



世纪普通高等教育基础课规划教材
北京市精品课程教材

高等数学

上册 第2版

范周田 张汉林 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

013/353=2

:1

2008

21 世纪普通高等教育基础课规划教材
北京市精品课程教材

高等数学

上 册

第 2 版

主编 范周田 张汉林

参编 杨晓华 徐大川 唐 兢

机械工业出版社

本次修订延续了第一版注重数学思想性的做法,适度强化了两个方面:更好地与中学数学相衔接,预备知识一章中介绍了一些数学记号和逻辑符号,函数概念,基本初等函数与初等函数,以及命题的否定等内容;更好地与高层次人才培养相适应,涉及了部分与考研、竞赛相关的内容.

本套教材包括《高等数学》(上、下册),《高等数学例题与习题集》.本册内容为预备知识、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分和定积分的应用.

本套教材注重基础,逻辑清晰,例题量大,便于学习掌握,又有重点提高、灵活应用的内容,适用高等院校工科类专业学生使用,也可作为自学、考研的参考书目.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/范周田,张汉林主编.—2版.—北京:机械工业出版社,2008.7

21世纪普通高等教育基础课规划教材

北京市精品课程教材

ISBN 978-7-111-19214-5

I. 高… II. ①范… ②张… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第094420号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:李永联 责任编辑:韩效杰 版式设计:霍永明

责任校对:申春香 封面设计:鞠杨 责任印制:杨曦

三河市宏达印刷有限公司印刷

2008年8月第2版第1次印刷

169mm×239mm·17印张·330千字

标准书号:ISBN 978-7-111-19214-5

定价:27.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010) 68326294

购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010) 88379723

封面无防伪标均为盗版

序

在面向 21 世纪的教育教学改革大潮中,我国高等教育终于打破了传统教材几十年一统天下的沉闷局面,特别是自 1995 年以来,在国家教委推出了“普通高等教育面向 21 世纪课程教材建设”的改革计划后,大学数学教材的出版呈现了不拘一格、层出不穷、百花齐放的喜人局面.正是在这种局面的推动和鼓舞下,作为地方院校中首批进入 211 重点大学行列的北京工业大学的几位长期辛勤耕耘在高等数学教学第一线的老师,集多年教学经验和研究成果,推出了颇具特色的《高等数学》教材.

本人有幸接触了这几位写书的老师,他们对教育教学的执着和热爱,对大学本科数学教育锲而不舍的研究和探索,以及为写好此书所作出的令人感动的努力,都给我留下了很深的印象.

看过这部教材书稿后,我发现这是近年来不多见的、有不少独到之处的、适合工科院校本科高等数学教学使用的上乘之作,尤其在衔接高中数学大纲的改革、处理极限连续及微积分的讲法上,以及引用数学软件使教材插图更加美观、规范和适度地给学生以数学文化的熏陶,并尽可能使传统教学与现代教学理念接轨等诸多方面都做了不少有益的尝试.另外,这套教材对深度和广度的处理以及对系统性和严谨性的处理都把握得较好,适合于大批同类工科院校公共高等数学课使用.

我确信,随着高等教育在中国的趋于普及,教材也应该更加丰富和多样化,以便供不同层次和不同需求的院校选用,并在使用中锤炼出精品.因此,我很赞赏北京工业大学数理学院这几位老师所作的努力,且诚挚地把他们编写的这套新教材推荐给有关院校使用.

李心灿
2006 年春

第 2 版前言

《高等数学》教材(第 2 版)是一套完整的教材体系,包括教材和《高等数学例题和习题集》。

《高等数学》教材是根据编者多年的教学实践,为适应北京市精品课程的建设需要,在第 1 版的基础上修订而成的。《高等数学》上册包括预备知识、一元微积分。《高等数学》下册包括空间解析几何与向量代数、多元微积分、微分方程和级数。各节末配有习题,各章末配有综合练习。《高等数学例题和习题集》与教材各章配套,书后附有习题答案。

《高等数学》第 2 版由范周田、张汉林统稿,参加修订的有范周田、张汉林、平艳茹、杨晓华、徐大川、丁津、唐競、王术。

《高等数学例题和习题集》由范周田、张方统稿,参加编写的有丁津、田鑫、杨晓华、张方、李贵斌、张汉林、范周田、胡京兴。

本套教材在内容的编排上,首先满足《高等数学教学大纲》的要求,注意了与中学数学教学的衔接,强调基本概念的理解和基本技巧的掌握。同时,为了适应优秀学生考研和竞赛的需求,在教材和配套习题集中适当加入相关重点内容,适用于高等院校工科类专业学生使用,也可作为自学、考研的参考书。

由于编者水平和时间所限,对书中不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编 者

第 1 版前言

微积分是有关运动和变化的数学,它是人类智慧最伟大的成就之一.微积分作为数学科学的一个重要组成部分,它的思想、方法和语言独特优美.微积分诞生后的三百多年不断证明着它在阐明和解决数学、物理学、工程科学以及经济学、管理科学、社会学和生物科学等各领域问题时具有强大威力.正因为如此,微积分无可置疑地成为培养人才的必备知识的重要组成部分.在全世界,微积分已经成为理工科大学学生的必修课程,而且正在成为所有专业大学生的必修或选修课程.甚至许多高级中学也已经把微积分作为必修或选修课程.

现在,国内针对不同对象、不同层次、不同水平具有不同风格的有关微积分(高等数学)的教材层出不断,大量的教材出版充分表明了我国高等教育的发展,同时需求量之大,更说明了微积分在各学科的重要地位.20 世纪后半叶是科技和社会迅速发展的时期,尤其是计算机、计算技术、因特网和网络技术的惊人的、超乎想象的发展,为数学的应用开辟了无限广阔的前景.数学的应用正在向一切领域渗透,各行各业对数学的需求正在前所未有地增长.

面对科技进步及其对高等数学课程产生的新的需求,以及教育部通过在全国提倡精品课建设、大力推动高等教育教学质量的提高,在这样的大背景下,多年奋斗在高等数学教学第一线的我们,怀着多年积累的对改进教材的深切愿望,今天有北京工业大学自己特色的高等数学教材终将呼之欲出了.我们本着以学生为中心、处处为学生着想、为学生服务的思想编写教材,并意识到只有做到与时俱进,编写的教材才能为学生喜爱,受学生欢迎.

首先,本书的目标是十分明确的.由于我们有这样的信念,即微积分的根本目的在于帮助学生为进入数学、科学与工程等各领域从事实际工作做准备.尤其对工科学生,扎实的数学基础,良好的理性思维训练,对他们的一生事业都是不可或缺的.我们还深切了解各专业的后继课程对数学的需要,知道怎样在教材编写中体现对工科学生理性思维能力的培养和实际运用能力的提升.

其次,由于我国长期以来,一、两本书一统天下造成的思维定势,较大幅度地改进国内高等数学教材是十分不容易的.但是,具有各高校特点的、对传统微积分讲法的革新早已悄然登场,百花齐放的竞争局面已经形成.在这种绝好的势态下,我们以适合重点工科大学特色的《高等数学》教材参与这一百家争鸣的行列,为的是“实践出真知”,没有比较,没有参与,就不能产生真正的精品课程教材.

第三,本书是北京工业大学应用数理学院应用数学学科部集体智慧和经验的结晶.除了直接参与编写的几位教授、副教授在写作系统上作了大量的研究和努力,且精选了适度的、按难易程度分层的习题外,几乎全学科部的年轻教师都参与了配套多媒体课件的研制工作.大家协同互助,使北京工业大学高等数学的精品课程建设真正形成了所期望的良性推进、集体共同提高教学质量的大好局面.

第四,我们还认为,在微积分的早期学习中渗透数学建模的思想和方法是极为重要的.书中安排了一些使学生初步获得用数学建模的思想和方法去解决问题的能力有关内容,以提高学生学习微积分及更多数学知识的兴趣和积极性.鉴于我国正在进行把数学建模的思想和方法有机融入大学的主干数学课程的研究与实践,这是大学数学教学改革的重要一环,我们在实践中已摸索了几年,并在本教材中得到体现.

第五,一本书不能构成一门课,必须要有教师和学生彼此的互动.教材是支持课程的信息资源,教材是死的,课程是活的.教师只有真正做到以学生为中心,对学生充满爱心,处处为学生着想,充分发挥教师的指导作用,才能使之成为富有成效的精品课程.我们希望本教材能够为教师授课提供充足的信息资源,帮助主讲教师在教学过程中充分发挥才能.

本书由张汉林任主编.编写的具体分工是:第2章、第3章3.8节由张汉林编写;第3章3.1~3.7节由杨晓华编写;前言、第0章、第1章由唐兢编写.全书的统稿和审校工作由张汉林、唐兢共同完成.

本书的编写已在北京工业大学教育研究项目中正式立项,教务处对本书的出版在经费上提供了有力的资助.另外,北京工业大学副校长蒋毅坚教授一直十分关心该项工作,并给予了多方面的鼓励和指导;数理学院的各级领导对本书也给予了大力支持;应用数学学科部范周田教授、张方副教授等许多教师对本书提出了十分有益的修改意见和建议,我们在这里一并对他们表示衷心的感谢!

李心灿教授主审了本书,积极评价了本书的特色,并针对书中存在的问题给出了十分有益的修改意见和建议,同时为本书写了序,在此向李心灿教授表示深深的敬意和由衷的感谢!

本书虽经多年教学实践经验积累而成,但由于编者学术水平有限,存在不妥甚至错误之处恐也在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

致学生的话

什么是微积分？

高等数学的核心内容是微积分。

微积分是关于运动和变化的数学。哪里有运动或增长，如变力做功产生的加速度，那里用到的数学就是微积分。微积分开创的初期是这样，今天仍然还是这样。

微积分首先是为了满足 16、17 世纪科学家对数学的要求，本质上说是为满足力学发展的需要而发明的。微分学处理计算变化率的问题，使人们能够定义曲线的斜率，计算运动物体的速度和加速度，可求得炮弹能达到其最大射程的发射角，还可以预测何时行星靠得最近或离得最远。积分学处理从函数变化率的信息决定函数自身的问题。它使人们能够从物体现在的位置和作用在物体上力的大小，计算该物体将来的位置。利用它还可求平面上不规则区域的面积，度量曲线的长度，以及求任意空间物体的体积和质量，等等。

现在，微积分及其在数学分析方面的延伸发展意义深远。假如首先发明微积分的物理学家、数学家和天文学家能了解到微积分能够解决如此大量的问题，能够很深邃地理解我们周围的世界和宇宙的数学模型所涉及的众多领域的课题，他们肯定会感到十分的惊奇和高兴。希望学习微积分的你们也会有同样的感觉。

怎样学习高等数学？

学习高等数学不同于学习算术、代数和几何。在那些课程中你们主要学习怎样计算数、怎样简化代数表达式以计算出结果，以及怎样对平面上的点、线和图形进行简单推理。高等数学虽然还离不开这些基本方法和技巧，但要以更大的精确性及在更深的层次上发展其他方法和技巧。高等数学引进了很多新概念、新思想方法和各种新计算操作。事实上，你已经不可能在课堂上学会你所需要的所有内容。因此，学习方法必须与中学有所不同。

1. 听好教师的课堂讲授是绝对必要的。在当今所谓信息爆炸时代，要想一切知识都靠自学积累绝对是行不通的。因此，学好微积分的一条捷径是听老师讲，跟先行者学。听课是有学问的，可以有选择地听，但不可不听。走出自我，青年人大家一起学是现代高等教育的基本特征。

2. 仔细阅读教材。你不可能只通过做习题来学会你需要的全部内容。你需要阅读书中有关的内容并争取一步步独立地把例题解出来。快速阅读在这里不起作

用.你必须通过仔细阅读教程或相关参考书,并探究其深刻的细节才能学会.进一步的学习需要这类专注、耐心的阅读、思考和实践.

3. 独立做好作业. 以下原则是众多成功者的经验:

(1) 学习高等数学要养成借助几何直观的习惯;

(2) 用步步紧扣、合乎逻辑的方式写下你的每个分析解题过程,就像你是在给别人讲这个问题的求解过程一样;

(3) 养成探究问题的习惯,如思考一下为什么要在这里设习题?为什么要指定做这道习题?该习题和其他指定的习题有什么关联?等等.

4. 珍惜答疑时间. 通过勤问问题,会使你及时发现自己思考、分析问题的弱点,同时能养成提问质疑的好的科学思维习惯.

5. 每当学完教材的一节一章,试着独立地对关键知识点写一个简短的、以个人理解为基础的概述、评论或总结. 渐渐地,你就会从中受益,会获得长足的进步.

学习高等数学是一个过程,它不可能一蹴而就. 刚开始会感觉很难,一定要有耐心,要锲而不舍,要不断提问,要和同学讨论和共同研究,取长补短. 学习微积分的回报不仅在智力上而且在专业上都将会是令你非常满足、且终生难忘的一段经历.

学习数学要有办法. 对任何学科而言,学识由两大部分组成:知识与才智. 才智是运用知识的能力. 没有一定的独立思考、能动性和创新精神就谈不上才智. 在数学中,才智就是解问题,找出证明,评议百家,流畅地运用数学语言和工具,在各种场合都有辨认数学概念的能力. 才智比仅有知识更为重要.

学习要遵循哪些原则?

1. 主动学习原则

德国物理学家李希坦贝尔格说:“那曾经使你不得不亲自动手发现了的东西,会在你脑子里留下一条路径,一旦有所需要,你就可以重新运用它.”

2. 循序渐进原则

3. 审同辨异原则

审同辨异,即同中观异,异中观同,这是发明创造的开始. 异中观同就是抓住本质,抓住共性. 同中观异呢? 法国雕塑家罗丹说:“所谓大师就是这样的人,他们用自己的眼睛去看别人见过的东西,在别人司空见惯的东西上能够发现出美来.” 同中观异似乎更难.

对同一个概念,或同一个定理,不同的人有不同的理解,其深度可以相差甚远.

对数学中的重要概念要多花一些心思去琢磨它. 要借助大量丰富的例子去加深对概念内涵的理解. 有些同学没有学好数学,常常是因为基本概念没有弄

清楚.

4. 训练直觉力

数学中有许多著名猜想都是靠直觉产生的. 例如, 哥德巴赫猜想、费马大定理、黎曼猜想、四色问题等都是实验、猜测、归纳和类比在数学发现中的著名事例. 所以, 在数学学习中应关注对直觉力的训练和鼓励.

5. 培养鉴赏力

鉴别真与假、好与坏、美与丑、重要与不重要、基本与非基本, 是一件非常重要的事情. 有鉴别力的学生会区分主次, 自然学得好. 培养鉴赏力的一个手段是经常作比较, 可能的话, 展示最好的. 具有鉴赏力的学生能够抓住事物的本质.

目 录

序

第 2 版前言

第 1 版前言

致学生的话

第 0 章 预备知识	1
0.1 几个常用符号	1
0.2 区间与邻域	2
0.3 二元关系与函数的概念	2
0.3.1 二元关系	2
0.3.2 函数	3
0.3.3 逆关系与反函数	3
0.3.4 有界函数	3
0.3.5 分段函数与 Dirichlet 函数	4
0.4 基本初等函数	5
0.5 初等函数	10
0.6 函数的表示与函数的图像	11
0.7 关于命题	17
综合练习题 0	17
第 1 章 极限与连续	19
1.1 数列极限	19
习题 1.1	24
1.2 函数极限的概念	26
1.2.1 自变量 $x \rightarrow +\infty$ ($-\infty$ 或 ∞) 时函数的极限	26
1.2.2 自变量 $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \neq 0$) 时函数的极限	29
1.2.3 无穷小与无穷大	35
习题 1.2	36
1.3 函数极限的性质与运算	38



1.3.1 极限的性质	38
1.3.2 极限的运算法则	39
1.3.3 无穷小的比较	41
习题 1.3	43
1.4 极限存在准则与两个重要极限	44
习题 1.4	53
1.5 函数的连续性	55
1.5.1 函数的连续性的定义	55
1.5.2 函数的间断点	57
1.5.3 闭区间上连续函数的性质	59
习题 1.5	64
综合练习题 1	65
第 2 章 导数与微分	67
2.1 导数的概念	67
2.1.1 速度和切线问题	67
2.1.2 导数的概念和导数的几何意义	69
2.1.3 可导与连续的关系	73
习题 2.1	75
2.2 导数法则	77
2.2.1 四则运算的求导法则	77
2.2.2 反函数的求导法则	78
2.2.3 复合函数的求导法则	79
2.2.4 高阶导数	83
2.2.5 隐函数及参数方程所确定函数的导数	86
2.2.6 相关变化率问题	91
习题 2.2	92
2.3 微分	95
2.3.1 微分的定义	95
2.3.2 微分的几何意义	96
2.3.3 一阶微分的形式不变性	96
2.3.4 微分在近似计算中的应用	98
习题 2.3	99
综合练习题 2	100

第 3 章 微分中值定理及其应用	101
3.1 微分中值定理	101
3.1.1 费尔马引理	101
3.1.2 微分中值定理	102
习题 3.1	109
3.2 洛必达法则	111
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	111
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	112
3.2.3 其他类型的未定式	115
习题 3.2	117
3.3 函数性态的研究	118
3.3.1 函数的单调性	118
3.3.2 函数的极值及其求法	120
3.3.3 函数的最大值与最小值及其应用	123
3.3.4 函数的凹凸性及拐点	126
3.3.5 函数图形的描绘	129
习题 3.3	132
3.4 泰勒公式	134
习题 3.4	141
3.5 单调性与不等式	142
习题 3.5	146
3.6 曲率、曲率圆及曲率半径	147
3.6.1 弧长的微分	147
3.6.2 曲率及其计算公式	148
3.6.3 曲率圆与曲率半径	149
习题 3.6	151
综合练习题 3	151
第 4 章 不定积分	153
4.1 不定积分的概念和性质	153
4.1.1 原函数与不定积分的概念	153
4.1.2 不定积分的基本公式	156

4.1.3 不定积分的线性性质	157
习题 4.1	159
4.2 换元积分法	161
4.2.1 第一类换元法(凑微分法)	161
4.2.2 第二类换元法	168
习题 4.2	171
4.3 分部积分法	173
习题 4.3	179
4.4 几种特殊类型函数的不定积分	180
4.4.1 有理函数的积分	180
4.4.2 简单无理函数的积分	182
4.4.3 三角函数有理式的积分	184
习题 4.4	186
综合练习题 4	186
第 5 章 定积分	188
5.1 定积分的概念	188
5.1.1 问题的提出	188
5.1.2 定积分的概念	190
5.1.3 定积分的几何意义	191
5.1.4 定积分的存在定理	192
习题 5.1	194
5.2 定积分的性质	195
习题 5.2	198
5.3 微积分基本公式	200
习题 5.3	207
5.4 定积分的计算	209
5.4.1 定积分的换元法	209
5.4.2 定积分的分部积分法	216
习题 5.4	221
5.5 广义积分	223
5.5.1 无穷限的广义积分	223
5.5.2 无界函数的广义积分	225
* 5.5.3 广义积分的审敛法	229
习题 5.5	231

5.6 积分不等式	233
习题 5.6	237
综合练习题 5	238
第 6 章 定积分应用	240
6.1 定积分在几何上的应用	241
6.1.1 平面图形的面积	241
6.1.2 体积问题	244
6.1.3 平面曲线的弧长	246
习题 6.1	248
6.2 定积分在物理学中的应用	249
6.2.1 变力沿直线所做的功	249
6.2.2 液体的静压力	250
6.2.3 引力	251
习题 6.2	253
6.3 定积分在经济学中的应用	254
习题 6.3	255
综合练习题 6	255
参考文献	257



第0章

预备知识

为了方便阅读本书,这里把书中一些常用记号集中给出.同时,我们把初等数学已经涉及又和微积分密切相关的一些知识进行罗列或重新叙述,如函数的概念、某些特殊形式的函数,以及基本初等函数的图像与性质等,以备读者参考、查阅.另外,我们也给出了一些在本书中有严格证明的结果,如单调性、极限等,同样是为了查阅方便.

0.1 几个常用符号

自然数集合: $\mathbb{N}$

有理数集合: $\mathbb{Q}$

实数集合: $\mathbb{R}$

整数集合: $\mathbb{Z}$

正整数集合: $\mathbb{N}^+$ 或 $\mathbb{Z}^+$

全称量词: $\forall$ 表示“对所有的”或“对任意给定”等

存在量词: $\exists$ 表示“存在”或“有些”,“某个”等

属于符号: $\in$ 表示“属于”

例如,对于任意给定的自然数 x , 存在自然数 y , 使得 $y > x$, 可以简写为 $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \text{使得 } y > x$.



0.2 区间与邻域

在一元微积分中,区间(interval)和邻域(neighbourhood)都是实数集 $\mathbb{R}$ 的特殊子集,用集合的方式写出

开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;

闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;

半开半闭区间: $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$;

无穷区间: $[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}$, $(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}$,
 $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$.

x_0 的 δ -邻域($\delta > 0$): $U(x_0, \delta) = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ 或 $U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}$ 是一个以 x_0 为中心、长度为 2δ 的对称开区间,区间半长 δ 称作邻域的半径.

x_0 的去心 δ -邻域: $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$.

集合的概念迟至 1873 年才由俄国数学家康托尔(Cantor, 1845~1918)提出的. 自集合概念出台,人们才在现代数学的思想下看出“集合是数学的基本对象”,“集合是现代数学的奠基石”,有人还把集合的生日 1873 年 12 月 7 日作为现代数学时期的开端.

0.3 二元关系与函数的概念

0.3.1 二元关系

设 A, B 是两个非空集合,称

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

为 A 与 B 的笛卡尔积, (x, y) 称为有序对. 注意, $(x, y) = (u, v)$ 当且仅当 $x = u$, $y = v$. 设 R 为笛卡尔积 $A \times B$ 的任意一个子集,我们称 R 为集合 A 到集合 B 的一个二元关系(binary relation) 定义

$$\text{dom}(R) = \{x | x \in A, \text{存在 } y \in B, \text{使得 } (x, y) \in R\}$$

$$\text{ran}(R) = \{y | y \in B, \text{存在 } x \in A, \text{使得 } (x, y) \in R\}$$

$\text{dom}(R)$ 和 $\text{ran}(R)$ 分别称为 R 的定义域(domain)和值域(range).

例 0.1 令 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.