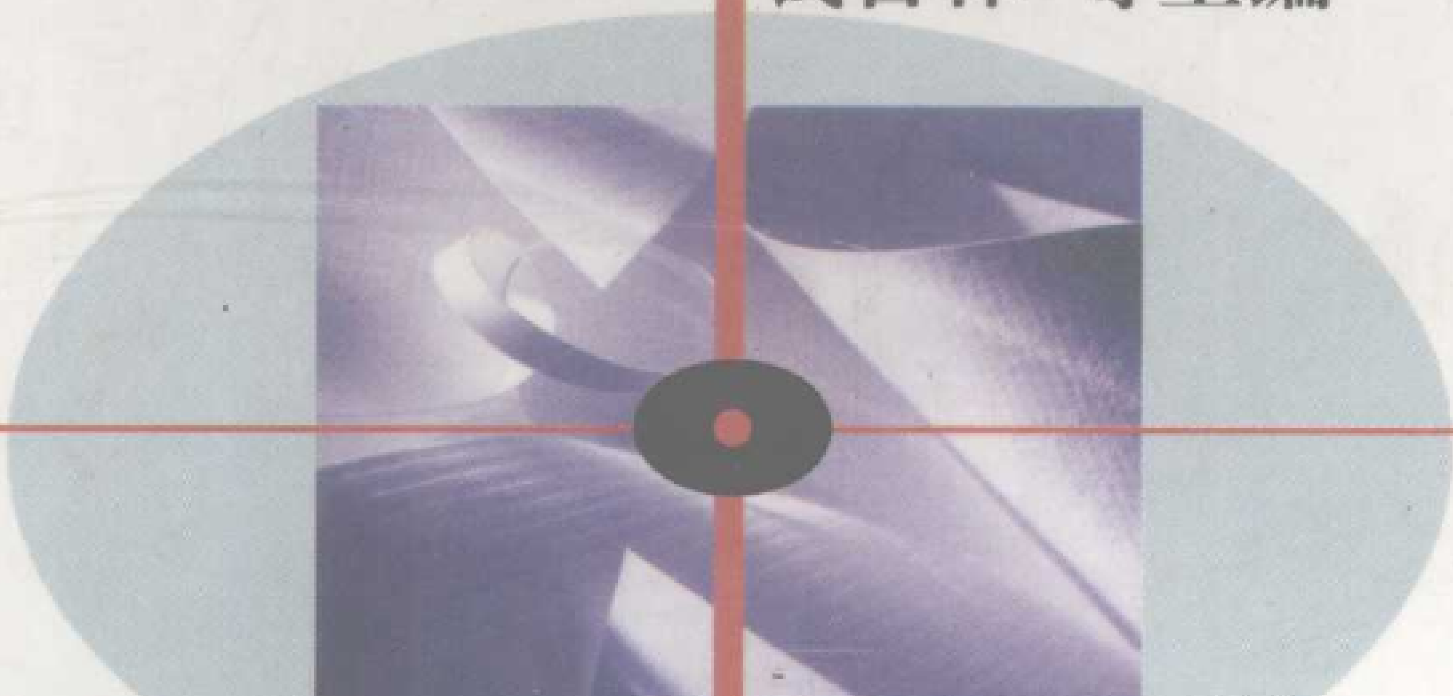
线性代数
考点分析

钱吉林　等主编



XIANXING DAISHU KAODIAN FENXI

华中师范大学出版社

责任编辑　曾太贵
责任校对　黎　圆
封面设计　甘　英

定价：7.20元

ISBN 7-5622-1827-7

9 787562 218272 >

线性代数考点分析

钱吉林等 主编

华中师范大学出版社
1998年·武汉

《线性代数考点分析》编委会

前　言

线性代数是理工类、经济类、农林类各高等院校的一门重要基础课，它还作为工学硕士研究生入学考试的重要内容列入高等数学考试科目中。由于线性代数的概念不易理解，理论较为抽象，证明方法灵活，解题技巧新颖。因而为了帮助各类学生克服线性代数学习中的困难，我们参照国家教委制定的《线性代数课程教学基本要求》，并联系当前各高校线性代数教学的特点，编写了这本《线性代数考点分析》。用以促学助考，从而提高读者的解决问题和分析问题的能力。

本书在内容安排上着重于突出重点和难点，将“线性代数”按讲课的基本顺序划分为若干个考点，对每个考点的基本概念、基本理论与方法、重要公式以及题型类别作了综述。为了适应不同层次的要求，每个考点还配有A组与B组两部分习题及其解答。其中A组题是对本、专科学生的最基本要求，B组题则包含了难度较大或综合性较强的各类习题及部分硕士研究生入学试题。

本书力图具有以下特点：

1. 针对性强。注重基础知识的学习、基本技巧的训练及数学素质的培养，特别是针对学生易于模糊和难以理解的问题，对习题进行了精编与提炼，既注意解题的示范性与启发性，也强调题型的综合性与应用性。

2. 覆盖面广。内容取自当前各高校同类教材与部分研究生入学试题，几乎覆盖了线性代数的全部。既有理论知识，又

有技巧性实例。在培养学生分析问题和解决问题能力方面具有较好的启发性与可读性。

3. 适用面宽。既适用于工科、理科、农林科与财经类各专业的本、专科生、自修大学生、电大生、函大生，又适合于准备报考研究生的读者，也可供广大教师和科技工作者参考。

4. 题型多样。既有判断题、选择题、填空题、问答题，也有计算题、应用题和证明题。特别是各类客观题，不仅有一定数量，而且典型，样题新颖。

由于时间仓促，若有疏漏、错误之处，恳请读者指正。

编　者

1997. 9.

例　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $|A|=-1$

又 $A^T=A^{-1}$，试证 $(E+A)$ 不可逆

证. $|E+A|=|AA^T+A|=-|E+A|$

$\therefore |E+A|=0$

目　　录

第1章 行 列 式

考点1 行列式的定义及性质

【考点综述】

1. 逆序数 排列中两数的前后位置与大小顺序相反，则这两个数就构成了一个逆序. 一排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2. 一个排列中任意两个元素的对换，将改变排列的奇偶性.

3. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列，t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数码的所有全排列求和.

4. 行列式的性质

1）行列式与其转置行列式相等.

2）对调行列式的两行(列)，行列式的值只改变符号.

3）行列式某行(列)中所有元素的公因子可以提到行列

式符号的外面.

4）行列式中若有两行(列）完全相同，或有一行(列）的元素全为零，或有两行(列）元素对应成比例，则此行列式为零.

5）
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j}+c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j}+c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj}+c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6）把行列式某行(列）的元素同乘以一数加到另一行(列）的对应元素上后，行列式的值不变.

5. 本考点的题型通常有：确定行列式展开式中某项的符号，行列式的证明、计算等.

【A 组题解】

1. 求下列排列的逆序数.

1）$135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$；

2）$13\cdots(2n-1)(2n)\cdots42$；

3）$(n-1)(n-2)\cdots1n$.

解 1）此排列构成逆序从 2 开始. 2 的逆序数为 $n-1$，

4 的逆序数为 $n-2$，…，一直到 $2n-2$ 的逆序数为 1. 故此排列的逆序总数

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

2）此排列构成逆序从 $2n-2$ 开始. $2n-2$ 的逆序数为 2，$2n-4$ 的逆序数为 4，…，2 的逆序数为 $2n-2$. 故此排列的逆序总数

$$t=2+4+6+\cdots+(2n-2)=n(n-1).$$

3）元素 $n-1,n-2,\cdots,1,n$ 的逆序数分别为 $0,1,2,\cdots,n-2,0$，所以排列的逆序数

$$t=0+1+2+\cdots+(n-2)+0=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

2. 填空：

1）在五阶行列式中，项 $a_{13}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{52}$ 的符号为正号，则 $i=$______，$j=$______；

2）在五阶行列式中，项 $a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}a_{53}$ 的符号为______；

3）$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots\cdots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \vdots \\ a_n & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

答 1）$i=5$；$j=4$.

2）+.

3）$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1\cdots a_n$. 因为这是一个 n 阶行列式，按定义展开，只有一项 $a_1\cdots a_n$ 不为 0. 所以它的符号由排列

$$n\ n-1\cdots321$$

的逆序总数 t 来确定，而

$$t=1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

3. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\quad)$.

A. 1　B. $(a-b)$　C. $(a-b)^2$　D. $(a-b)^3$

答 D 因为

$$原式=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 2(b-a) \\ 0 & a(b-a) & b^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 2(b-a) \\ 0 & 0 & (b-a)^2 \end{vmatrix}=(a-b)^3.$$

4. 已知$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 2t \\ 1 & c & 1 & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1$，求

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1-r_4]{r_2\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 2t \\ 1 & c & 1 & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

5. 利用行列式的定义说明

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 & -1 \\ x & 3x & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

是一个四次多项式，并求 $f(x)$ 中 x^4, x^3 的系数及常数项.

解 由行列式的定义可知：在所给行列式中只有项 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可能出现 x^4，而

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(2x)\cdot(3x)\cdot x\cdot(2x)=12x^4,$$

于是 x^4 的系数为 12，且 $f(x)$ 一定是四次多项式.

行列式中只有项 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 及 $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 可能出现 x^3，而

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)\cdot x\cdot x\cdot(2x)=-2x^3,$$

$$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-(2x)\cdot(3x)\cdot x\cdot(-1)=6x^3,$$

故 x^3 的系数为 4.

多项式 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的值为 $f(x)$ 的常数项，即

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2.$$

6. 计算 n 阶行列式

1） $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$；

2） $D_n=\begin{vmatrix} x-b & a & a & \cdots & a \\ a & x-b & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x-b \end{vmatrix}$.

解 1）将其它各列统统加到第 1 列，并提出公因式得

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

再将第 1 行的(−1)倍分别加到其它各行得

$$D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

2）由 1)得

$$D_n=[(x-b)+(n-1)a](x-b-a)^{n-1}.$$

注 ① 在 1)的计算过程中，用到两个基本步骤，这在计算行列式中会经常用到．一个是将其它各行(或列)统统加到某一行(或列)上去．另一个将某一行(或列)的倍数，分别加到其它各行(或列)上．

② D_n 计算的结果读者应当熟记，会经常遇到它．

7. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

解 从第 2 行开始，每一行乘以(−1)加到上一行，可得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -x \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n+x \end{vmatrix}.$$

从第 1 列开始，每列加到后 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_2+a_3 & \cdots & x+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i \end{vmatrix}$$

$$=x^{n-1}(x+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

8. 证明：

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

证 左边 $\xlongequal{c_3-c_1-c_2}\begin{vmatrix} b+c & c+a & -2c \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & -2c_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & -2c_2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_2+\frac{1}{2}c_3]{c_1+\frac{1}{2}c_3}\begin{vmatrix} b & a & -2c \\ b_1 & a_1 & -2c_1 \\ b_2 & a_2 & -2c_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\text{右边}.$$

9. **证明：** $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0.$

证 左边 $\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\ c_3-c_1}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3-2c_2]{c_4-c_2-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0=\text{右边}.$$

10. 求下列方程的全部根：

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix}=0;$

2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+a_1-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+a_2-x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+a_{n-1}-x \end{vmatrix}$

$=0, \quad (a_1 \neq 0).$

解 1) 此行列式除主对角线上有 $n-1$ 个 x 的一次式外，其余元素均为常数，所以此行列式为 $n-1$ 次多项式. 而当 $x=0,1,2,\cdots,n-2$ 时行列式均有两行相同，其值为 0，故方程的全部根即为 $x=0,1,2,\cdots,n-2$（$n-1$ 次多项式只有 $n-1$ 个根）.

2）将第 1 行乘以 (-1) 加到其它各行得

$$原式=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

$$=a_1(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x).$$

所以方程的全部根为 $x=a_1$，$x=a_2$，$\cdots$，$x=a_{n-1}$.

【B 组题解】

11. 证明在 n 个元素的全排列中，奇偶排列各一半.

证 考查 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$