

高等學校教學用書



綫性代數基礎

A. И. 馬力茨夫著

高等教育出版社

0151-2 高等学校教学用书
16-2.

3.15
7
13.15
7-2
0.3
0.3



綫性代数基础

А. И. 馬力茨夫著
柯 召 譯

高等教育出版社

本书系根据苏联国立科学技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的馬力夫夫 (А. И. Мальцев) 著“线性代数基础” (Основы линейной алгебры) 1948 年版译出。现根据原书 1956 年 (第二版修订本) 修订。原书经苏联高等教育部审定为综合大学数学力学系及数理系的教学参考书。可作为我国大学数学专业、力学专业和高等师范学校数学系高等代数课程教学的主要参考书。

线 性 代 数 基 础

А. И. 馬力夫夫著

柯 召 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市书刊出版业营业许可证出字第 054 号)

商务印书馆上海厂印刷 新华书店发行

统一书号 13010·323 开本 850×1168 1/32 印张 10 11/16
字数 272,000 印数 17,001—18,500 定价 (4) 洋 1.00

1967 年 7 月新 1 版 1969 年 4 月新 2 版 (修订本)

1980 年 2 月上海第 7 次印刷

第二版原序

本書的這一版和1948年發行的第一版有顯著的不同。主要的改動是由于我們想使得這本書在大学和师范学院中學習綫性代數的各部分時用來作為教科書能夠更為適合。

因此，我們對於若唐法式不採取純幾何的推理而只應用代數的方法，這就使得我們的敘述縮短而且刪去了關於若唐法式的這一章。

在第一版中，關於二次型和雙綫性型問題是分散在幾章內討論的，現在把它們抽出集合到一章里面來。此外，對於 U 空間理論中一些較特殊問題的詳細敘述只把它們的結果寫到幾處例題和習題中去。這就使得我們能夠減少篇幅和把材料分配到較少的幾章中而並不損害到敘述的明顯性。

這樣緊縮後可以不增加本書以前的篇幅而添進去關於多重綫性型和張量的新的一大章，詳細的處理了張量代數的基本問題，因此，亦就增加了一些習題。

利用這個機會，謹向 A. Г. 庫洛什和莫斯科大學代數教研組的成員在教研組會議上對本書的討論以及對於第一版和在新版的準備工作中對作者提出意見的所有同志表示衷心的感謝。

A. И. 馬力茨夫

目 录

第二版原序

第一章 矩陣	1
§ 1. 矩陣运算	1
1. 綫性代数的論題 2. 基域 3. 矩陣 4. 矩陣与数的乘法, 二矩陣的加法	
5. 矩陣的乘法 6. 矩陣的乘幂 7. 方陣多項式 8. 轉置矩陣	
§ 2. 特征多項式与最小多項式	16
9. 相似 10. 特征多項式 11. 赫密登-凱萊定理 12. 最小多項式	
§ 3. 分塊矩陣	23
13. 分塊矩陣的运算 14. 对角形分塊方陣 15. 准可裂方陣	
第二章 綫性空間	29
§ 1. 定义及其簡單性質	29
16. 公理 17. 零向量与負向量 18. 綫性組合 19. 綫性空間的例子	
§ 2. 維数	34
20. 綫性关系 21. 有限維空間 22. 行空間的維数 23. 同构	
§ 3. 坐标	44
24. 坐标行 25. 坐标的变换 26. 逆变换	
§ 4. 綫性子空間	49
27. 子空間的构成 28. 子空間的交与和 29. 直接和	
第三章 綫性变换	58
§ 1. 任意集合的变换	58
30. 变换的乘积 31. 么变换与逆变换 32. 一一对应的变换 33. 置換	
§ 2. 綫性变换与其矩陣	65
34. 簡單性質 35. 綫性变换的矩陣 36. 坐标的变换	
§ 3. 綫性变换的运算	71
37. 綫性变换的乘法 38. 加法和对于数的乘法 39. 綫性变换的多項式	
§ 4. 綫性变换的秩与阶	77
40. 核与区标 41. 降秩与满秩变换 42. 变换的矩陣之秩	
§ 5. 不变子空間	83
43. 导出变换 44. 不变子空間的直接和 45. 变换的特征多項式 46. 特征	

向量与特征根	
§ 6. 有法型矩阵的变换.....	91
47. 对角形 48. 若唐境 49. 根子空间	
第四章 多项式矩阵.....	98
§ 1. 不变因式.....	98
50. 相抵 51. 对角形 52. 子式的最大公因式 53. 相抵的条件	
§ 2. 初级因子.....	110
54. 与不变因式的关系 55. 可裂矩阵的初级因子	
§ 3. 线性变换的法式矩阵.....	114
56. λ 矩阵的除法 57. 纯相抵性 58. 相似矩阵 59. 若唐法式 60. 自然法式 61. 其他法式	
§ 4. 矩阵函数.....	128
62. 若唐矩阵多项式 63. 纯函数 64. 函数值的多项式表示 65. 函数的初级因子 66. 幂级数 67. 和已给矩阵可易的矩阵 68. 与“对某一矩阵可易的全部矩阵”可易的矩阵	
第五章 U 空间与欧几里得空间.....	147
§ 1. U 空间.....	147
69. 公理和例子 70. 向量之具 71. 正交组 72. 同构 73. 正交和, 射影	
§ 2. 关联变换.....	162
74. 线性函数 75. 关联变换 76. 规范变换	
§ 3. U 变换与对称变换.....	178
77. U 变换 78. U 相抵 79. U 变换的矩阵的法式 80. 对称变换 81. 反对称变换 82. 非真的对称变换	
§ 4. 一般变换的分解.....	189
83. 分解为对称与反对称部分的分解式 84. 极分解式 85. 凯莱变换 86. 影谱分解	
第六章 二次型和双线性型.....	204
§ 1. 双线性型.....	204
87. 型的变换 88. 双线性型的相抵性 89. 对称双线性型的相合性	
§ 2. 二次型.....	212
90. 相合性 91. 拉格朗日演段 92. 二次型的惯性定律 93. 恒定型	
§ 3. 型耦.....	222
94. 型耦的相抵性 95. 型耦的相合性 96. 非对称双线性型的相合性	
§ 4. 双线性函数.....	229
97. 基本定义 98. 有双线性度量的空间 99. 双线性度量空间中双线性函数	

第七章 双线性度量空间的线性变换	244
§ 1. 线性变换的基本类型	244
100. 自同构 101. 对称的和反对称的变换	
§ 2. 复欧几里得空间	251
102. 对称变换 103. 反对称变换 104. 复正交变换	
§ 3. 耦对空间	260
105. 对称变换 106. 反对称变换 107. 耦对变换	
§ 4. 准 U 空间	266
108. 对称变换 109. 准 U 变换	
第八章 多重线性函数, 张量	277
§ 1. 一般定义	277
110. 关联空间 111. 多重线性函数 112. 张量	
§ 2. 张量代数	287
113. 张量的加法和乘法 114. 张量的收缩 115. 指标的升高和降低	
§ 3. 外代数	294
116. 对称张量 117. 反对称张量 118. 多重向量 119. 线性空间和 p 向量	
120. 对偶性, p 型	
§ 4. 不变量	312
121. 不变式 122. 不变式的一般定义 123. 整不变式 124. 相对张量	
125. 有理不变式 126. 不变式特征	
文献索引	334

第一章 矩陣

§1. 矩陣运算

1. 綫性代数的論題 綫性代数中所研究的有三种东西：矩陣，綫性空間和代数型。 这些东西的理論相互間的关联是这样的密切，使得綫性代数的大部分問題在这三种理論的每一种中都有等价的說法。和实际計算結合得最多的是矩陣的观点，所以在本書中我們主要从矩陣来叙述。另一方面，在几何和力学中有很多綫性代数的問題，提出了关于代数型的問題，而要在綫性代数的各种問題中很明确的了解它們的內在联系，就須討論綫性空間。所以熟練从一种理論的叙述轉移到另一种去，是在學習綫性代数时要养成的一种重要的習慣。

从型論来看，綫性代数的內容很自然的分做三个部分——綫性型論，双綫性型和二次型論以及多重綫性型論。严格的說，綫性代数一般是討論綫性型，双綫性型理論和有張量代数形式的多重綫性型的基本理論。多重綫性型論中更細致的問題已經是屬於不变量論的論題，我們不把它們放在本書里面。

綫性代数这个数学分支和数学一样的古老。解綫性方程 $ax+b=0$ 这个問題可以作为綫性代数的原始問題。虽然这个問題并没有什么困难，但是用来解出这个問題的原理，亦即綫性函数 $y=ax+b$ 的对应性質是全部綫性代数的想法和方法的原始标本。例如，关于解出有許多未知量的綫性方程組的討論，有这样的想法作为其基础，即把这个方程組逐步的換成像所指出的这种有最簡單形狀的方程組。

在創立了解析几何之后，綫性方程組的重要性更加显得突出，关于

空間中平面和直線的位置的所有基本問題都可以化做綫性方程組來研究。對於含有 n 個未知量和 n 個方程的綫性方程組一般解的公式的研究，已在十八世紀由萊勃尼茨和克萊姆引進了行列式的概念。十九世紀中，除代數和解析幾何外，在奧斯特羅格勒達斯基，耶可比（函數行列式），伏龍斯基和其他一些人的工作中，行列式已經滲入到分析中去。和這相平行的，用變量的綫性替代對二次型的變換問題，在解析幾何，數論中特別是在理論力學中都很重要。這一個問題對羅巴切夫斯基和黎曼的幾何工作也是中心問題之一，因而引起創立關於多維空間包含綫性多維空間（格拉斯曼）的研究。在過去這一世紀中，結合不可易代數（赫密登）的研究在凱萊和薛爾凡斯透的工作中引進了矩陣的研究，對綫性代數的進一步發展占有了一個重要地位。到十九世紀末尾，建立起矩陣計算的一些重要分支的研究：關於綫性變換的矩陣的法式（若唐），初級因子（伐愛爾斯脫拉斯），安密達型（安密達）。多維空間微分幾何和高次代數型變換理論的發展在十九世紀末創立了張量分析。相對論就是在这个勝利的基础上建立起來的。

在本世紀中，綫性代數獲得進一步的發展，如在代數內部，由於應用群和不可換環的概念，綫性代數的基本概念得到新的充實和合用，而在分析中是由於用到了無限維函數空間。應用這些空間的理論到量子力學上更加刺激了這一理論的發展，建立了近代泛函分析的一個重要部分。

2 基域 上面已經說過，綫性代數所研究的基本東西是矩陣，綫性空間和代數型，也就是含有若干未知量的齊次多項式。在確定這些東西的每一種時，都和數的事先選定的某一個集合 K 有關，集合 K 的實際選定對所討論的問題和科學規律發生關係。例如，從代數的觀點，如果選取全部復數作為 K ，那末我們的結果常常可以得出最完善的公式。相反的，在幾何或力學中，常常是基本上只需要討論實數。對於數論有時只要取有理數集合作為我們的 K 。所以，為了使得得出來的結

果尽可能的应用到更广泛范围内的問題，对于选做 K 的这个数的集合，事先不給它定死。我們只假定 K 是一个域，也就是說 K 中任何二数的和，差，积，商都仍然含在 K 里面。但在讀者只对物理学或几何学中綫性代数的应用有兴趣时，以后如果没有特別声明，都可以把 K 了解成全部实数集合或全部复数集合。

不一定考虑数域来作为 K ，而可以取任意域作为 K ，而且有时还可以取不可換域。在理論的很多部份中，域 K 的任意性，对定理的叙述或証明都无影响，但对于 K 是不可換域这种情形，需要特別审慎。因此，在以后如果没有相反的声明，我們都取任意域作为 K ，叫做基域。用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \dots, \tau$ 做为它的元素并且即使已經知道 K 不是数域，我們还是把它們一概叫做数。

3. 矩陣 取任意域 K 中 mn 个元素排成 m 行 n 列的一个長方形，叫做一个 K 上矩陣。在写出矩陣时，我們把这些元素按次序写在方括弧里面，或在这陣形的两边各加两条直綫。这样， m 行 n 列矩陣写做

$$\left[\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array} \right]$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array} \right|$$

或

其中元素 α_{ij} 在域 K 中。有时我們用縮写 $|\alpha_{ij}|$ 或 $|\alpha_{ij}|_{m,n}$ 来代替这种詳細的写法。

当矩陣的行数与列数相同时，叫做方阵，这个相同的行列数叫做方阵的阶。只有一行的矩陣叫做行矩陣。以后我們用大写拉丁字母 A ，

B, \dots 来表示矩陣。

当且只当两个矩陣的行数相同,列数相同,而且对应行列中的所有数都相等时,两个矩陣才能相等。因之两个 m 行 n 列的矩陣相等时,它們的元素間有 mn 个等式存在。

4. 矩陣与数的乘法,二矩陣的加法 矩陣的基本运算为矩陣間的加法、乘法以及矩陣与数的乘法。矩陣和数的乘法比較簡單,用数 α 乘矩陣 A 或用矩陣 A 乘 α 的积定义为把 A 中所有元素都乘上 α 后所得出的矩陣,例如

$$5 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 35 & -5 \end{bmatrix}。$$

所有元素都是零的矩陣叫做零矩陣,用 0 来表示。如要指明零矩陣的行数 m 和列数 n 时,我們記做 0_{mn} 。

由数与矩陣的乘法定义,立即得出下面各性質:

- (1) $1 \cdot A = A$;
- (2) $0 \cdot A = 0$;
- (3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ 。

如果 A 是一个方陣,那末从 A 可以得出一个行列式,把它記做 $|A|$ 。已知乘行列式的任一行中諸元素以 α 时,行列式之值变为原值之 α 倍,今以 α 乘 A 时, A 中所有各行之元素均須乘以 α ,故如 A 的阶数为 n ,則得

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|。$$

两个行数相同列数相同的矩陣,可以相加。其和为将行列数相同处的諸数相加后所得出的矩陣,例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}。$$

从这些定义,可以直接得出下面的性質:

- (4) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

$$(5) \quad A+B=B+A;$$

$$(6) \quad A+0=A;$$

$$(7) \quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A;$$

$$(8) \quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$$

讀者可自己證明。特別的由等式 1、7，可得

$$A+A=2A; \quad A+A+A=3A, \dots$$

引入記法 $(-1)A=-A$ ，我們又可得

$$A+(-A)=0;$$

$$(-\alpha)A=-\alpha A;$$

$$-(A+B)=-A-B;$$

$$-(-A)=A.$$

为了簡便，我們平常把 $A+(-B)$ 写作 $A-B$ 。

5. 矩陣的乘法 矩陣和矩陣的乘法比起它的加法，矩陣和数的乘法来都要复杂些。設二矩陣为 A, B 。 A 的列数等于 B 的行数，即

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{bmatrix},$$

則其乘积为矩陣

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mp} \end{bmatrix},$$

其中 $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nj}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, p$)。

記 A 对 B 的乘积为 AB ，即 $AB=C$ 。例如

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon \\ \lambda & \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma + \beta\lambda & \alpha\delta + \beta\mu & \alpha\varepsilon + \beta\nu \\ \alpha_1\gamma + \beta_1\lambda & \alpha_1\delta + \beta_1\mu & \alpha_1\varepsilon + \beta_1\nu \\ \alpha_2\gamma + \beta_2\lambda & \alpha_2\delta + \beta_2\mu & \alpha_2\varepsilon + \beta_2\nu \end{bmatrix}.$$

矩陣相乘的法則可以總結為：二可乘矩陣的乘積為一矩陣，其第 i 行第 j 列的元素，為第一矩陣第 i 行諸元素，與第二矩陣第 j 列諸元素，依序逐對相乘所得出的乘積之和。

二矩陣的乘積一般和它們的次序有關，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ -26 & -8 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 131 \\ -55 & -97 \end{bmatrix}.$$

有時兩矩陣對於某一順序相乘，可以得出乘積，但換成相反次序後，乘法就不可能。

由矩陣的乘法定義，可推出下面的關係：

$$(9) \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

事實上，設矩陣 A 的元素為 α_{ij} ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$)，矩陣 B 的元素為 β_{jk} ($j=1, \dots, n; k=1, \dots, p$)。由乘法規則，知矩陣 $\alpha(AB)$ 中第 i 行第 k 列的元素為

$$\alpha(\alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nk}).$$

同理，知矩陣 $(\alpha A)B$ ， $A(\alpha B)$ 的第 i 行第 k 列元素各為

$$(\alpha\alpha_{i1})\beta_{1k} + (\alpha\alpha_{i2})\beta_{2k} + \dots + (\alpha\alpha_{in})\beta_{nk},$$

$$\alpha_{i1}(\alpha\beta_{1k}) + \alpha_{i2}(\alpha\beta_{2k}) + \dots + \alpha_{in}(\alpha\beta_{nk}).$$

因為這三個式子是相等的，故知關係 9 成立。用相類似的方法，可以證明下面的性質：

$$(10) (A+B)C = AC + BC;$$

$$(11) C(A+B) = CA + CB.$$

由關係 10 和 11 可得出下面的規則：以幾個矩陣之和乘幾個矩陣之和時，為將第一矩陣和中每一矩陣乘第二矩陣和中每一矩陣，把這些乘積加後所得出的和。

我們已知矩陣的乘法是不一定可易的，就是說 AB 不一定等於

BA , 但是第二算术定律——可群律——对于矩陣的乘法是适合的^①。

$$(12) A(BC) = (AB)C.$$

为了証明它, 我們設

$$AB = M, \quad BC = N,$$

且把 M, N 的元素各記做 μ_{ik}, ν_{jl} 。由矩陣的乘法, 知

$$\mu_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nk},$$

$$\nu_{jl} = \beta_{j1}\gamma_{1l} + \beta_{j2}\gamma_{2l} + \cdots + \beta_{jn}\gamma_{nl},$$

其中 $\alpha_{ij}, \beta_{jk}, \gamma_{kl}$ 为矩陣 A, B, C 的元素。以 M 乘 C 得 $(AB)C$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$\mu_{i1}\gamma_{1l} + \mu_{i2}\gamma_{2l} + \cdots + \mu_{in}\gamma_{nl} = \sum_k \sum_j \alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}.$$

同理, 以 A 乘 N , 得矩陣 $A(BC)$ 的第 i 行第 l 列的元素为

$$\alpha_{i1}\nu_{1l} + \alpha_{i2}\nu_{2l} + \cdots + \alpha_{in}\nu_{nl} = \sum_j \sum_k \alpha_{ij}\beta_{jk}\gamma_{kl}.$$

这两个式子, 除开加法的次序有所不同外, 是完全相等的, 故知等式 12 是正确的。

由等式 12, 知道对于有一定順序的矩陣 A, B, C, \dots, D 的乘积可以不必在它們的中間另加括弧, 所以我們不但可以說及两个矩陣的乘积, 亦可說及多个矩陣的乘积。例如我們可以簡單的說四个矩陣的乘积 $ABCD$, 因为它和

$$[(AB)C]D, [A(BC)]D, A[(BC)D], A[B(CD)], (AB)(CD)$$

这五个乘积是一个东西。对于普遍的情形可以由可群律 12, 用数学归纳法来証明。

最后, 我們指出, 二方陣的乘积的行列式等于它們的行列式的乘积, 即

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

① 因为矩陣的加法与乘法并不是对任何两个矩陣都能施行, 要受到它們之間行列数的某些限制。等式 10, 11, 12 的意义是说, 如其某一节可以相乘或相加, 則其另一节亦可应用, 运算結合而且两节之結果相等。

这一个结果是同关于行列式的乘法的已知定理符合的。

6. 矩陣的乘幂 我們說过不是任何两个矩陣都是可以相加或相乘的, 只有它們的行列数之間有一定的关系时才可以进行。但当我们只处理所有 n 阶的方陣时, 就不会有这一个不方便的情形, 任何两个 n 阶方陣都可以相加, 相乘或和某一个数相乘后仍然得出一个 n 阶方陣。在本段与次段 (6, 7) 中, 我們所討論的都是阶数同为 n 的方陣。

对角线上的元素均为 1 而其他元素均为零的方陣叫做么方陣, 記之为 E :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 1 \end{bmatrix}.$$

显然由乘法法则对于任何方陣均可得

$$AE = EA = A.$$

此等式决定方陣 E 的基本性質。型如方陣

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma \end{bmatrix}$$

的叫做对角形方陣。

从运算規則显然得出二对角形方陣之和与积仍为一对角形方陣:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta_1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \alpha_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta + \beta_1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma + \gamma_1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta_1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \beta\beta_1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots \gamma\gamma_1 \end{bmatrix}.$$

現在來討論元素在域 K 中的任何一個 n 階方陣。如果有這樣的方陣 X 存在,使得

$$XA = AX = E,$$

我們說 A 是可逆的,而且把 X 叫做 A 的逆方陣,寫做 $X = A^{-1}$ 。容易看出,可逆方陣只有一個逆方陣,所以 A^{-1} 的表法是一意的。事實上,如果 Y 也是 A 的逆方陣,那末用 X 來左乘關係式 $AY = E$,我們得出 $XA \cdot Y = X$,也就是 $Y = X$ 。同樣的,用 X 右乘 $YA = E$ 得出 $Y = X$ 。

因之,如果方陣 A 是可逆的,那末方程

$$XA = E, \quad AX = E$$

的任何一個都有一個而且只有一個解 $X = A^{-1}$ 。

逆方陣很容易利用它的行列式來求出。設 $A = \|\alpha_{ij}\|$ 。用 A_{ij} 表方陣 A 的行列式中 α_{ij} 的代數余子式(余因子)用它們來構成方陣

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中第 i 行的元素為 $|A|$ 中第 i 列的代數余子式。方陣 B 叫做 A 的附加方陣。它有下面的基本性質:

$$AB = BA = |A| \cdot E. \quad (1)$$

這個等式可以這樣證明:方陣 AB 的第 i 行第 j 列元素為

$$\alpha_{i1}A_{j1} + \alpha_{i2}A_{j2} + \cdots + \alpha_{in}A_{jn}$$

由行列式的性質,知當 $i \neq j$ 時此式為零,當 $i = j$ 時,此式等於 $|A|$,故得 $AB = |A| \cdot E$ 。同理知 $BA = |A| \cdot E$ 。

因方陣的行列式為 1,由等式 (1) 得

$$|AB| = |A| \cdot |B| = ||A| \cdot E| = |A|^n \cdot |E| = |A|^n,$$

即

$$|A| \cdot |B| = |A|^n. \quad (2)$$

引入下面的定义：当 A 的行列式不为零时，称 A 为满秩方阵，否则称为降秩方阵。

設 A 为一满秩方阵， B 为其附加方阵。因 $|A| \neq 0$ ，在 (2) 的两节约去 $|A|$ 得 B 的行列式

$$|B| = |A|^{n-1}. \quad (3)$$

乘等式 (1) 以 $|A|^{-1}$ 得

$$A \cdot |A|^{-1} B = |A|^{-1} B \cdot A = E. \quad (4)$$

这样一来，

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot B. \quad (5)$$

所以，特别的，得出所有满秩方阵都是可逆的。如果方阵 A 是降秩的，那末从 $XA = E$ 转移到行列式，得出矛盾等式 $|X| \cdot |A| = 1$ ，也就是 $|X| \cdot 0 = 1$ 。这就证明了，方阵的可逆性和满秩性这两个概念是等价的。

設 A 为一满秩方阵，則 $AA^{-1} = E$ 。两节取行列式之值，得

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1,$$

即

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}, \quad (6)$$

故知方阵之逆的行列式等于其行列式之倒数。当 A 为满秩时， A^{-1} 显然满秩，故有方阵 $(A^{-1})^{-1}$ 。由逆方阵的性质知有

$$A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = E,$$

用 A 来左乘，得

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (7)$$

我們很容易得出求方阵积的負一次方的規則。設 A, B, C 为满秩方阵，則

$$ABC \cdot C^{-1} B^{-1} A^{-1} = E,$$

因此

$$(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}. \quad (8)$$