全国高级技工学校公共课教材

高等数学及应用

第2版

人力资源和社会保障部教材办公室组织编写

中国劳动社会保障出版社

全国高级技工学校公共课教材

高等数学及应用

（第2版）

人力资源和社会保障部教材办公室组织编写

主　编　张冬耕　黄　莉

中国劳动社会保障出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及应用/张冬耕，黄莉主编. —2版. —北京：中国劳动社会保障出版社，2009
全国高级技工学校公共课教材
ISBN 978-7-5045-7909-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…②黄…　Ⅲ.高等数学-技工学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第092136号

中国劳动社会保障出版社出版发行
(北京市惠新东街1号　邮政编码：100029)
出 版 人：张梦欣
*
北京北苑印刷有限责任公司印刷装订　新华书店经销
787毫米×1092毫米　16开本　10.25印张　153千字
2009年6月第2版　　2009年6月第1次印刷
定价：22.00元
读者服务部电话：010-64929211
发行部电话：010-64927085
出版社网址：http://www.class.com.cn

简　介

本书根据劳动和社会保障部培训就业司颁发的数学课教学大纲编写，为高级技工学校、技师学院公共课教材。

本书主要内容包括：微分及其应用、积分及其应用、坐标系及其变换、微分方程、线性代数初步、二元函数微积分及运用数学软件进行相关运算。

本书还配有教师用书（含多媒体教学光盘）和练习册。

本书由张冬耕、黄莉、毕予华、符广启编写，张冬耕、黄莉担任主编；姚建国、吕乙婷审稿，姚建国担任主审。

前　言

为了满足全国高级技工学校的教学需要，我办组织一批教学经验丰富、实践能力强的数学课和专业课教师，根据劳动和社会保障部培训就业司颁发的数学课教学大纲（劳社培就司函［2008］27号），编写了《高等数学及应用》（第2版）一书。

在该教材的编写过程中，办求做到以下几点：

第一，以培养学生运用数学知识解决实际问题的能力，锻炼学生的逻辑思维能力、空间想象能力、数学建模能力和运算能力为目的，确定教材的结构和内容，强化教材的针对性和实用性。

第二，以解决学生日常接触的实际问题为切入点，讲解数学概念和理论，这样既能激发学生的学习兴趣，又能降低相应内容的学习难度。

第三，以现实问题的解决为落脚点，阐述数学知识的应用方法和过程，既能提高学生分析问题、解决问题的能力，还能提升学生的学习成就感，增强学生的学习信心。

第四，在不影响数学教学内容科学性和系统性的前提下，适当删减了部分理论的繁杂证明过程，有利于学生对知识要点的把握，有利于学生能力的培养。

第五，将数学软件的使用融入到相应的学习模块中，使学生在学习传统数学知识和技能的基础上，掌握另一种快速有效的工具，学会在工作中解决实际问题的先进方法。

在该教材的编写过程中，得到了有关省市一批高级技校、技师学院的大力支持，教材的主编、参编、主审做了大量的工作，在此我们表示衷心的感谢！同时，恳切希望广大读者对教材提出宝贵的意见和建议，以便修订时加以完善。

人力资源和社会保障部教材办公室

2009年3月

目 录

Contents

模块一　微分及其应用……………………………………………………（1）

课题一　导数的概念……………………………………………………（1）

课题二　导数的运算……………………………………………………（7）

课题三　利用导数作图…………………………………………………（14）

课题四　微分……………………………………………………………（23）

课题五　曲率……………………………………………………………（28）

第一模块自测题…………………………………………………………（32）

模块二　积分及其应用……………………………………………………（35）

课题一　积分的概念与性质……………………………………………（35）

课题二　积分的计算……………………………………………………（40）

课题三　积分的应用……………………………………………………（48）

第二模块自测题…………………………………………………………（55）

阅读材料　资本现值和投资问题………………………………………（56）

模块三　坐标系及其变换…………………………………………………（58）

课题一　坐标平移………………………………………………………（58）

课题二　极坐标与参数方程……………………………………………（61）

课题三　切点……………………………………………………………（68）

课题四　空间曲面………………………………………………………（73）

第三模块自测题…………………………………………………………（81）

阅读材料　向量的坐标和方向角………………………………………（82）

模块四　微分方程…………………………………………………………（84）

课题一　可分离变量的微分方程………………………………………（84）

课题二　一阶线性微分方程…………………………………………………………（92）
课题三　二阶常系数齐次线性微分方程……………………………………………（98）
第四模块自测题……………………………………………………………………（104）
阅读材料　数学建模简述……………………………………………………………（106）

模块五　线性代数初步……………………………………………………………（109）

课题一　行列式及其应用……………………………………………………………（109）
课题二　矩阵及其应用………………………………………………………………（119）
第五模块自测题……………………………………………………………………（132）
阅读材料　线性规划初步　…………………………………………………………（134）

模块六　二元函数微积分…………………………………………………………（137）

课题一　二元函数的微分……………………………………………………………（137）
课题二　二元函数的积分……………………………………………………………（145）
第六模块自测题……………………………………………………………………（154）
阅读材料　二阶偏导数………………………………………………………………（156）

模块一
微分及其应用

课题一　导数的概念

教学目标

1. 理解导数的概念；
2. 掌握导数的实际意义。

课题提出

用夹板锤锻造工件时，锤头上、下运动打击工件，使其发生塑性变形，求锤头下落时，在任一时刻 t_0 的速度 $v(t_0)$，如图 1—1 所示。

课题分析

若将锤头视为质点，并设在时刻 t 处质点的位移为 $s=s(t)$，则图 1—1 可以抽象为图 1—2。由速度的定义可知，如果作直线运动的物体在一段时间 t 内产生的位移为 s，那么该物体的平均速度可由公式 $\bar{v}=\frac{s}{t}$ 计算。

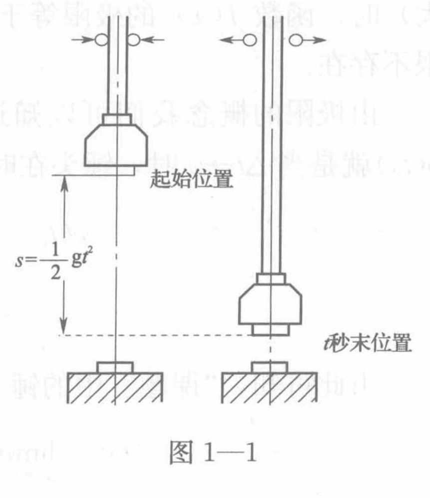

图 1—1

“课题”中的锤头所作的是速度 v 随着时间 t 的变化而变化的变速直线运动，即 $v=v(t)$，这样问题转化为：怎样求在任意时刻 t 处质点的速度 $v(t)$！

如图 1—2 所示，当时刻由 t_0 变化到 t（$t=t_0+\Delta t$）时，锤头在时间段 Δt 内所走过的路程为 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$（其中 Δt 称为在时刻 t_0 处的增量，Δs 称为位移 s 在时刻 t_0 处的增量）。

于是，在时间 Δt 内质点的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

图 1—2

当 Δt 很小时，就可以用质点在时间 Δt 内的平均速度 $\bar{v}$ 近似地表示该质点在时刻 t_0 处的瞬时速度 $v(t_0)$，而且 Δt 越小，近似程度就越高。

所以，当 $\Delta t\to 0$，即 $t\to t_0$ 时，质点在时间段 Δt 内的平均速度 $\bar{v}$ 就无限地趋近于该质点在时刻 t_0 处的瞬时速度 $v(t_0)$，即 $\bar{v}\to v(t_0)$。这时，我们就称 $v(t_0)$ 为 $\bar{v}$ 在 $t\to t_0$ 时的极限。

相关知识

一、极限的定义

对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$，即其绝对值趋于无穷）时，函数 $y=f(x)$ 能无限地趋近于一个确定的常数 A，即 $f(x)\to A$，则称当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或 $f(x)$ 的极限存在。

记作：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$），读作：当 x 趋近于 x_0（或趋于无穷大）时，函数 $f(x)$ 的极限等于 A。否则称当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 的极限不存在。

由极限的概念我们可以知道，“课题”中所求的锤头在时刻 t_0 处的速度 $v(t_0)$ 就是当 $\Delta t\to 0$ 时，锤头在时刻 t_0 处的平均速度 $\bar{v}$ 的极限，即

$$\begin{aligned}v(t_0)&=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\end{aligned}$$

由此可知，“课题”中的锤头在任一时刻 t 处的速度为

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

例如，$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$ 以及 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$（图1—3）等都是函数极限的例子。

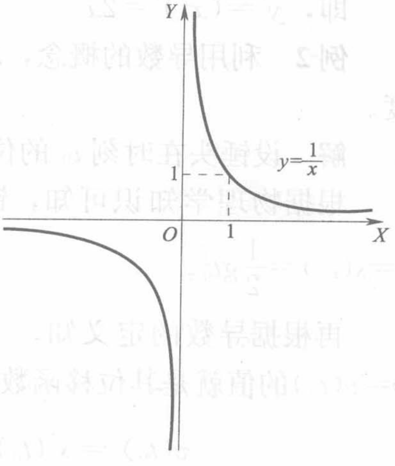

图 1—3

二、导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的自变量由 x 变化到 $x+\Delta x$，相应的函数值由 $y=f(x)$ 变化到 $y=f(x+\Delta x)$（其中，Δx 称为自变量 x 的增量，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 称为函数值 y 的增量），则称 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$ 关于 x 的平均变化率。如果函数的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，则称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的导数（也称之为瞬时变化率），记作 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，简记为 y'，$f'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

此时，我们说函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导；如果极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x 处不可导。

可见，“课题”中所给质点的位移 s 是时间 t 的函数，即 $s=s(t)$。由导数的定义可知，它在时刻 t 处的导数 $s'(t)$ 就是时刻 t 的速度 $v(t)$，即

$$v(t)=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

例如，若 $s'(1)=5$，即函数 $s=s(t)$ 在 $t=1$ 处的导数值为 5，则说明质点在时刻 $t=1$ 时的速度为 $v=5$，表示为 $v(t)|_{t=1}=s'(1)=5$。

例 1 根据导数的定义，求函数 $y=x^2$ 的导数。

解 （1）给出自变量 x 的增量 Δx，则：

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$

（2）计算 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$。

（3）求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$。

即，$y'=(x^2)'=2x$

例 2 利用导数的概念，求所给“课题”中提出的锤头在任意时刻 t_0 处的速度。

解 设锤头在时刻 t_0 的位移为 $s=s(t_0)$、速度为 $v=v(t_0)$。

根据物理学知识可知，锤头所做的运动是自由落体运动，其运动规律是 $s=s(t_0)=\frac{1}{2}gt_0^2$。

再根据导数的定义知，“课题”中所提出的锤头在任意时刻 t_0 处的速度 $v=v(t_0)$的值就是其位移函数 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数在 t_0 处的值，即

$$v(t_0)=s'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(gt_0+\frac{1}{2}g\Delta t)=gt_0$$

故所求锤头在任意时刻 t_0 处的速度为 $v(t_0)=gt_0$。

三、导数的实际意义

1. 导数的物理意义

由导数的定义可知，导数的实质就是函数在某一点的变化率，这就是导数的实际意义。在现实生活及专业学习中，我们会经常遇到各种各样的变化率，而且在不同的领域中，它们都有各自的专业名称，因此导数有着非常广泛的应用。

比如，我们已经知道的密度、压强、比热、功率、工作效率、降雨强度、车流量等概念，都描述了事物的变化率，都可以用导数来刻画。在电工学中，通过导体模截面的电流量 Q 是时间 t 的函数 $[Q=Q(t)]$，它在时刻 t 处的导数 $\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}Q(t)$ 就是电流强度（简称电流）I，即电量对于时间的变化率。在运动学中，质点运动的位移 s 是时间 t 的函数 $s=s(t)$，它在时刻 t 处的导数$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}s(t)$ 就是速度 v，即位移对于时间的变化率；质点运动的速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$，它在时刻 t 处的导数$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}v(t)$ 就是加速度 a，即速度对于时间的变化率。

例 3 一名食品加工厂的工人上班后开始连续工作，生产的食品数量y（kg）是其工作时间t(h)的函数。假设该函数$y=f(t)$在$t=1$和$t=3$点的导数分别为$f'(1)=4$和$f'(3)=3.5$，请解释它们的实际意义。

解 导数$f'(1)=4$，它表示该工人上班后工作到1 h的时候，其生产速度即工作效率为4 kg/h。而导数$f'(3)=3.5$，它表示该工人上班后工作至3 h的时候，其生产速度下降为3.5 kg/h。

2. 导数的几何意义

试分析曲线$y=f(x)$上的点x处的导数$f'(x)$与该点处的切线斜率$k_{切}$，并比较发现二者的关系。

如图1—4所示，设$P(x, y)$、$Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$是曲线$y=f(x)$上的两点，连接$PQ$得割线$\overline{PQ}$，并且让点$Q$无限地趋近于点$P$，即$Q\longrightarrow P$，此时割线$\overline{PQ}$就绕着点$P$连续地转动，那么割线$\overline{PQ}$的极限位置$PT$就称为曲线$y=f(x)$在$P$点处的切线，即$k_{切}=\lim\limits_{Q\longrightarrow P}k_{割}$。

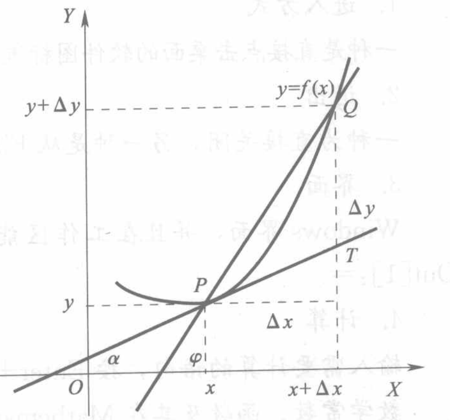

图1—4

而割线$\overline{PQ}$的斜率为

$$k_{割}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

所以切线的斜率为

$$k_{切}=\tan\alpha=\lim_{Q\longrightarrow P}k_{割}=\lim_{\varphi\longrightarrow\alpha}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\longrightarrow 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

可见，函数$y=f(x)$在点x处的导数$f'(x)$，就等于该曲线$y=f(x)$在点$P(x, y)$处的切线的斜率$k_{切}$，以上即为导数的几何意义。

例 4 已知正弦函数$y=\sin x$的导数为$y'=\cos x$，求正弦线$y=\sin x$在点$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$处的切线方程。

解 由导数的几何意义知：$k_{切}=y'|_{x=\frac{\pi}{3}}=\cos x|_{x=\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，代入点斜式方程，即得所求的切线方程为$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$。

知识链接

利用数学软件 Mathematica 计算函数的极限：

Mathematica5.0 是 Wolfram 公司研发的一个数学软件，是目前比较流行的符号运算软件之一。利用这个软件可以帮助我们解决一些较为复杂的数值计算和函数绘图等方面的问题，它是学习数学的好帮手。

1. 进入方式

一种是直接点击桌面的软件图标进入，另一种是通过开始菜单的“所有程序”进入。

2. 退出

一种为直接关闭，另一种是从 File 菜单退出。

3. 界面

Windows 界面，并且在工作区能自动生成输入语句标记 In [1]:=，输出语句标记 Out[1]:=。

4. 计算

输入需要计算的语句，按 Enter+Shift 键即可得到计算结果。

数学常数、函数及其在 Mathematica 软件中的表示对照表如下表所示。

数学符号	π	e	∞	1°	i	x^2
Mathematica	Pi	E	Infinity	Degree	I	x^2
数学符号	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln x$	$\log_a x$	$\lvert x \rvert$	$\operatorname{Sin} x$
Mathematica	Sqrt[x]	Exp[x]	Log [x]	Log [a, x]	Abs [x]	Sin [x]
数学符号	$\cos x$	$\tan x$	a^x			
Mathematica	Cos [x]	Tan [x]	a^x			

注：Mathematica 中函数的自变量都要放在一个方括号中，函数开头的第一个字母要大写。

如把函数 $y=\ln x-\sqrt{1-\sin x}$ 输入计算机时应是

Log [x] −Sqrt [1−Sin [x]]

求函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的命令格式为

Limit[f(x), x−> a]

其中记号 x−>a 表示 x 趋于 a 的这一个条件。

例 5 用两种方法求下列函数的极限：(1) $\lim\limits_{x\to 1}(6x^2+5x+1)$；(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$。

解 (1) 输入命令：Limit[(6x^2+5x+1), x−>1]；

按 Enter+Shift 键，屏幕上显示计算结果为 12。

或$\lim\limits_{x \to 1}(6x^2+5x+1)=6\times 1^2+5\times 1+1=12$。

(2) 输入命令：Limit [(x^2−9)/(x−3)，x−>3]；

按 Enter+Shift 键，屏幕上显示计算结果为 6。

或$\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x \to 3}(x+3)=3+3=6$。

课堂演练

1. 物体从某一时刻开始运动，设 s 表示此物体经过时间 t 走过的路程，显然 s 是时间 t 的函数：$s=s(t)$。在其运动的过程中测得了如下数据：

t（单位：s）	0	2	5	10	13	15	…
s（单位：m）	0	6	9	20	32	44	…

试问：(1) 物体在 0～2 s 和 10～13 s 这两段时间内，哪一段时间运动得快？

(2) 假设函数 $s=s(t)$ 在 $t=1$ 和 $t=3$ 点的导数分别为 $s'(1)=2$ 和 $s'(3)=1$，请解释它们的实际意义。

2. 已知抛物线 $f(x)=x^2+3x-4$ 在其上一点 $P(1, 0)$ 处的导数为 $f'(1)=5$，试求该抛物线在点 P 处的切线方程和法线方程。

课题二 导数的运算

教学目标

1. 熟练掌握导数的基本公式、运算法则和复合函数的求导法则；
2. 理解二阶导数的概念；
3. 能够运用导数解决实际问题。

课题提出

在机械加工中，有一种曲柄滑块机构，如图 1—5 所示。当半径为 r 的主动

轮以等角速度 ω 旋转时，长为 l 的连杆 AB 就带动滑块 H 在槽内作水平往返运动。若运动从 $\varphi=0$ 开始，试求滑块 H 在任意时刻 t 的位移 $s=s(t)$ 及其速度 $v=v(t)$。

课题分析

如图 1—5 所示，设滑块 H 到主动轮中心的距离为 s，由题意知，这里的 s、φ 是随着时间 t 的变化而变化的，即 $s=s(t)$ 且 $\varphi=\omega t$，又由几何关系可知

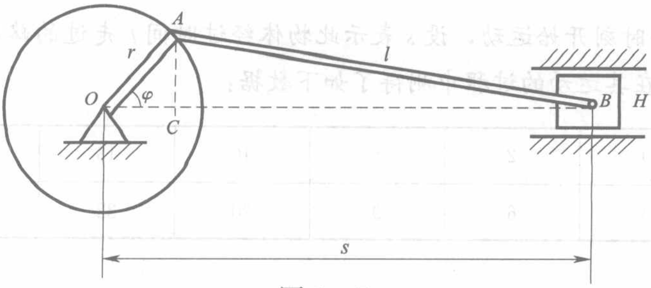

图 1—5

$$s = OC + CB = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - AC^2} = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

即

$$s = s(t) = r\cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}$$

这就是所求滑块 H 的运动规律。

又由导数的定义可知，滑块 H 的速度 v 是 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v = s'(t) = [r\cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}]'$$

这里所得到的是一个比较复杂的函数导数，如果根据导数的定义对其求导，则会非常麻烦。那么，该如何计算这个导数呢？为此，我们有必要寻求关于导数运算的一般方法，这就需要了解导数运算的基本公式以及求导法则。

相关知识

对于常见的基本初等函数（即幂函数、指数函数、对数函数以及三角函数与反三角函数）和常数函数的导数，根据导数的定义可以得到导数的基本公式。

一、导数的基本公式

（1）常函数的导数　　$c'=0$（c 为常数）

(2) 幂函数的导数 $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n 为实数)

(3) 对数函数的导数 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(4) 指数函数的导数 $(a^x)'=a^x\ln a$ $(e^x)'=e^x$

(5) 三角函数的导数 $(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$ $(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(6) 反三角函数的导数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

二、导数的四则运算法则

若函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在点 x 处可导，则

(1) 函数 $(u\pm v)$ 在点 x 处也可导，且

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

即，两个可导函数的代数和的导数等于这两个函数的导数的代数和。

例如

$$(\sin x-\cos x)'=(\sin x)'-(\cos x)'=\cos x+\sin x$$

(2) 函数 cu 在点 x 处也可导，且

$$(cu)'=cu' \quad (c\text{ 为常数})$$

即，常数与可导函数积的导数，等于这个常数乘以该函数的导数。

例如

$$(3x^2)'=3(x^2)'=6x$$

$$(1+2\sin x+3e^x)'=1'+2\sin' x+3(e^x)'=2\cos x+3e^x$$

(3) 函数 (uv) 在点 x 处也可导，且

$$(uv)'=u'v+uv' \quad (v\neq 0)$$

即，两个可导函数积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第一个函数乘以第二个函数的导数。

例如

$$(\sqrt{2x})'=\sqrt{2}(\sqrt{x})'=\sqrt{2}(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}(\sin x\cos x)' &= (\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)' \\ &= \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x\end{aligned}$$

(4) 函数$\frac{u}{v}$在点 x 处也可导，且

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

即，两个可导函数商的导数，等于分子的导数乘以分母减去分子乘以分母的导数，再除以分母的平方。

例如

$$\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{x'(x^2-1)-x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

例 1 求 $f(x)=\sqrt{x}$的导数。

解 由幂函数的求导公式$(x^n)'=nx^{n-1}$可得

$$f'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例 2 已知函数 $f(x)=2^x$，求 $f'(0)$。

解 因为 $f'(x)=(2^x)'=2^x\ln 2$，所以 $f'(0)=2^0\ln 2=\ln 2$

例 3 求下列各函数的导数

(1) $f(x)=x^5-2x^3+5x-\sin\frac{\pi}{3}$；(2) $y=x^2\sin x$；(3) $y=\frac{e^x}{x+1}$。

解 (1) $f'(x)=5x^4-6x^2+5$；

(2) $y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$；

(3) $y'=\left(\frac{e^x}{x+1}\right)'=\frac{(e^x)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$。

三、复合函数及其求导法则

1. 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若 x 在某一区间上取值时，与其对应的 $u=\varphi(x)$能使得函数 $y=f(u)$ 有意义，则称 y 是 x 的复合函数。