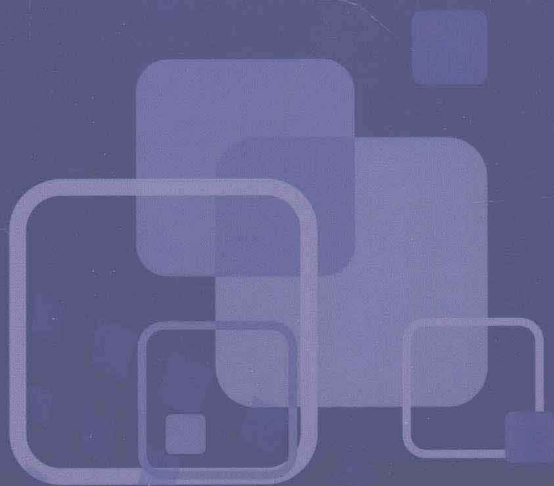




普通高等学校基础课程类应用型规划教材

# 高等数学 (上)

北京邮电大学世纪学院数理教研室 编著



北京邮电大学出版社  
[www.buptpress.com](http://www.buptpress.com)

普通高等学校基础课程类应用型规划教材

# 高等数学 (上)

北京邮电大学世纪学院数理教研室 编著

北京邮电大学出版社  
·北京·

## 内 容 简 介

本书是普通高等学校基础课程类应用型规划教材,体现了高等数学课程的特色及应用型高校的教学特点,以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制订的新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》为依据,按照既要继承优秀传统,又要改革创新、适应新形势的精神,突出高等数学严谨的知识体系,保持经典教材的优点,又考虑到学生的学习状况和接受程度。在力求保持数学体系完整与严谨的基础上,优化内容,论述深入浅出,通俗易懂。

本书共 12 章,分上、下两册,上册包括:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程。

本书具有结构严谨、逻辑清晰,重视问题的引入、强调理论的应用,文字流畅、叙述详尽,例题和习题丰富,便于自学等优点,可供普通高等学校和独立学院工科各专业的学生选用。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/北京邮电大学世纪学院数理教研室编著. —北京:北京邮电大学出版社,2009  
ISBN 978-7-5635-2018-3

I. 高… II. 北… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 133676 号

---

书 名: 高等数学(上)

作 者: 北京邮电大学世纪学院数理教研室

责任编辑: 陈 瑶

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京忠信诚胶印厂

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

印 张: 22.5

字 数: 492 千字

印 数: 1—3 000 册

版 次: 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5635-2018-3

定 价: 36.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

# 目 录

## 第 1 章 函数

1.1 实数、区间与绝对值	1
1.1.1 实数	1
1.1.2 区间与邻域	2
1.1.3 绝对值	3
习题 1.1	6
1.2 函数的概念及其图形	6
1.2.1 常量与变量	6
1.2.2 函数概念	6
1.2.3 函数图形	10
习题 1.2	12
1.3 函数的几种特性	13
1.3.1 有界性	13
1.3.2 单调性	14
1.3.3 奇偶性	15
1.3.4 周期性	16
习题 1.3	17
1.4 反函数与复合函数	17
1.4.1 反函数	17
1.4.2 复合函数	20
习题 1.4	21
1.5 基本初等函数与初等函数	21
1.5.1 基本初等函数	21
1.5.2 初等函数	24
习题 1.5	26

1.6 本章小结	26
1.6.1 内容提要	26
1.6.2 基本要求	28
综合练习题	28

## 第 2 章 极限与连续

2.1 数列极限	31
2.1.1 数列	31
2.1.2 数列极限的概念	32
2.1.3 收敛数列的性质	35
习题 2.1	37
2.2 函数的极限	38
2.2.1 函数极限的概念	38
2.2.2 函数极限的性质	43
习题 2.2	44
2.3 无穷小与无穷大	44
2.3.1 无穷小的概念与性质	44
2.3.2 无穷大	47
习题 2.3	49
2.4 极限的运算法则	49
2.4.1 四则运算法则	49
2.4.2 复合运算法则	53
习题 2.4	55
2.5 极限存在准则与两个重要极限	55
2.5.1 极限存在准则 I	55
2.5.2 重要极限 I	57
2.5.3 极限存在准则 II	59
2.5.4 重要极限 II	60
习题 2.5	63
2.6 无穷小的比较	63
习题 2.6	66
2.7 函数的连续性	66
2.7.1 函数连续性的概念与函数的间断点	66
2.7.2 连续函数的运算性质及初等函数的连续性	72
2.7.3 闭区间上连续函数的性质	74

习题 2.7 .....	76
2.8 本章小结.....	77
2.8.1 内容提要.....	77
2.8.2 基本要求.....	79
综合练习题 .....	80

### 第 3 章 导数与微分

3.1 导数概念.....	84
3.1.1 引出导数概念的两个著名问题.....	84
3.1.2 导数的定义.....	87
3.1.3 导数的几何意义.....	88
3.1.4 函数在一点的左、右导数 .....	89
3.1.5 函数在一点可导性与连续性的关系.....	90
习题 3.1 .....	92
3.2 基本初等函数的求导公式与求导法则.....	93
3.2.1 基本初等函数求导公式之一.....	93
3.2.2 函数的和、差、积、商的求导法则 .....	96
3.2.3 基本初等函数求导公式之二.....	99
3.2.4 反函数的求导法则.....	99
3.2.5 基本初等函数求导公式之三 .....	100
3.2.6 复合函数的求导法则 .....	101
习题 3.2 .....	104
3.3 高阶导数 .....	106
3.3.1 高阶导数的概念 .....	106
3.3.2 常见函数的 $n$ 阶求导公式 .....	107
3.3.3 函数乘积的 $n$ 阶导数的莱布尼兹公式 .....	109
3.3.4 含抽象函数的导数 .....	110
习题 3.3 .....	111
3.4 隐函数及由参数方程表示的函数求导法 .....	112
3.4.1 隐函数求导法则 .....	112
3.4.2 由参数方程所确定的函数的求导法 .....	114
习题 3.4 .....	117
3.5 函数的微分及其应用 .....	118
3.5.1 微分的概念及函数可微与可导的关系 .....	118
3.5.2 微分的运算公式与法则 .....	121

3.5.3 微分的应用 .....	123
习题 3.5 .....	125
3.6 本章小结 .....	127
3.6.1 内容提要 .....	127
3.6.2 基本要求 .....	129
综合练习题 .....	129

## 第 4 章 微分中值定理与导数的应用

4.1 微分中值定理 .....	132
4.1.1 罗尔定理及简单应用 .....	132
4.1.2 拉格朗日中值定理及简单应用 .....	135
4.1.3 柯西中值定理 .....	140
习题 4.1 .....	142
4.2 未定式极限的计算(罗必塔法则) .....	143
4.2.1 两个无穷小量之比的极限( $\frac{0}{0}$ 型) .....	143
4.2.2 两个无穷大量之比的极限( $\frac{\infty}{\infty}$ 型) .....	145
4.2.3 其他类型的未定式 .....	147
习题 4.2 .....	150
4.3 泰勒公式 .....	151
4.3.1 一阶泰勒公式 .....	151
4.3.2 $n$ 阶泰勒公式 .....	152
4.3.3 常见函数的 $n$ 阶麦克劳林公式举例 .....	154
4.3.4 泰勒公式在近似计算中的应用 .....	156
习题 4.3 .....	157
4.4 函数的单调性与极值 .....	158
4.4.1 函数单调性的判定法及其应用 .....	158
4.4.2 函数的极值与最大最小值问题 .....	162
习题 4.4 .....	169
4.5 函数曲线的凹凸性、拐点及函数作图 .....	170
4.5.1 曲线的凹凸性与拐点 .....	170
4.5.2 曲线的渐近线 .....	173
4.5.3 函数曲线的作图 .....	174
习题 4.5 .....	177

4.6 弧微分与曲率 .....	177
4.6.1 弧微分 .....	177
4.6.2 曲率 .....	178
习题 4.6 .....	180
4.7 本章小结 .....	181
4.7.1 内容提要 .....	181
4.7.2 基本要求 .....	183
综合练习题.....	183

## 第 5 章 不定积分

5.1 不定积分的概念和性质 .....	186
5.1.1 原函数和不定积分的概念 .....	186
5.1.2 基本积分表 .....	190
5.1.3 不定积分的性质 .....	192
习题 5.1 .....	194
5.2 换元积分法 .....	195
5.2.1 第一换元法 .....	196
5.2.2 第二换元法 .....	200
习题 5.2 .....	203
5.3 分部积分法 .....	205
习题 5.3 .....	210
5.4 有理函数的积分 .....	211
5.4.1 有理函数的分解 .....	211
5.4.2 部分分式的积分 .....	213
5.4.3 有理函数积分举例 .....	216
5.4.4 可化为有理函数积分的简单无理函数积分举例 .....	219
习题 5.4 .....	221
5.5 本章小结 .....	221
5.5.1 内容提要 .....	221
5.5.2 基本要求 .....	224
综合练习题.....	225

## 第 6 章 定积分

6.1 定积分的概念 .....	227
6.1.1 定积分问题举例 .....	227



6.1.2	定积分的定义 .....	229
6.1.3	定积分的几何意义 .....	231
6.1.4	定积分的性质 .....	232
习题 6.1	.....	235
6.2	微积分基本公式 .....	235
6.2.1	变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系 .....	235
6.2.2	积分上限的函数及其导数 .....	236
6.2.3	牛顿-莱布尼兹公式 .....	238
习题 6.2	.....	240
6.3	定积分的换元法 .....	241
习题 6.3	.....	245
6.4	定积分的分部积分法 .....	246
习题 6.4	.....	247
6.5	广义积分 .....	247
6.5.1	积分区间为无穷区间的广义积分 .....	248
6.5.2	被积函数有无穷间断点的广义积分 .....	250
习题 6.5	.....	252
6.6	定积分应用举例 .....	252
6.6.1	定积分的元素法 .....	252
6.6.2	平面图形的面积 .....	254
6.6.3	旋转体的体积 .....	261
6.6.4	平面曲线的弧长 .....	262
6.6.5	变力沿直线所作的功 .....	265
6.6.6	函数的平均值 .....	266
习题 6.6	.....	268
6.7	本章小结 .....	269
6.7.1	内容提要 .....	269
6.7.2	基本要求 .....	273
综合练习题	.....	273

## 第 7 章 微分方程

7.1	微分方程的基本概念 .....	277
7.1.1	微分方程的定义 .....	278
7.1.2	微分方程的阶 .....	279
7.1.3	微分方程的解 .....	279

习题 7.1 .....	282
7.2 可分离变量的微分方程 .....	282
习题 7.2 .....	286
7.3 齐次微分方程 .....	287
习题 7.3 .....	290
7.4 一阶线性微分方程 .....	290
7.4.1 一阶线性方程 .....	290
7.4.2 伯努力(Bernoulli)方程 .....	293
习题 7.4 .....	294
7.5 可降阶的高阶微分方程 .....	294
7.5.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 .....	295
7.5.2 不含未知函数 $y$ 及导数 $y', y'', \dots, y^{(k)}$ 的 $n(n \geq k)$ 阶微分方程 .....	296
7.5.3 不含自变量的二阶微分方程 .....	299
习题 7.5 .....	300
7.6 线性微分方程解的结构 .....	301
7.6.1 预备知识 .....	301
7.6.2 齐次线性微分方程解的结构 .....	302
7.6.3 非齐次线性微分方程解的结构 .....	303
习题 7.6 .....	305
7.7 常系数齐次线性微分方程 .....	305
习题 7.7 .....	311
7.8 常系数非齐次线性微分方程 .....	311
7.8.1 $f(x) = e^{\lambda x} (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m)$ 型 .....	312
7.8.2 当 $\lambda \neq 0$ 时 .....	313
7.8.3 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型 .....	317
习题 7.8 .....	319
7.9 本章小结 .....	319
7.9.1 内容提要 .....	319
7.9.2 基本要求 .....	322
综合练习题 .....	322

# 第 1 章 函 数



高等数学研究的主要对象是变量,而对变量的研究中着重讨论的是变量之间的相互依赖关系,即函数关系.本章将介绍函数的概念、函数的表示法、函数的一些简单性质及初等函数等,这些内容是学习本课程所要掌握的基础知识.

## 1.1 实数、区间与绝对值

### 1.1.1 实数

在高等数学中所涉及的数均为实数.实数分为有理数和无理数两类.

有理数包括了所有的正、负整数,正、负分数和零.有理数总可表为分数 $\frac{p}{q}$ 的形式.反之,能表为分数 $\frac{p}{q}$ (其中 $p, q$ 为整数,且 $q \neq 0$ )的数为有理数.有理数也可以用有限小数或无限循环小数表示,如 $\frac{4}{5} = 0.8$ ,  $\frac{7}{3} = 2.333\cdots$ ,等.有理数经过四则运算(除数为零除外)后仍为有理数.有理数具有稠密性,即任何两个有理数之间必存在着有理数.事实上,若 $a, b$ 为任意两个有理数,则介于它们中间的数 $\frac{a+b}{2}$ 显然为有理数.

除有理数外,其余实数都为无理数,如 $\sqrt{2}, \pi$ 等.无理数不能用分数 $\frac{p}{q}$ (其中 $p, q$ 为整数,且 $q \neq 0$ )表示,也不能用有限小数或无限循环小数表示,它们只能用无限非循环小数表示,如 $\sqrt{2} = 1.4143\cdots$ ,  $\pi = 3.14159\cdots$ .无理数经过四则运算后可能是无理数也可能为有

理数,如无理数 $\sqrt{2}$ 与无理数 $1-\sqrt{2}$ 之和便是有理数 1. 无理数也具有稠密性,即任何两个无理数之间必存在着无理数.

实数可以通过数轴上的点形象地表示.

在直线上取定一点  $O$  作为原点,另外取一点  $A$  作为 1,这两点之间的距离作为度量单位,并规定从  $O$  到  $A$  的方向为正方向.我们称这样规定了原点、方向和单位的直线为数轴.有了数轴,便可将实数与数轴上的点建立起一一对应的关系.

我们将某一实数  $a$  称为其数轴上对应点的坐标.为了方便,以后也常将实数  $a$  在数轴上的对应点称为点  $a$ .

全体实数的集合记为  $\mathbf{R}$ .

## 1.1.2 区间与邻域

### 1. 区间

由于以后会经常用到限制在两个实数之间的一切实数构成的集合,为此我们引进区间的概念.

设  $a$  和  $b$  为两个实数,称满足不等式  $a \leq x \leq b$  的一切实数的集合为端点是  $a$  与  $b$  的闭区间,记为  $[a, b]$ ,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称满足不等式  $a < x < b$  的一切实数的集合为端点是  $a$  与  $b$  的开区间.记为  $(a, b)$ ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

称满足不等式  $a < x \leq b$  或  $a \leq x < b$  的一切实数的集合为端点是  $a$  与  $b$  的半开区间.分别记为  $(a, b]$  和  $[a, b)$ ,即

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

上述区间均称为有限区间,称实数  $b - a$  为区间的长, $a$  为区间的左端点, $b$  为区间的右端点.

在几何上,区间可以用数轴上的线段表示(见图 1.1).

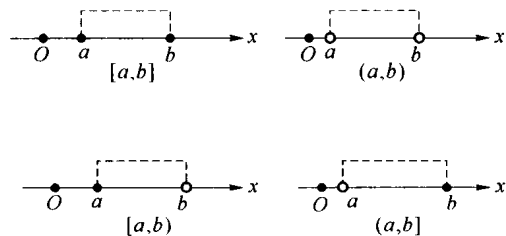


图 1.1

除上述有限区间外,还常用到下列无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, [a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}, (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$$

需要注意的是:上面引用的符号 $-\infty, +\infty$ 不能作为数看待.

在几何上,无限区间可以在数轴上用长度为无限的直线表示,图 1.2 给出了两个例图.

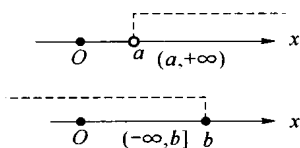


图 1.2

## 2. 邻域

设  $x_0$  与  $\delta$  是两个实数,且  $\delta > 0$ ,满足不等式

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \text{ 即 } -\delta < x - x_0 < \delta$$

的实数  $x$  的全体称为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域,常记为  $U(x_0, \delta)$ ,点  $x_0$  称为此邻域的中心, $\delta$  称为此邻域的半径.

可见,点  $x_0$  的  $\delta$  邻域就是以  $x_0 - \delta$  和  $x_0 + \delta$  为端点,或者说是以  $x_0$  为中心长度为  $2\delta$  的开区间(见图 1.3),即

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

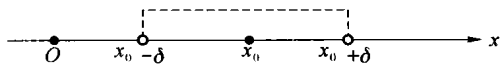


图 1.3

反之,开区间  $(a, b)$  也是一个以  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  为中心,以  $\delta = \frac{b-a}{2}$  为半径的邻域.例如,  $(-1, 3)$  就是中心  $x_0 = \frac{-1+3}{2} = 1$ ,半径  $\delta = \frac{3-(-1)}{2} = 2$  的邻域.

称邻域  $U(x_0, \delta)$  去掉中心  $x_0$  后的数集为  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域.记为  $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ ,即

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

### 1.1.3 绝对值

设  $a$  为一实数, $a$  的绝对值为一非负实数,记为  $|a|$ ,其定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

绝对值的几何意义是:  $|a|$  在数轴上表示点  $a$  与原点  $O$  之间的距离.

由上述绝对值的定义可知

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad (1.1.2)$$

并有关系式:

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (1.1.3)$$

事实上,如果  $a \geq 0$ ,则有  $-|a| \leq a = |a|$ ; 如果  $a < 0$ ,则有  $-|a| = a < |a|$ , 因此对任何实数  $a$ ,  $-|a| \leq a \leq |a|$  总是成立的.

另外,下面的等价关系是常用的:对于  $k \geq 0$ ,

$$|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k \quad (1.1.4)$$

由绝对值的定义不难证明上述等价关系是成立的. 从几何上看,此等价关系也是很显然的:如果  $|a| \leq k$ ,则此不等式表示点  $a$  与原点之间的距离不超过  $k$ ,因此点  $a$  必落在区间  $[-k, k]$  上,即有  $-k \leq a \leq k$ ; 反之,如果  $-k \leq a \leq k$ ,则此不等式表示点  $a$  落在区间  $[-k, k]$  上,而该区间是以原点为中心,长度为  $2k$  的对称区间,所以点  $a$  与原点之间的距离便不会超过  $k$ ,即  $|a| \leq k$ .

利用上面等价关系,邻域  $U(x_0, \delta)$  可以用绝对值不等式表示,即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

事实上,

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

即

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = U(x_0, \delta)$$

以后会经常用到下列四个绝对值的运算性质.

(1) 和的绝对值不大于绝对值之和,即

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (1.1.5)$$

证: 由于

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a| \\ -|b| &\leq b \leq |b| \end{aligned}$$

两式相加得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

故

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

(2) 差的绝对值不小于绝对值之差,即

$$|a - b| \geq |a| - |b| \quad (1.1.6)$$

证: 因为由(1.1.5)式可知

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

所以

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

(3) 乘积的绝对值等于绝对值的乘积,即

$$|ab| = |a| |b| \quad (1.1.7)$$

(4) 商的绝对值等于绝对值的商, 即若  $b \neq 0$ , 则

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (1.1.8)$$

根据绝对值的定义, 式(1.1.7)的成立是显然的. 由式(1.1.7)可直接导出式(1.1.8).

**例 1.1.1** 解不等式  $(x+1)^2 \geq 4$ .

**解:** 由  $(x+1)^2 \geq 4$  得  $\sqrt{(x+1)^2} \geq \sqrt{4}$ , 即有

$$|x+1| \geq 2$$

再由绝对值定义可知此不等式等价于

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1 < 0 \\ -(x+1) \geq 2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x > -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < -1 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

即得  $x \geq 1$  或  $x \leq -3$ . 用区间表示此解的集合便为  $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ .

更简单的解法是: 由于满足不等式  $|x+1| \geq 2$  的集合是满足不等式  $|x+1| < 2$  集合的余集, 而

$$|x+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

所以

$$\begin{aligned} \{x \mid (x+1)^2 \geq 4\} &= \{x \mid |x+1| \geq 2\} = \overline{\{x \mid |x+1| < 2\}} = \overline{\{x \mid -3 < x < 1\}} \\ &= (-3, 1) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

**例 1.1.2** 证明不等式  $||a| - |b|| \leq |a-b|$ , 其中  $a, b$  为任意实数.

**证:** 由于

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$$

即有

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

同样有

$$|b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$$

总之

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$$

故由式(1.1.4)便得

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$



## 习题 1.1

1. 指出下列邻域的中心与半径:

(1)  $(-7, 7)$ ; (2)  $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ ; (3)  $(-4, 13)$ .

2. 利用绝对值的定义证明:对任意实数  $a, b$  有

$$|ab| = |a| |b|$$

并用数学归纳法证明:对任意  $n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| |a_2| \cdots |a_n|$$

3. 证明:若  $ab \geq 0$ , 则有

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2} |a+b|$$

4. 解不等式

(1)  $|x+3| < 5$ ; (2)  $\left|x - \frac{3}{5}\right| > \frac{2}{3}$ ; (3)  $1 \leq |x| \leq 3$ ; (4)  $|x-1| \leq |5-x|$ .

## 1.2 函数的概念及其图形

### 1.2.1 常量与变量

在科学实验、生产实践和社会活动的过程中,常要观察到各种各样的量,如长度、体积、重量、温度、电压、营业额、工资等.在观察过程中,有一些量的大小不变,保持某一固定的值,这种量称为常量;有一些量的大小在变化,可取不同的值,这种量称为变量.例如,将一个密闭的容器内的气体加热时,气体的体积保持不变,容器内气体的体积便是一个常量,而气体的压力随温度增加而增大,容器内气体的压力便是一个变量.

在数学中讨论的量,通常是不顾及其实际意义的,而只注意其数值.常量常用字母  $a, b, c, \dots$  表示,变量常用字母  $x, y, z, \dots$  表示.

由于量的每一个值都是一个数,故它可用数轴上一个对应点来表示.常量在数轴上的对应点为一个固定的点,而变量在数轴上的对应点便是一个动点.定点是动点的特例,因此常量也可视为变量的特例.

### 1.2.2 函数概念

在某一个科学实验、生产实践或社会活动的过程中,会同时有几个变量在变化,它们往往互相依赖,相互联系,有规律地变化着.先看几个仅有两个变量的实例.



**例 1.2.1** 一个物体在作自由落体的过程中,物体下落的距离  $s$  与下落的时间  $t$  有着一定的关联,当开始下落时间记为  $t=0$ ,由伽利略定律可知时间  $t$  与距离  $s$  之间有如下的关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中常数  $g$  为重力加速度. 如果物体着地时的时刻为  $T$ ,则时间  $t$  在  $[0, T]$  内每取定一个值,便可以由上面关系式确定距离  $s$  的一个值.

**例 1.2.2** 设有一根导线在输送电流的过程中,其电阻值  $R$  保持不变,导线两端电压  $U$  与流过的电流强度  $I$  在变化, $U$  和  $I$  的变化遵循着一定规律,由欧姆定律可知这一变化规律为

$$U = RI$$

这一规律表明:变量  $I$  在其允许的取值范围  $[0, +\infty)$  内,每取定一个值  $I_0$ ,变量  $V$  就有一个相应的值  $U_0 = RI_0$  与之对应.

**例 1.2.3** 某城市出租车的计费标准规定:3 公里以内(含 3 公里)收费 10 元,超过 3 公里,按每公里 1.6 元计价. 设  $x, y$  分别表示乘车的里程和应付的车费,则当  $0 < x \leq 3$  时,  $y = 10$ ; 当  $x > 3$  时,  $y = 10 + 1.6(x - 3) = 1.6x + 5.2$ , 即

$$y = \begin{cases} 10, & 0 < x \leq 3 \\ 1.6x + 5.2, & x > 3 \end{cases}$$

按照上面的关系式,乘车里程  $x$  在  $(0, +\infty)$  每给定一个值后,应付的车费  $y$  就有一个确定的值与其对应. 例如,当里程  $x = 35$  公里时,所应付的车费便为  $y = 1.6 \times 35 + 5.2 = 61.2$  元;当里程  $x = 1.5$  公里时,所应付的车费便为  $y = 10$  元.

**例 1.2.4** 在平面直角坐标系中,点  $P(x, y)$  是中心在坐标原点的单位圆上任意一点,则点的横坐标  $x$  与纵坐标  $y$  之间的依赖关系为

$$x^2 + y^2 = 1$$

显然,  $x$  在区间  $[-1, 1]$  上每取定一个值后,  $y$  就有确定的值与之对应,但  $y$  对应值可能不只一个,如当  $x = \frac{1}{2}$  时,  $y$  的对应值便有两个,即  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

去掉上述例子中变量的实际意义,提出其共性:一变量有确定的取值范围,并在其取值范围内另一变量有确定的对应规则. 于是得到以下函数的定义.

**定义 1.2.1** 设  $x, y$  为两个变量,  $D$  为一个非空实数集合. 如果存在一个对应规则  $f$ , 使得变量  $x$  在  $D$  内每取定一个值, 变量  $y$  按对应规则  $f$  有确定的值与之对应, 则称变量  $y$  为变量  $x$  的**函数**(有时也称  $y$  为因变量). 记为

$$y = f(x)$$

称  $f$  为函数关系(有时也常简称为函数),  $x$  为自变量,  $D$  为定义域, 对于函数关系为  $f$ , 其