信息与计算科学丛书——45

大气海洋中的偏微分方程组与波动学引论

〔美〕Andrew Majda 著

陈南 王晓明 程晋 江渝 译

科学出版社

www.sciencep.com

信息与计算科学丛书 45

大气海洋中的偏微分方程组与波动学引论

〔美〕 Andrew Majda 著

陈 南 王晓明 程 晋 江 渝 译

科 学 出 版 社

北 京

图字：01-2009-4245

内 容 简 介

本书介绍了大气海洋中的波动学及围绕 Boussinesq 方程组展开的各种偏微分方程组. 主要内容包括: 分层流动的性质, 强分层流动的线性和非线性不稳定性, 旋转浅水理论, 色散波理论及其在地球物理中的应用, 强分层流动方程组, 旋转 Boussinesq 方程组与分层准地转方程组, 快波平均引论, 以及赤道大气海洋波动学理论.

本书可作为数学专业、地球物理专业高年级本科生、研究生教材或相关专业科研人员的参考书.

Morse Professor of Arts and Sciences
Department of Mathematics and
Climate, Atmosphere, Ocean Science (CAOS)
Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University

图书在版编目(CIP)数据

大气海洋中的偏微分方程组与波动学引论 / (美)马杰达(Majda, A.) 著; 陈南等译. —北京: 科学出版社, 2009
(信息与计算科学丛书; 45)

ISBN 978-7-03-025671-3

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①马… ②陈… Ⅲ. 海洋动力学 Ⅳ. F731.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 172631 号

责任编辑: 范庆奎 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 10 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2009 年 10 月第一次印刷 印张: 15
印数: 1—2 500 字数: 286 000

定价: 50.00 元

如有印装质量问题, 我社负责调换

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 多册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于2004年9月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　　言

本书取材自作者 1995, 1997, 1999 以及 2001 年在柯朗研究所教授研究生课程时的讲义, 现代应用数学融会了严格的分析、渐进展开、定性分析以及数值模拟. 这些课程强调了地球物理流动结合现代应用数学可以得到许多引人入胜的结果. 通过这种方式, 旨在将数学家们吸引到大气海洋科学 (AOS) 的研究中, 同时也为研究生和 AOS 的研究者提供一套适合于阅读的讲座笔记. 在阅读本书期间, Adrian Gill 的应用性读物 [11] 以及 Pedlosky 的著作 [29] 将经常被作为补充阅读材料, 供课外学习. 尽管我们推荐读者阅读包含不可压缩流动内容的 [2, 19] 以及包含许多地球物理流动中数学物理方面有趣课题的 [4, 26, 33], 但在学习本书时并不需要掌握太多关于流体动力学方面的预备知识.

致谢

感谢 Pedro 教授和他以前的博士生 Jonathan Callet 对于本书早期版本中第 2, 4, 5, 7 章的贡献. 本书也包含了早期讲座课程中作者与 Embid 教授的共同研究成果以及与作者以前的柯朗所博士后 Marcus Grote 教授和 Misha Shefter 教授的合作工作, 在此衷心感谢他们给予的直接和间接的帮助. 本书的第 9 章从 2001 年春季起成为讲座课程的一部分, 作者现在的柯朗所博士后 Boualem Khouider 对这一章的写作提供了很多帮助. 最后, 感谢国家自然科学基金委和海军研究处对于本书编写给予的慷慨支持以及为 Embid 教授在 20 世纪 90 年代访问柯朗研究所时提供的部分经费资助.

目　录

第1章　引　　言

旋转和分层效应是大气与海洋流动中最显著的两个特点. 本章将引入包含旋转和分层效应的最简单的方程组, 通过建立简单精确解来揭示其基本结构, 并将通过其他的一些近似, 提出诸如浅水方程组等模型方程.

1.1　包含旋转和分层效应的方程组的基本性质

在一定的尺度范围内, 大气和海洋中的流体动力学被重力和地球旋转的相互作用所控制, 其密度在某一参考状态附近变化. 流体运动得足够缓慢从而可以忽略其可压缩效应. 在这些尺度内的控制方程, 被称作*旋转 Boussinesq 方程组*, 关于这个方程组以及由它所支持的重力波等方面的内容, 可以参阅 A. E. Gill 的书 [11]. 以下面这些定义作为开始:

定义

$$
\begin{aligned}
\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) &= \text{坐标系}\\
\vec{e}_3 = (0,0,1) &= \text{“向上”单位向量}\\
\vec{v}(\vec{x},t) = (v_1(\vec{x},t), v_2(\vec{x},t), v_3(\vec{x},t)) &= \text{速度}\\
\tilde{p}(\vec{x},t) &= \text{压强}\\
\tilde{\rho}(\vec{x},t) &= \text{密度}\\
\rho_b &= \text{参考常数密度}\\
g &= \text{重力加速度}\\
&\quad (\text{指向} \ -\vec{e}_3 \ \text{方向})\\
\nu \geqslant 0 &= \text{动力黏性系数}\\
\kappa \geqslant 0 &= \text{热传导系数}\\
f &= \text{旋转频率}\\
\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla) &= \text{全导数 (物质导数)}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

根据这些记号, 可以得到*旋转 Boussinesq 方程组*

$$
\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{e}_3 \times \vec{v} = -\nabla\tilde{p} + \nu\Delta\vec{v} - \frac{g\tilde{\rho}}{\rho_b}\vec{e}_3, \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} = \kappa\Delta\tilde{\rho}. \tag{1.2}
$$

如果 $\vec{v}\equiv 0$ 且满足静水压平衡条件

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\tilde{p}(x_3) = -\frac{g\tilde{\rho}(x_3)}{\rho_b}, \tag{1.3}$$

那么方程组存在一个基本精确解. 设密度是 x_3 的函数, 可以对静水压平衡条件进行积分来得到压强. 事实上, 在大气及海洋中的很多尺度中, x_3 方向的压强梯度几乎消除了 (1.3) 式右端浮力项的作用. 因此, 可以很自然地认为静水压平衡中的扰动是围绕某个平均状态进行的. 令

$$\tilde{\rho}(\vec{x},t) = \bar{\rho}(x_3) + \rho(\vec{x},t), \qquad \tilde{p}(\vec{x},t) = \bar{p}(x_3) + p(\vec{x},t), \tag{1.4}$$

其中 $\bar{p}$ 和 $\bar{\rho}$ 满足静水压平衡关系,

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\bar{p}(x_3) = -\frac{g\bar{\rho}(x_3)}{\rho_b}. \tag{1.5}$$

这样, p, ρ 和 $\vec{v}$ 满足

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f\vec{e}_3\times\vec{v} = -\nabla p + \nu\Delta\vec{v} - \frac{g\rho}{\rho_b}\vec{e}_3, \tag{1.6a}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{1.6b}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)v_3 = \kappa\Delta\rho + \kappa\frac{d^2\bar{\rho}}{dx_3^2}. \tag{1.6c}$$

(1.6c) 中 $d\bar{\rho}/dx_3$ 的符号是至关重要的. 在对流层低空区域内, 较稀薄气体有时会位于较稠密气体的下方, $d\bar{\rho}/dx_3$ 取正号, 但是这种情况是不稳定的. 考虑这样的实验: 对装有流体的容器下方进行加热, 对其上方进行冷却. 这样的状态不稳定, 因为底部热流体的密度小于其上方的流体. 对流层中云的结构与这个实验的热气团结构是相关的. 上至平流层, 下到深海, 轻流体介质位于重流体介质的上方才能维持波动. 在本章后面几节中将清楚地表明这些观点.

1.2　二维精确解

在这种情况下, 首先通过对记号的一个应用来强调旋转 Boussinesq 方程组中水平和垂直分量的区别. 这将得到大量的二维解. 这里以令 $\vec{v} = (\vec{v}_H, w)$ 作为开始, 其中

$$\begin{gathered}\vec{v}_H = (v_1, v_2), \qquad w = v_3, \qquad (v_1,v_2)^\perp = (-v_2, v_1),\\ \nabla_H\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right), \quad \Delta_H\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}, \quad \nabla_H^\perp\psi = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right),\\ \frac{D^H}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_H\cdot\nabla_H).\end{gathered} \tag{1.7}$$

根据这些记号, 可以通过水平和垂直分量的形式写出旋转 Boussinesq 方程组

$$\frac{D^H\vec{v}_H}{Dt}+w\frac{\partial\vec{v}_H}{\partial x_3}+f\vec{v}_H^{\perp}=-\nabla_H p+\nu\Delta\vec{v}_H, \tag{1.8a}$$

$$\frac{D^H w}{Dt}+w\frac{\partial w}{\partial x_3}=-\frac{\partial p}{\partial x_3}-\frac{g\rho}{\rho_b}+\nu\Delta w, \tag{1.8b}$$

$$\mathrm{div}_H\,\vec{v}_H+\frac{\partial w}{\partial x_3}=0, \tag{1.8c}$$

$$\frac{D^H\rho}{Dt}+w\frac{\partial\rho}{\partial x_3}+\left(\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)w=\kappa\Delta\rho+\kappa\frac{d^2\bar{\rho}}{dx_3^2}. \tag{1.8d}$$

这些记号导出了旋转 Boussinesq 方程组二维解的一种形式. 当 $w=0$, $\rho=0$ 并且 $\vec{v}_H$ 不依赖于 x_3 分量时, 方程组 (1.8) 成为了***二维齐次流体方程组***

$$\frac{D^H\vec{v}_H}{Dt}+f\vec{v}_H^{\perp}=-\nabla_H p+\nu\Delta_H\vec{v}_H,\qquad \mathrm{div}_H\,\vec{v}_H=0. \tag{1.9}$$

将其表示为如下的命题:

命题 1.1 令 $\vec{v}_H(x_1,x_2)$ 为均匀二维 Navier-Stokes 方程 (1.9) 的任意解. 那么 $\rho=0$ 和 $\vec{v}=(\vec{v}_H,0)$ 将导出旋转 Bossinesq 方程组的特解; 当 $\kappa=0$ 时, $\bar{\rho}(x_3)$ 是任意的, 而当 $\kappa>0$ 时, 必存在常数 c, 使其具有形式 $\bar{\rho}(x_3)=\rho_b+cx_3$.

被广泛研究的二维齐次流体方程组具有大量的精确解. 式 (1.9) 的解不依赖于深度. 它们被称为***正压流动方程组***, 并提供了流体在大尺度运动时的普遍特性. 这些方程本身是重要的, 并且它们为色散波提供了一个非常有价值的例证, 而在色散波中, 旋转的微分效应尤为关键.

正压方程组. 这里来更深入地研究一下正压方程组 (忽略黏性),

$$\frac{D\vec{v}_H}{Dt}+f(y)\vec{v}_H^{\perp}=-\nabla p,\qquad \mathrm{div}\,\vec{v}_H=0. \tag{1.10}$$

由于 $\mathrm{div}\,\vec{v}_H=0$, 所以存在一个流函数 ψ, 使得

$$\vec{v}_H=\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

引入向量场 $\vec{v}=(u,v)$ 的二维旋度 (curl)

$$\mathrm{curl}\,\vec{v}=-\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.12}$$

流体速度的旋度被称为***涡量***: $\mathrm{curl}\,\vec{v}_H=\omega$, 并且由 (1.11) 可知

$$\Delta_H\psi=\omega=\mathrm{curl}\,\vec{v}_H,\qquad \text{其中 } \Delta_H=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{1.13}$$

流函数的使用可以使散度条件自动满足, 而对式 (1.10) 作用旋度, 可以消除压强项并得到一个只含涡量 ω 的方程. 通过简单的计算得到:

$$\operatorname{curl}\left(\frac{D\vec{v}_H}{Dt}\right)=\frac{D\omega}{Dt}=\frac{\partial\omega}{\partial t}+\vec{v}_H\cdot\nabla\omega$$

以及

$$\operatorname{curl}\left(f(y)\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}\right)=\operatorname{curl}\left(f(y)\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\\-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{pmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.14}$$

此外, 对于任意函数 g, 根据 (1.11) 有

$$\vec{v}_H\cdot\nabla g=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}=\det\begin{pmatrix}\nabla\psi\\\nabla g\end{pmatrix}=J(\psi,g), \tag{1.15}$$

其中 $J(\psi,g)$ 表示变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\psi\\g\end{pmatrix}$ 的 Jacobi 行列式. 结合 (1.14) 与 (1.15), 可以发现 (1.10) 中的正压方程组等价于涡流形式的正压方程组.

涡流形式的正压方程组.

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+J(\psi,g)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi_x=0,\qquad \omega=\Delta\psi. \tag{1.16}$$

注意到如果旋转效应的微分为零, 即 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$, 那么 (1.16) 中的方程组成为了二维流动的涡流形式 (参阅 Majda 和 Bertozzi [19]). 在地球物理流动中, β 平面的正切近似表示为

$$f=f_0+\beta y,\qquad \beta\neq 0, \tag{1.17}$$

那么 (1.16) 成为

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+J(\psi,\Delta\psi)+\beta\psi_x=0, \tag{1.18}$$

当 $\beta\neq 0$ 时, 这是最简单的色散方程, 其波解被称为 Rossby 波, 它对于描述行星波的传播是重要的. 在本书后面将看到这一点. 通常来说, 可以在 (1.16) 中引入量 Q, 称为位涡, 其定义为

$$Q=\omega+f(y), \tag{1.19}$$

因此, 可以将 (1.16) 精炼地写为

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+J(\psi,Q)=0. \tag{1.20}$$

1.3 浮力与分层

下面, 对 $\partial\bar{\rho}/\partial x_3$ 保持常数时的 Boussinesq 方程组 (1.6) 建立基本精确解, 从而揭示重力效应的重要作用. 这些特殊的解只包含垂直方向的运动, 并且垂直运动与密度的改变都仅依赖于水平分量, 即寻找 (1.8) 在下列条件下的精确解:

$$\vec{v}_H = 0, \qquad p = 0, \qquad w = w(\vec{x}_H, t), \qquad \rho = \rho(\vec{x}_H, t). \tag{1.21}$$

将这些代入 (1.8) 中, 能得到 (w, p) 满足下面的简单方程组:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{g}{\rho_b}\rho, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right) w. \tag{1.22}$$

这些方程不依赖于空间坐标, 并且关于每个 $\vec{x}_H$ 都是简单的常系数常微分方程组. 事实上, w 和 ρ 都满足二阶方程

$$w_{tt} = -\omega_b^2 w, \qquad \rho_{tt} = -\omega_b^2 \rho, \tag{1.23}$$

其中

$$\omega_b^2 = \left(-\frac{g}{\rho_b}\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right). \tag{1.24}$$

那么这些解什么时候呈现出稳定的振荡现象呢? 显然, 当 ω_b^2 是一个正的量, 即

$$\omega_b = \left(-\frac{g}{\rho_b}\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)^{1/2} = N > 0 \tag{1.25}$$

是一个实的频率, 它被称为**浮力频率**或者 Brunt-Väisälä **频率** N. 那么, w 和 ρ 是具有下列形式的解:

$$w = A\cos\omega_b t + B\sin\omega_b t, \qquad \rho = \widetilde{A}\cos\omega_b t + \widetilde{B}\sin\omega_b t, \tag{1.26}$$

其垂直方向的运动仅仅是围绕初始平衡位置的振荡. 从式 (1.25) 可以看到 ω_b 恰为一个实的频率的条件是

$$\frac{d\bar{\rho}}{dx_3} < 0 \quad \text{密度随高度的上升而下降, 并且密度大的流体在密度小的流体的下方.} \tag{1.27}$$

在大气和海洋学中, 流体离开了大气、海洋、陆地边界层足够的距离后总会出现上面的情形. 因此, 它被称为**稳定分层**.

另一方面,

$$\frac{d\bar{\rho}}{dx_3} > 0 \quad \text{密度随高度的上升而上升, 并且密度大的流体在密度小的流体的上方.} \tag{1.28}$$

这种不稳定分层的情形下, (1.23) 的精确解具有下列形式:

$$w = Ae^{|w_c|t} + Be^{-|w_c|t}, \qquad \rho = \widetilde{A}e^{|w_c|t} + \widetilde{B}e^{-|w_c|t}. \tag{1.29}$$

这些精确解中的指数增长非常清楚地表明了不稳定的分层.

1.4 具有旋转和分层效应的射流

一简单流体速度

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u(y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

看上去像一简单的射流. 这样的流动是大气和海洋中最简单的基本模型解之一.

首先, 只考虑分层效应, 即在式 (1.8) 中令 $f \equiv 0$, 这样就可以忽略旋转项了. 那么 (1.30) 中的射流将自动成为 (1.8) 的精确解, 如果满足

$$\text{压强 } p \text{ 完全消失, 即 } p \equiv 0. \tag{1.31}$$

因此这些解在垂直方向上满足静水压平衡.

如果考虑旋转效应, 那么这些解会发生怎么样的变化呢? 下面, 假设在感兴趣的区域内令 $f(y) \neq 0$. 特别地, 这里将不考虑赤道附近的流动情况. 那里, 旋转效应非常强烈且压强是一个关于 (y,z) 的非平凡函数. 事实上, 通过压强 $p(y,z)$ 来定义 (1.30) 中关于这些精确解的速度是再好不过了. 回顾 (1.8) 能得到一个具有 (1.30) 形式的精确解, 当且仅当

$$u(y,z) = \frac{-\dfrac{\partial p}{\partial y}(y,z)}{f(y)}, \qquad \rho(y,z) = -\frac{\rho_b}{g}\frac{\partial p}{\partial z}(y,z). \tag{1.32}$$

(1.32) 中的第一个条件被称为**地转平衡**, 这是由旋转所引起的在水平压强梯度和流体速度之间的平衡. 这类效应在地球物理流动的大尺度问题中是非常重要的.

1.5 从垂直分层到浅水方程组

在随后的内容中将考虑中纬度和赤道附近的浅水方程组. 介绍它们是如何与包含垂直分层的控制方程相关的. 这里先以旋转 Boussinesq 方程组作为开始. 事实上, 大气中密度特性随高度的变化而剧烈地改变以至于 Boussinesq 近似将不被使用. 但对于这里所关心的问题来说这一差别并不是关键的, 因为更一般的方程组具有类似的行为.

旋转 Boussinesq 方程组.

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\vec{v}_H + f(y)\vec{v}_H^{\perp} &= -\nabla_H p,\\
\frac{D}{Dt}w &= -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho,\\
\frac{D}{Dt}\rho + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}w &= 0,\\
\operatorname{div}_H \vec{v}_H + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

平均密度 $\bar{\rho}$ 是一个关于 z 的已知函数. 特别地, 由于大气很稀薄, 因此可以作这样的假设：垂直方向的波动很快达到平衡从而 $\dfrac{Dw}{Dt}$ 这一项可以略去. (在偏微分方程的背景下理解这个假设的准确性将是一件有趣的事.) 在所谓的*原始方程组*中, 上面第二个方程就是静水压平衡条件

$$
-\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho. \tag{1.34}
$$

数学上来说, 原始方程组与分层方程组有着非常大的区别. 由不可压缩条件所决定的垂直速度本质地形成了随时间变化的压强. 不清楚原始方程组是否总是适定的. 有可能天气数值模拟中的黏性效应掩盖了问题的不适定性. 尽管如此, 这些依旧是目前正在被使用的标准方程组.

引入 $\theta = -g\rho$ 以及浮力频率 $N(z) = (-g\bar{\rho}_z)^{1/2}$ 并进行线性化.

线性化的原始方程组.

$$
\frac{\partial \vec{v}_H}{\partial t} + f(y)\vec{v}_H^{\perp} = -\nabla_H p, \tag{1.35a}
$$

$$
\frac{\partial p}{\partial z} = \theta, \tag{1.35b}
$$

$$
\frac{\partial \theta}{\partial t} = -N^2 w, \tag{1.35c}
$$

$$
\operatorname{div}_H \vec{v} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1.35d}
$$

这里可以断言方程组的解可以被写为无限个浅水方程组特征态的组合. 假设刚盖边界条件

$$
w|_{z=0,H} = 0.
$$

为了得到与浅水方程组的联系, 分离变量, 并令

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x,y,t) \\ V(x,y,t) \\ P(x,y,t) \end{pmatrix} G(z).
$$

利用 (1.35b) 和 (1.35c), 立即可以得到

$$\theta = P(x,y,t)G'(z), \qquad w = -N^{-2}\frac{\partial P}{\partial t}G'.$$

继续将这些代入 (1.35d) 中

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial t}N^{-2}G^{-1}G''. \tag{1.36}$$

注意到方程左边仅是关于 (x,y,t) 的函数, 所以根据分离性条件, 方程右端也必须不依赖于 z; 也就是说, 存在常数 m, 使得

$$G'' = -m^2N^2G, \tag{1.37}$$

而刚盖边界条件满足 $G'|_{z=0,H} = 0$. 重新写出 (1.35a) 与 (1.36),

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t} - f(y)V = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} - f(y)U = -\frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0.\end{gathered} \tag{1.38}$$

对于 $m \neq 0$, (1.38) 中的方程组是线性化的旋转浅水方程组. 因此, 得到了旋转浅水方程组, 其中对应的高度由 $H_m = 1/m^2$ 给出. 例如, 给定常数浮动频率 $N = 1$ 以及在 $z = 0$ 和 $z = H$ 的边界条件, 有

$$G(z) = \cos\left(\frac{\pi k z}{H}\right), \quad k = 1,2,3,\cdots,$$

相应的深度为

$$H_k = \frac{H^2}{\pi^2k^2},$$

所以, 实际的重力波速度 $c = \sqrt{gH_k}$ 与波数的倒数 $|k|^{-1}$ 成正比. 即波数越大, 运动得越慢.

那么 (1.37) 与 (1.38) 在 $G = 1$ 时的特殊模式又是怎么样的呢? 显然, (1.38) 的解根本不包含深度, 事实上, (1.38) 中的方程组具有一个线性化形式的正压方程组, 而这正是之前讨论的 (1.10)~(1.20).

第 2 章　分层流动的若干显著特性

本章将会揭示稳定与不稳定的分层流动的一些显著特点, 其中包括能量原理以及涡量传播原理等. 同时还将考察无散度速度场的局部结构, 并且建立一大类 Boussinesq 方程组的解来体现这种局部分析的思想. 最后, 考虑一些关于这些解以及非线性平面波的特例, 从而能够

(1) 阐明局部结构的一些重要特性;

(2) 为已经观察到的大气和海洋的特征提供一些模型;

(3) 为研究从二维的解到三维的扰动以及从稳定分层流动到涡量的引入这两者的稳定性提供一个舞台.

这里将以讨论分层流体的能量学作为开始.

2.1　能量原理

回顾旋转分层流动的 Boussinesq 方程组:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + f(y)\vec{e}_3 \times \vec{v} = -\nabla p - \frac{g\rho}{\rho_b}\vec{e}_3, \qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)v_3 = 0. \tag{2.1}$$

全密度 $\tilde{\rho}$ 包含了关于静水平衡密度 $\bar{\rho}$ 的扰动 ρ, 而静水密度本身与基线密度常数 ρ_b 仅存在非常微小的偏差,

$$\tilde{\rho}(\vec{x}, t) = \rho_b + \bar{\rho}(x_3) + \rho(\vec{x}, t).$$

接下来作出适用于局部考虑的通常假设: $d\bar{\rho}/dx_3$ 是常数. 寻找标准形式的流体局部动能

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}\rho_b \vec{v}\cdot\vec{v} \tag{2.2}$$

并计算其位变导数

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\rho_b\vec{v}\cdot\vec{v}\right) &= \rho_b\vec{v}\cdot\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho_b\vec{v}\cdot\nabla p - g\rho v_3 - \rho_b f(y)\vec{e}_3\times\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \rho_b \operatorname{div}(-\vec{v}p) - g\rho v_3.\end{aligned} \tag{2.3}$$

这里最后一步利用了 $\vec{v}$ 的不可压缩性. 为了得到能量原理, 需要消去 (2.3) 中不为全散度的项, 注意到 ρv_3 的出现, 可以尝试计算

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{A}{2}\rho^2\right) = A\rho\frac{D\rho}{Dt} = -A\rho\left(\frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\right)v_3.$$