高等学校教学用書

綫性代数基础

A. И. 馬力茨夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

綫性代数基础

A. И. 馬力茨夫著
柯　召　譯

高等教育出版社

本书系根据苏联国立科学技术理論书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的馬力茨夫 (А. И. Мальцев) 著"綫性代数基础" (Основы линейной алгебры) 1948 年版譯出。現根据原书 1956 年 (第二版修訂本) 修訂。原书經苏联高等教育部审定为綜合大学数学力学系及数理系的教学参考书。可作为我国大学数学专业、力学专业和高等师范学校数学系高等代数課程教学的主要参考书。

綫 性 代 数 基 础

А. И. 馬力茨夫著

柯 召 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·328 开本 850×1168 1/32 印張 10 11/16

字數 272,000 印数 17,001—18,500 定价(4) ¥1.00

1957年7月新1版 1959年4月新2版(修訂本)

1960年2月上海第7次印刷

第二版原序

本書的这一版和1948年發行的第一版有显著的不同。主要的改动是由于我們想使得这本書在大学和师范学院中学習綫性代数的各部分时用来作为教科書能够更为适合。

因此，我們对于若唐法式不采取純几何的推理而只应用代数的方法，这就使得我們的叙述縮短而且删去了关于若唐法式的这一章。

在第一版中，关于二次型和双綫性型問題是分散在几章內討論的，現在把它們抽出集合到一章里面来。此外，对于U空間理論中一些較特殊問題的詳細叙述只把它們的結果写到几处例題和習題中去。这就使得我們能够減少篇幅和把材料分配到較少的几章中而并不損害到叙述的明显性。

这样紧縮后可以不增加本書以前的篇幅而添进去关于多重綫性型和張量的新的一大章，詳細的处理了張量代数的基本問題，因此，亦就增加了一些習題。

利用这个机会，謹向 A. Г. 庫洛什和莫斯科大学代数教研組的成員在教研組会議上对本書的討論以及对于第一版和在新版的准备工作中对作者提出意見的所有同志表示衷心的感謝。

A. И. 馬力茨夫

目　录

第一章　矩陣

§1. 矩陣运算

1. 綫性代数的論題　綫性代数中所研究的有三种东西：矩陣，綫性空間和代数型。这些东西的理論相互間的关联是这样的密切，使得綫性代数的大部分問題在这三种理論的每一种中都有等价的說法。和实际計算結合得最多的是矩陣的观点，所以在本書中我們主要从矩陣来叙述。另一方面，在几何和力学中有很多綫性代数的問題，提出了关于代数型的問題，而要在綫性代数的各种問題中很明确的了解它們的內在联系，就須討論綫性空間。所以熟練从一种理論的叙述轉移到另一种去，是在学習綫性代数时要养成的一种重要的習慣。

从型論来看，綫性代数的內容很自然的分做三个部分——綫性型論，双綫性型和二次型論以及多重綫性型論。严格的說，綫性代数一般是討論綫性型，双綫性型理論和有張量代数形式的多重綫性型的基本理論。多重綫性型論中更細致的問題已經是屬于不变量論的論題，我們不把它們放在本書里面。

綫性代数这个数学分支和数学一样的古老。解綫性方程 $ax+b=$ $=0$ 这个問題可以作为綫性代数的原始問題。虽然这个問題并沒有什么困难，但是用来解出这个問題的原理，亦即綫性函数 $y=ax+b$ 的对应性質是全部綫性代数的想法和方法的原始标本。例如，关于解出有許多未知量的綫性方程組的討論，有这样的想法作为其基础，即把这个方程組逐步的换成像所指出的这种有最簡單形状的方程組。

在創立了解析几何之后，綫性方程組的重要性更加显得突出，关于

空間中平面和直綫的位置的所有基本問題都可以化做綫性方程組来研究。对于含有 n 个未知量和 n 个方程的綫性方程組一般解的公式的研究，已在十八世紀由萊勃尼茨和克萊姆引进了行列式的概念。十九世紀中，除代数和解析几何外，在奥斯特罗格勒达斯基，耶可比（函数行列式），伏龙斯基和其他一些人的工作中，行列式已經滲入到分析中去。和这相平行的，用变量的綫性替代对二次型的变换問題，在解析几何，数論中特别是在理論力学中都很重要。这一个問題对罗巴切夫斯基和黎曼的几何工作也是中心問題之一，因而引起創立关于多維空間包含綫性多維空間（格拉斯曼）的研究。在过去这一世紀中，結合不可易代数（赫密登）的研究在凱萊和薛尔凡斯透的工作中引进了矩陣的研究，对綫性代数的进一步發展占有一个重要地位。到十九世紀末尾，建立起矩陣計算的一些重要分支的研究：关于綫性变换的矩陣的法式（若唐），初級因子（伐愛尔斯脫拉斯），安密达型（安密达）。多維空間微分几何和高次代数型变换理論的發展在十九世紀末創立了張量分析。相对論就是在这个胜利的基础上建立起来的。

在本世紀中，綫性代数获得进一步的發展，如在代数內部，由于应用群和不可換环的概念，綫性代数的基本概念得到新的充实和合用，而在分析中是由于用到了无限維函数空間。应用这些空間的理論到量子力学上更加刺激了这一理論的發展，建立了近代泛函分析的一个重要部分。

2 基域 上面已經說过，綫性代数所研究的基本东西是矩陣，綫性空間和代数型，也就是含有若干未知量的齐次多項式。在确定这些东西的每一种时，都和数的事先选定的某一个集合 K 有关，集合 K 的实际选定对所討論的問題和科学規律發生关系。例如，从代数的观点，如果选取全部复数作为 K，那末我們的結果常常可以得出最完善的公式。相反的，在几何或力学中，常常是基本上只需要討論实数。对于数論有时只要取有理数集合作为我們的 K。所以，为了使得得出来的結

果尽可能的应用到更广泛范圍内的問題，对于选做 K 的这个数的集合，事先不給它定死。我們只假定 K 是一个域，也就是說 K 中任何二数的和，差，积，商都仍然含在 K 里面。但在讀者只对物理学或几何学中綫性代数的应用有兴趣时，以后如果沒有特别声明，都可以把 K 了解成全部实数集合或全部复数集合。

不一定考虑数域来作为K，而可以取任意域作为K，而且有时还可以取不可换域。在理論的很多部份中，域K的任意性，对定理的叙述或証明都无影响，但对于K是不可换域这种情形，需要特别审慎。因此，在以后如果沒有相反的声明，我們都取任意域作为 K，叫做基域。用小写希腊字母 α, β, $\cdots$, τ 做为它的元素并且即使已經知道 K 不是数域，我們还是把它們一概叫做数。

3. 矩陣 取任意域K中 mn 个元素排成 m 行 n 列的一个長方陣形，叫做一个 K 上矩陣。在写出矩陣时，我們把这些元素按次序写在方括弧里面，或在这陣形的两边各加两条直綫。这样，m 行 n 列矩陣写做

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2}\cdots\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

或

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2}\cdots\alpha_{mn} \end{matrix}\right\|,$$

其中元素 α_{ij} 在域 K 中。有时我們用縮写 $\|\alpha_{ij}\|$ 或 $\|\alpha_{ij}\|_{m,n}$ 来代替这种詳細的写法。

当矩陣的行数与列数相同时，叫做方陣，这个相同的行列数叫做方陣的阶。只有一行的矩陣叫做行矩陣。以后我們用大写拉丁字母 A,

B, …来表示矩陣。

当且只当两个矩陣的行数相同，列数相同，而且对应行列中的所有数都相等时，两个矩陣才能相等。因之两个 m 行 n 列的矩陣相等时，它們的元素間有 mn 个等式存在。

4. 矩陣与数的乘法，二矩陣的加法 矩陣的基本运算为矩陣間的加法、乘法以及矩陣与数的乘法。矩陣和数的乘法比較簡單，用数 α 乘矩陣 A 或用矩陣 A 乘 α 的积定义为把 A 中所有元素都乘上 α 后所得出的矩陣，例如

$$5\begin{bmatrix}2 & 3\\7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\7 & -1\end{bmatrix}5=\begin{bmatrix}10 & 15\\35 & -5\end{bmatrix}。$$

所有元素都是零的矩陣叫做零矩陣，用 0 来表示。如要指明零矩陣的行数 m 和列数 n 时，我們記做 0_{mn}。

由数与矩陣的乘法定义，立即得出下面各性質：

(1) $1\cdot A=A$;

(2) $0\cdot A=0$;

(3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$。

如果 A 是一个方陣，那末从 A 可以得出一个行列式，把它記做 $|A|$。已知乘行列式的任一行中諸元素以 α 时，行列式之值变为原值之 α 倍，今以 α 乘 A 时，A 中所有各行之元素均須乘以 α，故如 A 的阶数为 n，則得

$$|\alpha A|=\alpha^n|A|。$$

两个行数相同列数相同的矩陣，可以相加。其和为将行列数相同处的諸数相加后所得出的矩陣，例如

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 3 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 3 & 21\\7 & 0 & -40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 24\\6 & 3 & -32\end{bmatrix}。$$

从这些定义，可以直接得出下面的性質：

(4) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

(5) $A+B=B+A$;

(6) $A+0=A$;

(7) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;

(8) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$。

讀者可自己証明。特别的由等式1、7，可得

$$A+A=2A;\quad A+A+A=3A,\cdots$$

引入記法 $(-1)A=-A$，我們又可得

$$A+(-A)=0;$$
$$(-\alpha)A=-\alpha A;$$
$$-(A+B)=-A-B;$$
$$-(-A)=A。$$

为了簡便，我們平常把 $A+(-B)$ 写作 $A-B$。

5. 矩陣的乘法　矩陣和矩陣的乘法比起它的加法，矩陣和数的乘法来都要复杂些。設二矩陣为 A，B。A 的列数等于 B 的行数，即

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots\alpha_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2}\cdots\alpha_{mn}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\cdots\beta_{1p}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\cdots\beta_{2p}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2}\cdots\beta_{np}\end{bmatrix},$$

则其乘积为矩陣

$$C=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\cdots\gamma_{1p}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\cdots\gamma_{2p}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2}\cdots\gamma_{mp}\end{bmatrix},$$

其中　$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nj}\ (i=1,\cdots m;\ j=1,\cdots,p)$。

記 A 对 B 的乘积为 AB，即 $AB=C$。例如

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & \delta & \varepsilon\\ \lambda & \mu & \nu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\gamma+\beta\lambda & \alpha\delta+\beta\mu & \alpha\varepsilon+\beta\nu\\ \alpha_1\gamma+\beta_1\lambda & \alpha_1\delta+\beta_1\mu & \alpha_1\varepsilon+\beta_1\nu\\ \alpha_2\gamma+\beta_2\lambda & \alpha_2\delta+\beta_2\mu & \alpha_2\varepsilon+\beta_2\nu\end{bmatrix}。$$

矩陣相乘的法則可以总結为：二可乘矩陣的乘积为一矩陣，其第 i 行第 j 列的元素，为第一矩陣第 i 行諸元素，与第二矩陣第 j 列諸元素，依序逐对相乘所得出的乘积之和。

二矩陣的乘积一般和它們的次序有关，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -14 & -7 \\ -26 & -8 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 75 & 131 \\ -55 & -97 \end{bmatrix}。$$

有时两矩陣对于某一順序相乘，可以得出乘积，但換成相反次序后，乘法就不可能。

由矩陣的乘法定义，可推出下面的关系：

(9) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$。

事实上，設矩陣 A 的元素为 $\alpha_{ij}(i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$，矩陣 B 的元素为 $\beta_{jk}(j=1, \cdots, n; k=1, \cdots p)$。由乘法規則，知矩陣 $\alpha(AB)$ 中第 i 行第 k 列的元素为

$$\alpha(\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nk})。$$

同理，知矩陣 $(\alpha A)B$, $A(\alpha B)$ 的第 i 行第 k 列元素各为

$$(\alpha\alpha_{i1})\beta_{1k}+(\alpha\alpha_{i2})\beta_{2k}+\cdots+(\alpha\alpha_{in})\beta_{nk},$$

$$\alpha_{i1}(\alpha\beta_{1k})+\alpha_{i2}(\alpha\beta_{2k})+\cdots+\alpha_{in}(\alpha\beta_{nk})。$$

因为这三个式子是相等的，故知关系 9 成立。用相类似的方法，可以証明下面的性質：

(10) $(A+B)C=AC+BC$;

(11) $C(A+B)=CA+CB$。

由关系 10 和 11 可得出下面的規則：以几个矩陣之和乘几个矩陣之和时，为将第一矩陣和中每一矩陣乘第二矩陣和中每一矩陣把这些乘积加后所得出的和。

我們已知矩陣的乘法是不一定可易的，就是說 AB 不一定等于

BA，但是第二算术定律——可群律——对于矩陣的乘法是適合的①。

(12) $A(BC)=(AB)C$。

为了証明它，我們設

$$AB=M,\quad BC=N,$$

且把 M，N 的元素各記做 μ_{ik}，ν_{jl}。由矩陣的乘法，知

$$\mu_{ik}=\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\cdots+\alpha_{in}\beta_{nk},$$

$$\nu_{jl}=\beta_{j1}\gamma_{1l}+\beta_{j2}\gamma_{2l}+\cdots+\beta_{jn}\gamma_{nl},$$

其中 α_{ij}，β_{jk}，γ_{kl} 为矩陣 A，B，C 的元素。以 M 乘 C 得 $(AB)C$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$\mu_{i1}\gamma_{1l}+\mu_{i2}\gamma_{2l}+\cdots+\mu_{ip}\gamma_{pl}=\sum_k\sum_j\alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}。$$

同理，以 A 乘 N，得矩陣 $A(BC)$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$\alpha_{i1}\nu_{1l}+\alpha_{i2}\nu_{2l}+\cdots+\alpha_{in}\nu_{nl}=\sum_j\sum_k\alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}。$$

这两个式子，除开加法的次序有所不同外，是完全相等的，故知等式 12 是真确的。

由等式 12，知道对于有一定順序的矩陣 A，B，C，…，D 的乘积可以不必在它們的中間另加括弧，所以我們不但可以說及两个矩陣的乘积，亦可說及多个矩陣的乘积。例如我們可以简單的說四个矩陣的乘积 $ABCD$，因为它和

$$[(AB)C]D,\ [A(BC)]D,\ A[(BC)D],\ A[B(CD)],\ (AB)(CD)$$

这五个乘积是一个东西。对于普遍的情形可以由可群律 12，用数学归納法来証明。

最后，我們指出，二方陣的乘积的行列式等于它們的行列式的乘积，即

$$|AB|=|A|\cdot|B|。$$

① 因为矩陣的加法与乘法并不是对任何两个矩陣都能施行，要受到它們之間行列数的某些限制。等式 10，11，12 的意义是說，如其某一节可以相乘或相加，則其另一节亦可应用运算結合而且两节之結果相等。

这一个結果是同关于行列式的乘法的已知定理符合的。

6. 矩陣的乘冪 我們說过不是任何两个矩陣都是可以相加或相乘的，只有它們的行列数之間有一定的关系时才可以进行。但当我們只处理所有 n 阶的方陣时，就不会有这一个不方便的情形，任何两个 n 阶方陣都可以相加，相乘或和某一个数相乘后仍然得出一个 n 阶方陣。在本段与次段 (6, 7) 中，我們所討論的都是阶数同为 n 的方陣。

对角綫上的元素均为 1 而其他元素均为零的方陣叫做么方陣，記之为 E：

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & 1\cdots 0\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\cdots 1\end{bmatrix}。$$

显然由乘法法则对于任何方陣均可得

$$AE=EA=A。$$

此等式决定方陣 E 的基本性質。型如方陣

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots 0\\ 0 & \beta\cdots 0\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\cdots \gamma\end{bmatrix}$$

的叫做对角形方陣。

从运算規则显然得出二对角形方陣之和与积仍为一对角形方陣：

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots 0\\ 0 & \beta\cdots 0\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\cdots \gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\cdots 0\\ 0 & \beta_1\cdots 0\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\cdots \gamma_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta+\beta_1 & \cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & \cdots & \gamma+\gamma_1\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & 0\cdots 0\\ 0 & \beta\cdots 0\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\cdots \gamma\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0\cdots 0\\ 0 & \beta_1\cdots 0\\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0\cdots \gamma_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta\beta_1 & \cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & \cdots & \gamma\gamma_1\end{bmatrix}。$$

现在来討論元素在域 K 中的任何一个 n 阶方陣。如果有这样的方陣 X 存在,使得

$$XA=AX=E,$$

我們說 A 是可逆的,而且把 X 叫做 A 的逆方陣,写做 $X=A^{-1}$。容易看出,可逆方陣只有一个逆方陣,所以 A^{-1} 的表法是一意的。事实上,如果 Y 也是 A 的逆方陣,那末用 X 来左乘关系式 $AY=E$,我們得出 $XA\cdot Y=X$,也就是 $Y=X$。同样的,用 X 右乘 $YA=E$ 得出 $Y=X$。

因之,如果方陣 A 是可逆的,那末方程

$$XA=E,\ AX=E$$

的任何一个都有一个而且只有一个解 $X=A^{-1}$。

逆方陣很容易利用它的行列式来求出。設 $A=\|a_{ij}\|$。用 A_{ij} 表方陣 A 的行列式中 a_{ij} 的代数余子式(余因子)用它們来构成方陣

$$B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中第 i 行的元素为 $|A|$ 中第 i 列的代数余子式。方陣 B 叫做 A 的附加方陣。它有下面的基本性質:

$$AB=BA=|A|\cdot E。\tag{1}$$

这个等式可以这样証明:方陣 AB 的第 i 行第 j 列元素为

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

由行列式的性質,知当 $i\neq j$ 时此式为零,当 $i=j$ 时,此式等于 $|A|$,故得 $AB=|A|\cdot E$。同理知 $BA=|A|\cdot E$。

因么方陣的行列式为 1,由等式(1)得

$$|AB|=|A|\cdot|B|=||A|\cdot E|=|A|^n\cdot|E|=|A|^n,$$

即

$$|A|\cdot|B|=|A|^n。\tag{2}$$

引入下面的定义：当 A 的行列式不为零时，称 A 为满秩方陣，否則称为降秩方陣。

設 A 为一满秩方陣，B 为其附加方陣。因 $|A|\neq 0$，在（2）的两节約去 $|A|$ 得 B 的行列式

$$|B|=|A|^{n-1}。\tag{3}$$

乘等式（1）以 $|A|^{-1}$ 得

$$A\cdot|A|^{-1}B=|A|^{-1}B\cdot A=E。\tag{4}$$

这样一来，

$$A^{-1}=|A|^{-1}\cdot B。\tag{5}$$

所以，特別的，得出所有满秩方陣都是可逆的。如果方陣 A 是降秩的，那末从 $XA=E$ 轉移到行列式，得出矛盾等式 $|X|\cdot|A|=1$，也就是 $|X|\cdot 0=1$。这就証明了，方陣的可逆性和满秩性这两个概念是等价的。

設 A 为一满秩方陣，則 $AA^{-1}=E$。两节取行列式之值，得

$$|A|\cdot|A^{-1}|=1,$$

即

$$|A^{-1}|=|A|^{-1},\tag{6}$$

故知方陣之逆的行列式等于其行列式之倒数。当 A 为满秩时，A^{-1} 显然满秩，故有方陣 $(A^{-1})^{-1}$。由逆方陣的性質知有

$$A^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1}=E,$$

用 A 来左乘，得

$$(A^{-1})^{-1}=A。\tag{7}$$

我們很容易得出求方陣积的負一次方的規則。設 A, B, C 为满秩方陣，則

$$ABC\cdot C^{-1}B^{-1}A^{-1}=E,$$

因此

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}。\tag{8}$$