■ 高等学校教材

高等数学

上册

胡志兴 苏永美 孟 艳 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

■ 高等学校教材

高等数学

上册

胡志兴 苏永美 孟 艳 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是根据多年教学实践，参照"工科类本科数学基础课程教学基本要求"和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，按照新形势下教材改革的精神编写而成。与同类教材不同，本书将数学软件 Mathematica 融入到教学实践环节中，对传统的高等数学教学内容和体系进行适当整合，力求严谨清晰，富于启发性和可读性。

全书分上、下两册。上册内容为函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，一元函数积分学及其应用和无穷级数。下册内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分及常微分方程。书中还配备了丰富的例题和习题，分为 A（为一般基本要求）、B（有一定难度和深度）两类，便于分层次教学。

本书可作为高等学校理、工科各类专业高等数学课程的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册／胡志兴，苏永美，孟艳编. —北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027236-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①胡…②苏…③孟…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 085318 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009 年 7 月第 1 版
印　　张	30.25	印　　次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	560 000	定　　价	32.30 元

物料号　27236-00

序

“数学是科学的皇后”，“数学是打开科学大门的钥匙”。以微积分为主体的“高等数学”是大学中最重要的基础课程之一，它不仅为后续课程的学习和科研工作的开展提供了必要的数学基础和数学工具，而且对于学生理性思维的培养，科学素养的形成，分析问题解决问题能力的提高，都有重要而深远的影响。

北京科技大学是首批进入国家 211 工程的全国重点大学，具有雄厚的师资力量和良好的教学传统。经过多年的准备，该校组织了几位长期辛勤耕耘在教学第一线、业务水平高、教学经验丰富的骨干教师，遵循新形势下教材改革的精神，参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会 2003 年制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参照教育部考试中心颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，编写了这部《高等数学》教材，这部教材的出版也是编者多年从事高等数学的教学工作的结晶。

这部教材立足于重点院校和普通高等院校高等数学教学的需要，对于传统的高等数学教学内容和体系进行了适当的整合，力求使教材体系更合理、系统和完整；并能恰当处理好数学发现与知识传授的关系，使之更符合教学规律与认知规律，从而既便于教师使用，又便于学生自学。

为了体现教学指导思想、教学内容体系和教学目标要求，这部教材在每章的开头都给出了该章内容的“知识结构框图”，在每章末给出了“本章小结”，这有利于读者理解、掌握每章的主要内容；在每章内容之后增编了数学 Mathematica 软件的应用，利用数学软件进行数学实验，可以增加学生学习兴趣，也为学生更好地学习和理解数学知识提供有益的帮助；教材中配置的例题和习题丰富、覆盖面大、难度深度适当，并且习题分为 A、B 两类，便于分层次教学，A 类练习为一般基本要求，B 类为有一定难度和深度的题目。

这部教材结构严谨、论述清晰、文句流畅，富于启发性、可读性，是一部颇具特色的好教材。

李心灿

2008 年 12 月于北京

前　言

高等数学是大学非数学专业学生必修的一门重要的数学基础课程。本课程不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础,而且也是培养学生的基本数学素质,提高学生综合分析、解决问题能力和创新能力的重要保证。

本书是由我系数位长期讲授“高等数学”课程的教师,根据他们多年的教学实践,按照新形势下教材改革的精神,结合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成的。本书分上下两册出版,上册介绍一元函数与极限,一元函数微分学,中值定理及应用,一元函数积分学和级数;下册介绍空间解析几何,多元函数微分学及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分和微分方程。

为了帮助读者抓住重点,尽快掌握所学的内容,提高学习质量与效率,每章开头给出了该章内容的知识结构框图,针对读者在学习过程中容易出现的错误、较难理解的知识点,加入适当的注释,以帮助读者在学习过程中更好地理解和掌握相关内容。另外,在各章末还增加了“本章小结”。每节后编排了内容丰富、覆盖面较广的习题。为了便于分层教学,习题分成 A、B 两类,其中 A 类习题是基本题,读者认真独立完成此类题目,可以对基本概念、基本理论和基本方法达到较深入的理解和把握;B 类习题则是有一定难度或综合性较强的习题,以帮助读者进一步提高数学能力和素养。本书标 * 号的内容为选学内容,可供对数学要求较高的专业选用。

根据编者多年教学体会,本书在内容编排上和传统教材相比作了一些调整。将不定积分、定积分及其应用合编为一章,先讲定积分,后讲不定积分。这样编写,更好地体现了定积分与不定积分关系,使学生学习不定积分有了更明确的目的。为了保持极限、反常积分和无穷级数的内在联系,将无穷级数部分安排到上册讲解,并增加了无穷级数表示非初等函数和定义初等函数等内容,使读者能在更高层次上理解基本初等函数。

在多元函数微分学部分中,将全微分概念放到偏导数前面,其目的在于让学生尽早地接触到全微分的概念,在此基础上自然地引出偏导数的概念。在曲线积分与曲面积分部分,增加了“格林公式的一个物理原型”,使读者能清楚地了解到格林公式、高斯公式及斯托克斯公式产生的物理背景及这些公式的深刻的思想内涵,增加对读者创新能力的培养,并能够将数学知识灵活运用到社会实践中去。

学习高等数学的目的是培养学生运用数学的思想、理论和方法去学习后续课程及解决科研、生产和生活实际中的实际问题。本书在每章内容之后增编了数学 Mathematica 软件的应用，使学生在掌握相应知识的同时，学会使用数学技术及现代计算工具。

本书内容的阐述始终以“加强基础，强调应用”为指导思想，使读者通过对本书的学习，能尽快地掌握高等数学的基本理论和方法，培养读者的数学素养，提高读者的分析问题和解决问题的能力。

本书由郑连存编写第九章和第十章，胡志兴编写第四章和第六章，王辉编写第一章和第七章，苏永美编写第五章和第八章，孟艳编写第三章，朱婧编写第二章和全书的 Mathematica 软件的应用。全书由许三星策划和统稿，并由北京科技大学高等数学课程组讨论定稿。

在本书的编写过程中，李心灿教授给予了热情的关心和真挚的帮助，认真审阅了书稿，提出了许多中肯的修改意见，并热情为本书作了序。李仲来教授和王来生教授进行了细致的评审，提出了许多宝贵的建议，同时得到了高等教育出版社和北京科技大学各级领导的大力支持，编者在此表示衷心的感谢!

由于编者水平所限，错漏之处在所难免，恳请同行和读者不吝指正。

编者

2009 年 2 月

目　　录

第一章 函数与极限

初等数学研究的对象是常量, 而高等数学研究的对象是变量. 函数描述了变量之间的一种依赖关系. 极限方法是研究变量的一种基本方法, 而极限的概念与方法贯穿于整个微积分始终. 本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等概念及其性质, 其知识结构框图如图 1–1 所示.

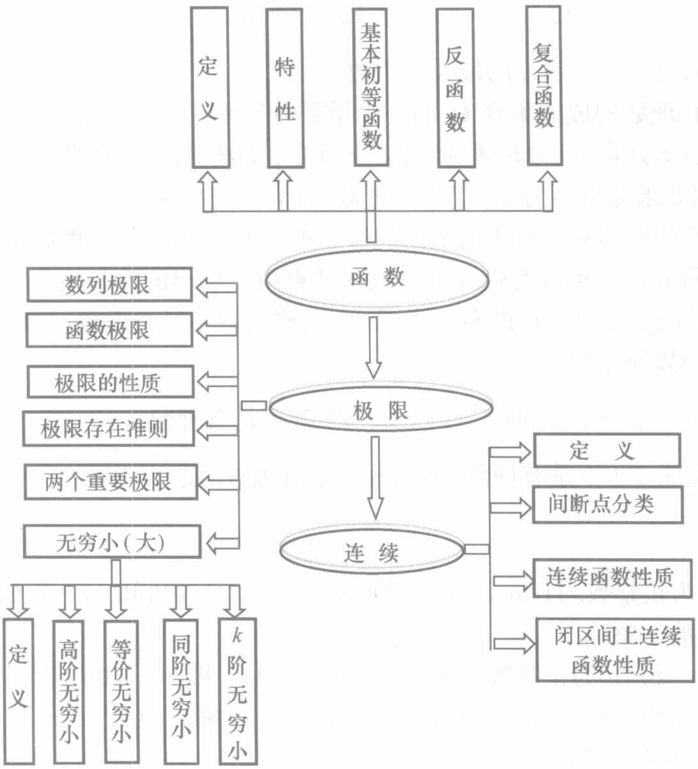

图 1–1

第一节　变量与函数

一、实数及其性质

1. 有理数与无理数

实数在高等数学中起着重要的作用, 实数包括有理数和无理数. 人类最早认识的是自然数: $0,1,2,3,\cdots$, 通常用大写字母 $\mathbf{N}$ 表示自然数全体, 用 $\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数. 若在自然数的基础上添加负整数, 则所构成的数称为**整数**, 通常用字母 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数, 用 $\mathbf{Z}^+$ 表示全体正整数. 若在整数集合中引入乘法及其逆运算除法, 则由整数可扩充得到有理数, 通常用字母 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数, 即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\, m,n\in\mathbf{Z}, n>0,(m,n)=1\right\},$$

其中 (m,n) 表示 m 与 n 的最大公约数.

全体有理数构成的集合 $\mathbf{Q}$ 的一个重要特征是它对于加法及其逆运算减法、乘法及其逆运算除法 (分母不为零) 是封闭的, 即任意两个有理数进行加、减、乘或除 (除法要求分母不为零) 仍为有理数, 且满足交换律、结合律和分配律. 因而全体有理数构成的集合对于通常的加法和乘法而言又称为**有理数域**.

公元前五百多年古希腊人就发现等腰直角三角形的腰与斜边没有公度 (公度意指公共的度量单位), 进而证明了 $\sqrt{2}$ 这样的数不是有理数, 这也是人类首次认识到无理数的存在.

例 1.1　用反证法证明: $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ 都不是有理数.

证　先证 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 倘若 $\sqrt{2}$ 是有理数, 设

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n},$$

其中 m,n 为正整数, 且 m,n 互质. 则 $m^2=2n^2$, 从而可知, m^2 能被 2 整除, 所以 m 也能被 2 整除.

设 $m=2p$ (p 为正整数), 则 $2n^2=m^2=4p^2$, 即 $n^2=2p^2$, 从而 n^2 也能被 2 整除, 故 n 也能被 2 整除. 于是 m,n 都能被 2 整除, 这与 m,n 互质的假设矛盾. 故 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

同理可证: $\sqrt{3}$ 、$\sqrt{5}$ 都不是有理数.

众所周知, 有理数可以表示为有限小数或无限循环小数, 而将无限不循环小数称为**无理数**. 然而, 有理数和无理数之间最终有何联系呢? 事实上, 当在有理数域中引入极限运算后可以看到, 任何一个无理数均可以看作为某个有理数序列的极限. 例如, $\sqrt{2}$ 可以看作有理数序列 $\{x_n\}$

$$x_1=1.4, x_2=1.41, x_3=1.414,\cdots$$

的极限.

通常将有理数与无理数统称为**实数**, 并用大写字母 $\mathbf{R}$ 表示全体实数. 由于全体实数构成的集合对于通常的加法和乘法满足与有理数域完全类似的性质, 因而全体实数构成的集合又称为**实数域**.

2. 实数域的连续性与完备性

有理数域和实数域的本质区别有两个方面: 一是实数域的连续性, 二是实数域的完备性. 所谓实数域的连续性是指实数域中全体实数和数轴上的全部点之间可以建立一一对应关系, 即实数域中的全体实数充满了整个数轴. 然而, 有理数域中的全体有理数虽然在数轴上的分布密密麻麻, 但不能够充满整个数轴. 实数域的完备性是指在实数域中引入极限运算后仍然保持封闭. 然而, 有理数域对于极限运算而言是不封闭的.

二、数轴、集合、区间、邻域

1. 数轴

笛卡儿 (Descartes, 1596—1650) 引入了坐标的概念, 这使得在全体实数构成的集合和一条直线上的所有点之间可以建立一一对应关系. **数轴**是由一条直线和其直线上的一个定点 O 组成, 其中定点 O 称为**原点**, 并在直线上规定有固定的单位长度, 选定某一方向为数轴的正向, 相反的方向成为数轴的负向, 如图 1–2 所示.

对于任意给定的实数 x, 若 $x>0$, 则在数轴的正向上可唯一确定一点 P, 使得长度 $|OP|=x$; 若 $x<0$, 则在数轴的负向上可唯一确定一点 P, 使得长度 $|OP|=-x$; 若 $x=0$, 则在数轴上选取 $P=O$ 相对应. 这样, 全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$ 和数轴上所有点之间建立了一一对应关系, x 称为点 P 的**坐标**.

图 1–2

2. 实数的绝对值

绝对值的概念以及一些常用的绝对值不等式在高等数学中经常使用. 下面介绍绝对值的概念及性质.

对于任意给定的实数 $x\in\mathbf{R}$, x 的**绝对值** $|x|$ 定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

显然, 由图 1–2 可以看出, x 的绝对值 $|x|$ 表示点 P 到原点 O 的距离, 根据绝对值的定义, 不难得到绝对值的如下简单性质.

性质　对于任意的实数 $x, y \in \mathbf{R}$, 有

(1) $|x| \geqslant 0$, 且 $|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) $|-x| = |x|$;

(3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (三角不等式) .

3. 集合

集合是指具有某种共同属性的对象的全体. 集合中的每个对象称为该集合的**元素**. 通常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 等表示集合, 而用小写字母 $a, b, c, x, y, z, \cdots$ 等表示集合中的元素. 记号 $a \in A$ 或 $a \notin A$ 表示元素 a 属于或不属于集合 A. 一个没有任何元素的集合称为**空集**, 记作 $\varnothing$.

集合的表示方法通常有两种: 一种是**列举法**, 另一种是**描述法**. 若一个集合 A 的元素只有有限个或可列无穷个 (即每个元素可以标以号码, 一个一个地数出来), 则可用如下列举法表示该集合

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

又如, 数轴上位于 -1 和 1 之间的所有点的集合 E 可以用描述法表示为

$$E = \{x | -1 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

4. 区间

对于给定的两个实数 $a, b \in \mathbf{R}$ $(a < b)$, 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数 x 构成的集合 $\{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}.$$

闭区间 $[a, b]$ 如图 1–3 所示.

同理, 实数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a, b), 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

开区间 (a, b) 如图 1–4 所示.

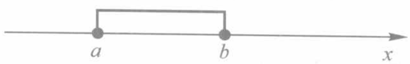

图 1–3

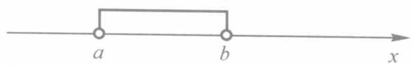

图 1–4

实数集 $\{x | a < x \leqslant b\}$ 和 $\{x | a \leqslant x < b\}$ 分别称为**半开区间**, 分别记作 $(a, b]$ 和 $[a, b)$, 即

$$(a, b] = \{x | a < x \leqslant b\} \quad 和 \quad [a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}.$$

在上述各种区间中, $b-a$ 称为**区间的长度**, 且 a 和 b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**. 又由于区间长度有限, 这些区间又称为**有限区间**.

引进符号 $-\infty$, 表示实数沿 x 轴的负方向无限变小 (其绝对值无限变大), 读作**负无穷大**, 符号 $+\infty$ 表示实数沿 x 轴的正方向无限变大, 读作**正无穷大**. 若上述区间中的 a 或 b 形式上可取为 $-\infty$ 或 $+\infty$, 则可以有如下五种**无穷区间**:

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\},\quad [a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

有限区间和无限区间统称为**区间**.

5. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta>0$, 将开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**, 记作 $U(a,\delta)$, 即

$$U(a,\delta)=\{x\,||x-a|<\delta\}\,,$$

其中 a 称为该**邻域的中心**, δ 称为该**邻域的半径**, 如图 1–5 所示.

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉, 则称为**点 a 的去心 δ 邻域**, 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|0<|x-a|<\delta\}\,,$$

如图 1–6 所示, 其中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$.

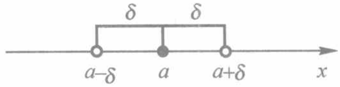

图 1–5

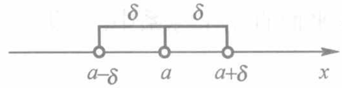

图 1–6

类似地, 把 $(a,a+\delta)$ 称为**点 a 的右 δ 邻域**; 把 $(a-\delta,a)$ 称为**点 a 的左 δ 邻域**.

例 1.2 试用绝对值不等式表示点 5 的 $\dfrac{1}{2}$ 去心邻域.

解 由去心邻域的定义知, 所求绝对值不等式为 $0<|x-5|<\dfrac{1}{2}$.