方程初等教本中所共通者，蓋因其常應用於力學問題，或因其本身即為一優越習題之故耳。

此外義應申述者，為本人所受各方之嘉惠。

在草撰本書時，本人曾參考甚多之著作與報告；而特別在本書之主要部分幫助尤多者，則為蒲利，福爾賽斯與約翰孫諸氏之大著，以及莫爾干 (De Morgan)，毛紀諾 (Moigno)，胡依爾 (Hoüel)，勞倫特 (Laurent)，包辛格 (Boussinesq) 與曼辛 (Mansion) 諸氏著作中關於微分方程式之篇章。予作者以啓示者，則有貝爾萊 (Byerly) 在其積分學中刊佈之“解微分方程式之鑰” (Key to the

Solution of Differential Equations), 奧斯朋 (Osborne) 之例題與規則 (Examples and Rules), 以及威廉孫 (Williamson), 愛德華滋 (Edwards) 與斯太紀曼 (Stegemann) 諸氏關於微積分學之論著。喜爾柏特教授 (Prof. David Hilbert) 在哥庭根講座中之筆記亦曾引用。至於有關若干歷史性及其他性質之註解, 其材料與啓示則得之於克累格 (Craig), 焦爾丹 (Jordan), 匹卡德 (Picard), 科賽特 (Goursat), 科聶斯拜格爾 (Koenigsberger) 與許萊辛格爾 (Schlesinger) 諸氏關於微分方程式之著作; 以及貝爾尼氏之福里哀級數與球函數 (Fourier's Series and Spherical Harmonics), 卡焦梨 (Cajori) 之數學史 (History of Mathematics) 與夫梅里曼 (Merriman) 與烏德華德 (Woodward) 之高等數學 (Higher Mathematics) 中關於雙曲線函數調和函數及近代數學史諸章。其關於力學及物理學各題則採自太特 (Tait) 與斯替爾 (Steele) 合著之質點動力學 (Dynamics of a Particle), 戚威特 (Ziwet) 之力學 (Mechanics), 湯姆孫 (Thomson) 與太特合著之自然哲學 (Natural Philosophy), 艾姆太幾 (Emtage) 之數理電磁論 (Mathematical Theory of Electricity and Magnetism), 拜代爾 (Bedell) 與克累荷爾 (Crehore) 之交流學 (Alternating Current), 以及拜代爾之變壓器原理 (Principles of the Transformer)。

對於在此一工作中曾經予我鼓勵并給我助力之友人亦應藉此機緣一表我之謝忱。首先須特別致謝者為康乃爾大學之麥馬韓教授 (Prof. James McMahon), 因其以友誼之態度, 提出忠告與批

評，對我曾予以極大之裨益也。此外則應感謝康乃爾物理系之梅銳特 (E. Merritt) 與拜代爾 (F. Bedell) 教授，及數學系之譚婁 (Tanner) 教授，邵雷爾 (Saurel) 先生與阿倫 (Allen) 先生所賜之有價值之協助與啓示。麥馬韓教授及阿倫先生於本書印刷期中且曾助我察閱校樣。至於爲我驗算甚多之習題者則康乃爾畢業生蒲尼 (H. S. Poole) 女士與麥尼爾 (M. Macneill) 君也。

D. A. Murray,

1897 年 4 月，於康乃爾大學。

第二版序

吾若干數學同事，對於本書，曾提出友善之評論，將藉此機緣，向彼等一表謝忱。其中曾經指出錯誤，發表批評，與夫提供改進本書之意見者，尤覺可感。此等意見中，有數點，於草擬此第二版時經已採用。至於習題之答案，目今若竟告無誤，則幸甚焉。

D. A. Murray,

1898 年 6 月，於康乃爾大學。

目次

包含二變數之方程式

第一章 定義 微分方程式之構成

節數	頁數
1. 常微分方程式與偏微分方程式 階與次	1
2. 解與積分常數	2
3. 微分方程式之推求	4
4. 通解 特解 奇解	6
5. 一階一次微分方程式之幾何意義	8
6. 一次或一階以上微分方程式之幾何意義	10
第一章習題	

第二章 一階及一次方程式

7. 引言	14
8. $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$ 型之方程式	15
9. x 與 y 相齊之方程式	16
10. x 與 y 之一次非齊方程式	17
11. 恰當微分方程式	18
12. 一階方程式為恰當方程式之條件	19
13. 求恰當微分方程式之解的規則	20
14. 積分因子	22

15. 積分因子爲數無窮	22
16. 用視察法求積分因子	23
17. 求積分因子之規則 規則 I 與 II	24
18. 規則 III 與 IV	25
19. 規則 V	26
20. 線性方程式	27
21. 可化爲線性型之方程式	29
第二章習題	30
第三章 一階而非一次之方程式	
22. 方程式之能分解爲一次分方程式者	32
23. 方程式之不能分解爲分方程式者	33
24. 方程式之可解得 y 者	34
25. 方程式之可解得 x 者	35
26. 方程式之不含 x 或不含 y 者	35
27. x 與 y 相齊之方程式	36
28. x 與 y 之一次方程式 克來洛方程式	37
29. 概要	39
第三章習題	39
第四章 奇解	
30. 參考代數學及幾何學	41
31. 判別式	41
32. 包絡	42
33. 奇解	43

34. 克來洛方程式	45
35. p 及 c 判別式關係中可能出現之關係(非解)	45
36. 自切點軌跡之方程式	45
37. 結點軌跡之方程式	46
38. 歧點軌跡之方程式	48
39. 概要	49
第四章習題	50
第五章 在幾何學力學及物理學方面之應用	
40. 引言	51
41. 幾何問題	51
42. 幾何學之已知件	52
43. 例題	53
44. 有關軌線之問題	55
45. 軌線 直角坐標	55
46. 正交軌線 極坐標	56
47. 例題	57
48. 力學及物理學問題	59
第五章習題	60
第六章 常係數線性方程式	
49. 線性方程式定義 補函數 特積分 全積分	64
50. 係數爲常數而右端爲零之線性方程式	65
51. 輔助方程式具有等根之例	66
52. 輔助方程式具有虛根之例	67

53. 記號 D	68
54. 關於 D 之定理	69
55. 輔助方程式具有重複根時另一求解之方法	70
56. 係數為常數與右端為 x 函數之線性方程式	71
57. 記號函數 $\frac{1}{f(D)}$	71
58. 特積分求法	73
59. 在某種情況中求特積分之簡法	74
60. 積分之與右端中 e^{ax} 型之項相當者	75
61. 積分之與右端中 x^n 型之項相當者	76
62. 積分之與右端中 $\sin ax$ 或 $\cos ax$ 型之項相當者	77
63. 積分之與右端中 $e^{ax}V$ 型之項相當者	79
64. 積分之與右端中 xV 型之項相當者	80

第六章習題	81
-------	----

第七章 變係數線性方程式

65. 齊性線性方程式 第一解法	83
66. 第二解法:(A)求補函數	85
67. 第二解法:(B)求特積分	86
68. 記號函數 $f(\theta)$ 及 $\frac{1}{f(\theta)}$	87
69. 特積分求法	88
70. 積分之與右端中 x^n 型之項相當者	90
71. 可化為齊性線性型之方程式	91

第七章習題	91
-------	----

第八章 恰當微分方程式及特型方程式 用級數解法

72. 引言	93
73. 恰當微分方程式定義	93
74. 恰當微分方程式之判別準則	93
75. 恰當方程式之積分法 第一積分	95
76. $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ 型之方程式	97
77. $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y)$ 型之方程式	97
78. 方程式之不直接含有 y 者	98
79. 方程式之不直接含有 x 者	99
80. 方程式之其中 y 僅出現於相差兩階之二導數中者	100
81. 方程式之其中 y 僅出現於相差一階之二導數中者	101
82. 線性方程式之用級數解法	102
83. 勒襄特, 貝塞爾, 里卡提及超越幾何級數之方程式	106
第八章習題	108
第九章 二階方程式	
84. 引言	110
85. 以一已知積分表達全解	110
86. 各積分間之關係	111
87. 用視察法求解	112
88. 用運算因子求解	113
89. 用二個第一積分求解	114
90. 改變因變數使方程式變換	115
91. 移去第一階導數	116

92. 改變自變數使方程式變換	118
93. 二階方程式解法一覽	119
第九章習題	120
第十章 幾何學及物理學中之應用	
94. 引言	122
95. 幾何學之問題	122
96. 力學及物理學之問題	123
第十章習題	125

包含二個以上變數之方程式

第十一章 具有二個以上變數之常微分方程式

97. 引言	128
98. 聯立線性微分方程式	128
99. 聯立一階方程式	130
100. 聯立一階方程式積分之通式	133
101. 包含三變數之聯立一階一次微分方程式之幾何意義	134
102. 可積分之單微分方程式 可積分性之條件	136
103. 可積分單微分方程式解法	137
104. 可積分單微分方程式之幾何意義	140
105. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ 之軌跡與 $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ 之軌跡正交	141
106. 不可積分之單微分方程式	142
第十一章習題	143

第十二章 偏微分方程式

107. 定義	146
108. 由消去常數推求偏微分方程式	146
109. 由消去泛函數推求偏微分方程式	147
{ 一階偏微分方程式 }	
110. 非線性方程式之積分: 全積分與特積分	149
111. 奇積分	149
112. 通積分	150
113. 線性方程式之積分	153
114. 相當於線性方程式之方程式	153
115. 拉格郎奇線性方程式解法	154
116. 拉格郎奇解法之核驗	155
117. 含有二個以上自變數之線性方程式	156
118. 線性偏微分方程式之幾何意義	158
119. 施用於某種標準型之特別解法 標準 I: $f(p, q) = 0$ 型之方程式	159
120. 標準 II: $z = px + qy + f(p, q)$ 型之方程式	161
121. 標準 III: $F(z, p, q) = 0$ 型之方程式	162
122. 標準 IV: $f_1(x, p) = f_2(y, q)$ 型之方程式	164
123. 一般解法	166

{ 二階及高階之偏微分方程式 }

124. 二階偏微分方程式	169
125. 易解之例題	170

126. $Rr + Ss + Tt = V$ 之一般解法	171
127. 高於一階之一般線性偏微分方程式	174
128. 常係數之齊性方程式: 補函數	174
129. 輔助方程式有重複根或虛根時之解法	176
130. 特積分	176
131. 常係數之非齊性方程式: 補函數	179
132. 特積分	180
133. 方程式之變換	182
134. 拉伯拉斯方程式: $\nabla^2 V = 0$	182
135. 特例	185
136. 布阿松方程式: $\nabla^2 V = -4\pi\rho$	186
第十二章習題	187

各項附註

A. 化方程式為聯立一階方程式系	189
B. 存在定理	190
C. 積分常數之個數	194
D. 積分常數獨立性之判別準則	196
E. 恰當微分方程式之判別準則	197
F. 線性方程式積分之線性無關性之判別準則	198
G. 線性方程式積分與係數間之關係	200
H. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ 之可積分性的判別準則	201
I. 近代微分方程式論 不變式	203

J. 記號 D	206
K. 用級數解法	207
習題解答	209
人名索引	233
題目索引	235
英漢數學名詞對照表	238
後記	239

學習捷程

(羅馬數字指章數, 阿拉伯數字指節數)

I.; II. 7-16, 20, 21; III.; IV. 30-34; V.; VI. 49-53, 56-62; VII. 65, 66, 71; VIII. 72-81; IX. 84, 85, 87, 90-93; X.; XI. 97-99, 101-103, 106; XII. 107-116, 119-122, 124, 125, 127, 128, 131, 133.

微分方程式

第一章 定義 微分方程式之構成

1. 常微分方程式與偏微分方程式. 階與次. 一微分方程式(differential equation), 即一含有微分(differential)或微分係數(differential coefficient)之方程式.

常微分方程式(ordinary differential equation)者, 即其中所有微分係數僅與一自變數有關之微分方程式也. 例如,

$$dy = \cos x dx, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad (2)$$

$$(y+c)^2 \frac{dx}{dz} + z \frac{dy}{dz} - (y+a) = 0, \quad (3)$$

$$y = x \frac{dy}{dx} + r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = r, \quad (5)$$

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a}{\frac{dy}{dx}}, \quad (6)$$

均為常微分方程式.

偏微分方程式(partial differential equation)者, 即其中