普通高等学校**基础课程类**应用型规划教材

高等数学（上）

北京邮电大学世纪学院数理教研室　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等学校基础课程类应用型规划教材

高等数学（上）

北京邮电大学世纪学院数理教研室　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书是普通高等学校基础课程类应用型规划教材，体现了高等数学课程的特色及应用型高校的教学特点，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制订的新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为依据，按照既要继承优秀传统，又要改革创新、适应新形势的精神，突出高等数学严谨的知识体系，保持经典教材的优点，又考虑到学生的学习状况和接受程度。在力求保持数学体系完整与严谨的基础上，优化内容，论述深入浅出，通俗易懂。

本书共12章，分上、下两册，上册包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程。

本书具有结构严谨、逻辑清晰，重视问题的引入、强调理论的应用，文字流畅、叙述详尽，例题和习题丰富、便于自学等优点，可供普通高等学校和独立学院工科各专业的学生选用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上/北京邮电大学世纪学院数理教研室编著．—北京：北京邮电大学出版社，2009
ISBN 978-7-5635-2018-3

Ⅰ．高… Ⅱ．北… Ⅲ．高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第133676号

书　　名：高等数学(上)
作　　者：北京邮电大学世纪学院数理教研室
责任编辑：陈　瑶
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京忠信诚胶印厂
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：22.5
字　　数：492千字
印　　数：1—3 000册
版　　次：2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2018-3　　定　价：36.00元

目　　录

第 7 章 微分方程

第1章　函　　数

高等数学研究的主要对象是变量，而对变量的研究中着重讨论的是变量之间的相互依赖关系，即函数关系.本章将介绍函数的概念、函数的表示法、函数的一些简单性质及初等函数等，这些内容是学习本课程所要掌握的基础知识.

1.1　实数、区间与绝对值

1.1.1　实数

在高等数学中所涉及的数均为实数.实数分为有理数和无理数两类.

有理数包括了所有的正、负整数，正、负分数和零.有理数总可表为分数$\frac{p}{q}$的形式.反之，能表为分数$\frac{p}{q}$（其中p,q为整数，且$q\neq0$）的数为有理数.有理数也可以用有限小数或无限循环小数表示，如$\frac{4}{5}=0.8$，$\frac{7}{3}=2.333\cdots$，等.有理数经过四则运算（除数为零除外）后仍为有理数.有理数具有稠密性，即任何两个有理数之间必存在着有理数.事实上，若a,b为任意两个有理数，则介于它们中间的数$\frac{a+b}{2}$显然为有理数.

除有理数外，其余实数都为无理数，如$\sqrt{2}$，π等.无理数不能用分数$\frac{p}{q}$（其中p,q为整数，且$q\neq0$）表示，也不能用有限小数或无限循环小数表示，它们只能用无限非循环小数表示，如$\sqrt{2}=1.4143\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$.无理数经过四则运算后可能是无理数也可能为有

理数，如无理数$\sqrt{2}$与无理数 $1-\sqrt{2}$之和便是有理数 1. 无理数也具有稠密性，即任何两个无理数之间必存在着无理数.

实数可以通过数轴上的点形象地表示.

在直线上取定一点 O 作为原点，另外取一点 A 作为 1，这两点之间的距离作为度量单位，并规定从 O 到 A 的方向为正方向. 我们称这样规定了原点、方向和单位的直线为数轴. 有了数轴，便可将实数与数轴上的点建立起一一对应的关系.

我们将某一实数 a 称为其数轴上对应点的坐标. 为了方便，以后也常将实数 a 在数轴上的对应点称为点 a.

全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

1.1.2 区间与邻域

1. 区间

由于以后会经常用到限制在两个实数之间的一切实数构成的集合，为此我们引进区间的概念.

设 a 和 b 为两个实数，称满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数的集合为端点是 a 与 b 的闭区间，记为$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

称满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数的集合为端点是 a 与 b 的开区间. 记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

称满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数的集合为端点是 a 与 b 的半开区间. 分别记为$(a,b]$和$[a,b)$，即

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$

上述区间均称为有限区间，称实数 $b-a$ 为区间的长，a 为区间的左端点，b 为区间的右端点.

在几何上，区间可以用数轴上的线段表示(见图 1.1).

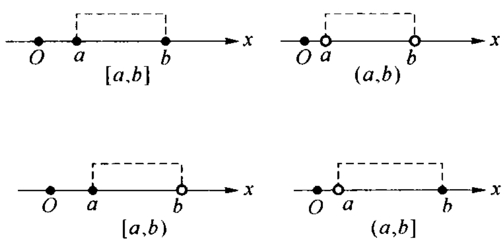

图 1.1

除上述有限区间外，还常用到下列无限区间：

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},\ (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$$

需要注意的是:上面引用的符号$-\infty$,$+\infty$不能作为数看待.

在几何上,无限区间可以在数轴上用长度为无限的直线表示,图 1.2 给出了两个例图.

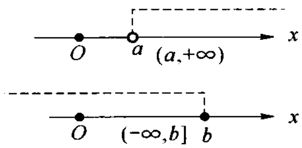

图 1.2

2. 邻域

设 x_0 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,满足不等式

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,\text{即}-\delta<x-x_0<\delta$$

的实数 x 的全体称为点 x_0 的 **δ 邻域**,常记为 $U(x_0,\delta)$,点 x_0 称为此**邻域的中心**,δ 称为此**邻域**的半径.

可见,点 x_0 的 δ 邻域就是以 $x_0-\delta$ 和 $x_0+\delta$ 为端点,或者说是以 x_0 为中心长度为 2δ 的开区间(见图 1.3),即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

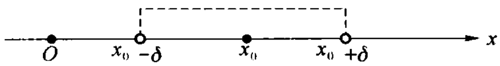

图 1.3

反之,开区间(a,b)也是一个以 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$为中心,以 $\delta=\dfrac{b-a}{2}$为半径的邻域. 例如,$(-1,3)$就是中心 $x_0=\dfrac{-1+3}{2}=1$,半径 $\delta=\dfrac{3-(-1)}{2}=2$ 的邻域.

称邻域 $U(x_0,\delta)$去掉中心 x_0 后的数集为 x_0 的**去心 δ 邻域**. 记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

1.1.3 绝对值

设 a 为一实数,a 的绝对值为一非负实数,记为$|a|$,其定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}\tag{1.1.1}$$

绝对值的几何意义是:$|a|$在数轴上表示点 a 与原点 O 之间的距离.

由上述绝对值的定义可知

$$|a|=\sqrt{a^2}\tag{1.1.2}$$

并有关系式：

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a| \tag{1.1.3}$$

事实上，如果 $a\geqslant 0$，则有 $-|a|\leqslant a=|a|$；如果 $a<0$，则有 $-|a|=a<|a|$，因此对任何实数 a，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$ 总是成立的.

另外，下面的等价关系是常用的：对于 $k\geqslant 0$，

$$|a|\leqslant k \Leftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k \tag{1.1.4}$$

由绝对值的定义不难证明上述等价关系是成立的. 从几何上看，此等价关系也是很显然的：如果 $|a|\leqslant k$，则此不等式表示点 a 与原点之间的距离不超过 k，因此点 a 必落在区间 $[-k,k]$ 上，即有 $-k\leqslant a\leqslant k$；反之，如果 $-k\leqslant a\leqslant k$，则此不等式表示点 a 落在区间 $[-k,k]$ 上，而该区间是以原点为中心，长度为 $2k$ 的对称区间，所以点 a 与原点之间的距离便不会超过 k，即 $|a|\leqslant k$.

利用上面等价关系，邻域 $U(x_0,\delta)$ 可以用绝对值不等式表示，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

事实上，

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-x_0<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

即

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)=U(x_0,\delta)$$

以后会经常用到下列四个绝对值的运算性质.

(1) 和的绝对值不大于绝对值之和，即

$$|a+b|\leqslant |a|+|b| \tag{1.1.5}$$

证：由于

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|$$

两式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$$

故

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|$$

(2) 差的绝对值不小于绝对值之差，即

$$|a-b|\geqslant |a|-|b| \tag{1.1.6}$$

证：因为由(1.1.5)式可知

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$$

所以

$$|a-b|\geqslant |a|-|b|$$

(3) 乘积的绝对值等于绝对值的乘积，即

$$|ab|=|a||b| \tag{1.1.7}$$

(4) 商的绝对值等于绝对值的商，即若 $b\neq 0$，则

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \tag{1.1.8}$$

根据绝对值的定义，式(1.1.7)的成立是显然的. 由式(1.1.7)可直接导出式(1.1.8).

例 1.1.1 解不等式 $(x+1)^2\geqslant 4$.

解：由 $(x+1)^2\geqslant 4$ 得 $\sqrt{(x+1)^2}\geqslant\sqrt{4}$，即有

$$|x+1|\geqslant 2$$

再由绝对值定义可知此不等式等价于

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x+1\geqslant 2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+1<0\\ -(x+1)\geqslant 2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x>-1\\ x\geqslant 1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<-1\\ x\leqslant -3\end{cases}$$

即得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3$. 用区间表示此解的集合便为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

更简单的解法是：由于满足不等式 $|x+1|\geqslant 2$ 的集合是满足不等式 $|x+1|<2$ 集合的余集，而

$$|x+1|<2\Leftrightarrow -2<x+1<2\Leftrightarrow -3<x<1$$

所以

$$\begin{aligned}\{x\mid (x+1)^2\geqslant 4\}&=\{x\mid |x+1|\geqslant 2\}=\overline{\{x\mid |x+1|<2\}}=\overline{\{x\mid -3<x<1\}}\\&=\overline{(-3,1)}=(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)\end{aligned}$$

例 1.1.2 证明不等式 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$，其中 a,b 为任意实数.

证：由于

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

即有

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|$$

同样有

$$|b|-|a|\leqslant|b-a|=|a-b|$$

总之

$$-|a-b|\leqslant|a|-|b|\leqslant|a-b|$$

故由式(1.1.4)便得

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|$$

习题 1.1

1. 指出下列邻域的中心与半径：

(1) $(-7,7)$；　(2) $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$；　(3) $(-4,13)$.

2. 利用绝对值的定义证明：对任意实数 a,b 有

$$|ab|=|a||b|$$

并用数学归纳法证明：对任意 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|$$

3. 证明：若 $ab\geqslant 0$，则有

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}|a+b|$$

4. 解不等式

(1) $|x+3|<5$；　(2) $\left|x-\frac{3}{5}\right|>\frac{2}{3}$；　(3) $1\leqslant|x|\leqslant 3$；　(4) $|x-1|\leqslant|5-x|$.

1.2 函数的概念及其图形

1.2.1 常量与变量

在科学实验、生产实践和社会活动的过程中，常要观察到各种各样的量，如长度、体积、重量、温度、电压、营业额、工资等. 在观察过程中，有一些量的大小不变，保持某一固定的值，这种量称为常量；有一些量的大小在变化，可取不同的值，这种量称为变量. 例如，将一个密闭的容器内的气体加热时，气体的体积保持不变，容器内气体的体积便是一个常量，而气体的压力随温度增加而增大，容器内气体的压力便是一个变量.

在数学中讨论的量，通常是不顾及其实际意义的，而只注意其数值. 常量常用字母 a，b，c，…表示，变量常用字母 x，y，z，…表示.

由于量的每一个值都是一个数，故它可用数轴上一个对应点来表示. 常量在数轴上的对应点为一个固定的点，而变量在数轴上的对应点便是一个动点. 定点是动点的特例，因此常量也可视为变量的特例.

1.2.2 函数概念

在某一个科学实验、生产实践或社会活动的过程中，会同时有几个变量在变化，它们往往互相依赖，相互联系，有规律地变化着. 先看几个仅有两个变量的实例.

例 1.2.1 一个物体在作自由落体的过程中，物体下落的距离 s 与下落的时间 t 有着一定的关联，当开始下落时间记为 $t=0$，由伽利略定律可知时间 t 与距离 s 之间有如下的关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中常数 g 为重力加速度. 如果物体着地时的时刻为 T，则时间 t 在 $[0,T]$ 内每取定一个值，便可以由上面关系式确定距离 s 的一个值.

例 1.2.2 设有一根导线在输送电流的过程中，其电阻值 R 保持不变，导线两端电压 U 与流过的电流强度 I 在变化，U 和 I 的变化遵循着一定规律，由欧姆定律可知这一变化规律为

$$U=RI$$

这一规律表明：变量 I 在其允许的取值范围 $[0,+\infty)$ 内，每取定一个值 I_0，变量 V 就有一个相应的值 $U_0=RI_0$ 与之对应.

例 1.2.3 某城市出租车的计费标准规定：3 公里以内（含 3 公里）收费 10 元，超过 3 公里，按每公里 1.6 元计价. 设 x，y 分别表示乘车的里程和应付的车费，则当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=10$；当 $x>3$ 时，$y=10+1.6(x-3)=1.6x+5.2$，即

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3\\ 1.6x+5.2, & x>3\end{cases}$$

按照上面的关系式，乘车里程 x 在 $(0,+\infty)$ 每给定一个值后，应付的车费 y 就有一个确定的值与其对应. 例如，当里程 $x=35$ 公里时，所应付的车费便为 $y=1.6\times 35+5.2=61.2$ 元；当里程 $x=1.5$ 公里时，所应付的车费便为 $y=10$ 元.

例 1.2.4 在平面直角坐标系中，点 $P(x,y)$ 是中心在坐标原点的单位圆上任意一点，则点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的依赖关系为

$$x^2+y^2=1$$

显然，x 在区间 $[-1,1]$ 上每取定一个值后，y 就有确定的值与之对应，但 y 对应值可能不只一个，如当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 的对应值便有两个，即 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

去掉上述例子中变量的实际意义，提出其共性：一变量有确定的取值范围，并在其取值范围内另一变量有确定的对应规则. 于是得到以下函数的定义.

定义 1.2.1 设 x，y 为两个变量，D 为一个非空实数集合. 如果存在一个对应规则 f，使得变量 x 在 D 内每取定一个值，变量 y 按对应规则 f 有确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**（有时也称 y 为因变量）. 记为

$$y=f(x)$$

称 f 为函数关系（有时也常简称为函数），x 为自变量，D 为**定义域**，对于函数关系为 f，其