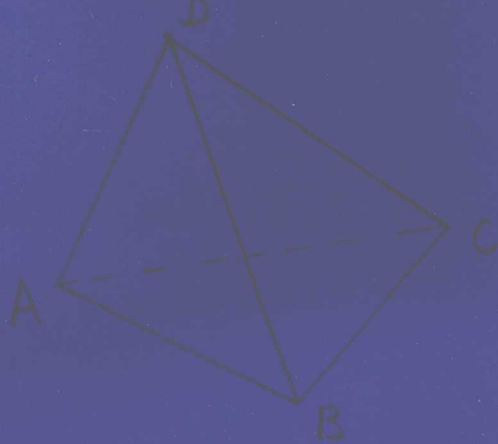
十一五 中等职业教育“十一五”规划教材

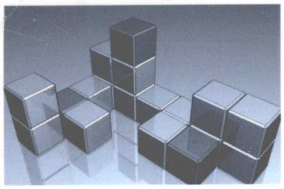
公共基础课教材系列

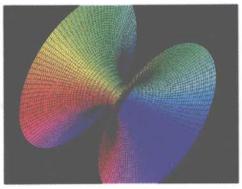
主 编 徐彤彤

数学

SHU XUE







科学出版社
www.sciencep.com

中等职业教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

数学

徐彤彤　主编
周先芳　主审

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为适应技师学院和中等职业学校基础课教学改革的需要而编写的公共课教材. 全书共分 5 章，主要内容包括：函数、三角函数、复数、立体几何、平面解析几何，并附有初等数学中的常用公式和部分常用符号等内容. 内容编排注重基本理论和基本方法的阐述，力求简明扼要、图文并茂、通俗易懂，具有较强的可读性，便于学生自学. 此外，每章还配有小结与复习题，可以帮助学生掌握本章的内容.

本书可作为技师学院和中等职业学校数控技术应用、机电一体化、模具设计与制造、电气控制等机电类专业的教材，也可作为自学者和有关的工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学/徐彤彤 主编. —北京：科学出版社，2009
(中等职业教育"十一五"规划教材·公共基础课教材系列)
ISBN 978-7-03-025331-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 数学课-专业学校-教材 Ⅳ. G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 148253 号

责任编辑：沈力匀 周 恢/责任校对：赵 燕
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2009 年 9 月第一次印刷 印张：9 1/2
印数：1—4 000 字数：222 300

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235(SP04)

前　言

本书是根据中等职业技术学校数学课程教学计划和教学大纲的要求，在充分考虑目前学生生源多样化、多层化、学生文化基础参差不齐的现状的基础上，努力贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的编写原则，对数学教学进行了改革，并组织编写了本书.

本书的指导思想是：以培养具有良好职业生涯发展基础的高技能人才为总目标，力求教材内容易学、实用，努力体现数学为专业课服务，为生产实践服务，为提高学生综合素质服务，为学生今后进一步发展搭建更宽厚的平台.

全书共5章. 主要包括：函数、三角函数、复数、立体几何、平面解析几何等.

本书由襄樊技师学院徐彤彤主编，襄樊技师学院周先芳主审参加编写的还有：襄樊技师学院胡荣娥、张艳丽、李永寿.

由于编者水平有限，且时间仓促，书中难免存在错误和疏漏，请专家、同行、读者批评指正.

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　函　　数

能力目标

理解函数的定义，掌握决定函数关系的两要素（函数的定义域和关系式）.

案例导入

某铁路上有 A、B 两城相聚 100km，已知铁路货运运费是 a（单位：元/t・km），试列出运费与运输距离之间的关系式.

解：设铁路运输的距离为 $x$km，运费为 y 元，则运费 y 与运输距离 x 之间的对应关系由式 $y=ax$ 给出，假定最长运输距离为 100km，那么当运输距离 x 在 $0\leqslant x\leqslant 100$ 的取值范围内任意取定一个数值时，按上式 y 就有一个确定的数值与它相对应，与其对应的 y 的取值范围是 $0\leqslant y\leqslant 100a$.

在关系式 $y=ax$ 中，有两个变量 x 和 y，且 x 和 y 之间都有确定的对应关系，这种对应关系正是函数的概念的实质.

1.1.1　区间的概念

在案例中，我们指出了变量取值范围，为了更简单地表达这样的取值范围，我们常用区间表示，下面介绍区间的概念.

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，

(1)满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数称为**闭区间**，记作$[a,b]$.

(2)满足 $a<x<b$ 的所有实数称为**开区间**，记作(a,b).

(3)满足 $a\leqslant x<b$ 的所有实数称为**左闭右开区间**，记作 $[a,b)$.

(4)满足 $a<x\leqslant b$ 的所有实数称为**左开右闭区间**，记作$(a,b]$.

由于实数与数轴上的点是一一对应的，所以，上述 4 种区间分别可以用数轴上以 a、b 为端点的一段线段来表示，a、b 称为**区间的端点**，2 个端点间的距离称为**区间的长**. 包含在区间内的端点用实心点表示，不包含在区间内的端点用空心点表示，它们在数轴上的表示方法如图 1.1 所示.

分别满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的所有实数构成的区间，分别记作$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$. 其数轴表示如图 1.2 所示.

符号$+\infty$和$-\infty$分别读作正无穷大和负无穷大，它们并不是表示某个确定的数，而是

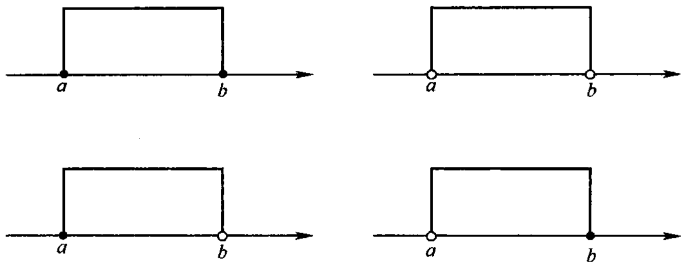


图 1.1

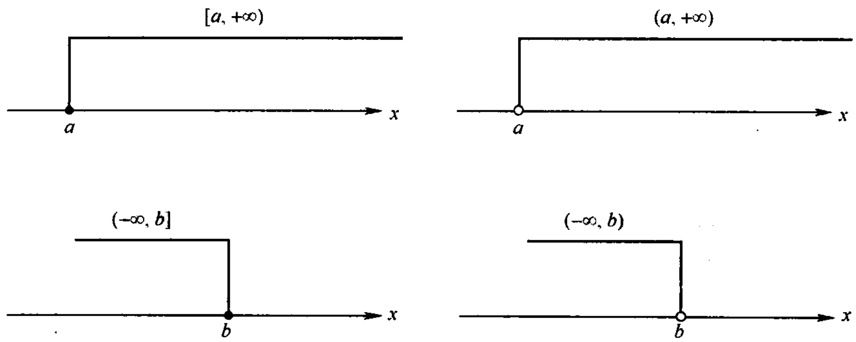


图 1.2

刻画了实数的正、负两个方向上的变化趋势.

所有的实数也可用区间$(-\infty,+\infty)$表示.

若实数 x 在闭区间$[a,b]$内,记作 $x\in[a,b]$,符号“$\in$”读作“属于”.

例如,$0\in[-1,1]$,对于其他区间,这种表示方法仍然适用.

1.1.2　函数的概念

对于某个范围内的任意实数 x,按照某种关系式,都有唯一确定的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**.其中 x 称为**自变量**,自变量的取值范围称为**定义域**,与 x 对应的 y 的值称为**函数值**,函数值的全体称为函数的**值域**.

一般地,y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x).$$

当自变量 x 在定义域内取值 a 时,对应的函数值记作

$$y=f(a).$$

如果同时研究多个函数,则用不同符号表示它们,如 $f(x)$、$g(x)$、$F(x)$、$\phi(x)$等.

从函数的定义可以看出,函数是由**函数关系式**、**定义域**、**值域** 3 部分组成,并且函数的值域由函数的关系式和定义域完全确定.

例 1.1　设 $f(x)=x^2+2x-3$,求 $f(-2)$、$f(a)$、$f\left(\frac{1}{a}\right)$.

解:$f(-2)=(-2)^2+2\times(-2)-3=-3.$

$f(a)=a^2+2a-3.$

$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{a}\right)-3=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-3.$

例 1.2　求函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 的定义域.

分析:由本节案例知道,在实际问题中,函数的定义域要根据实际意义去确定;对于函数关系式表示的函数,如果不加说明,则函数的定义域就是使得函数关系式有意义的所有实数.

解:要使已知函数有意义,须使 $2x-1>0$,即 $x>\frac{1}{2}$.

所以,这个函数的定义域为 $x>\frac{1}{2}$ 的所有实数,用区间表示为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

例 1.3　求函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{2-x}$ 的定义域.

解:要使已知函数有意义,须使自变量 x 同时满足 $x+1\geqslant 0$ 和 $2-x\neq 0$. 解这个不等式组

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\2-x\neq 0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}x\geqslant -1\\x\neq 2\end{cases}.$$

所以,所求函数的定义域用区间表示为 $[-1,2)\cup(2,+\infty)$.

例 1.4　在国内投寄外埠平信,每封信不超过 20g 付邮资 80 分,超过 20g 而不超过 40g 付邮资 160 分,超过 40g 而不超过 60g 付邮资 240 分,限定每封平信不超过 60g,则每封重 xg 的平信应付的邮资 y 分为

$$y=\begin{cases}80, & x\in(0,20]\\160, & x\in(20,40]\\240, & x\in(40,60]\end{cases}.$$

做出这个函数的图像.

解:这个函数的图像是由 3 段都平行于 x 轴的线段组成的,如图 1.3 所示.

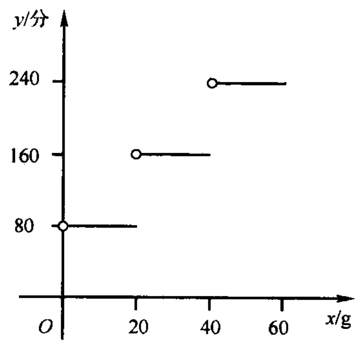


图 1.3

这个函数的定义域是 $(0,60]$,在函数定义域内,对于自变量 x 的不同取值范围,函数的关系式也不同. 这样的函数称为**分段函数**,分段函数是一个函数而不是几个函数.

习题 1.1

1. 已知函数 $f(x)=2x^2+3x-1$，求 $f(2)$、$f(-1)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(a)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{2x}{5x+1}$；　(2) $y=\sqrt{1-x}-\sqrt{3x-2}$；

(3) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$；　(4) $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ 2x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(3)$，并做出函数的图像.

4. 把一直径为 40cm 的圆木截成横截面为长方形的方木，设长方形横截面的一条边长为 x(cm)，长方形横截面的面积为 y(cm^2)，写出 y 与 x 之间的函数关系式(x 为自变量)，并求出函数的定义域.

1.2　指数函数

能力目标

会进行指数运算，会作指数函数图像，能利用指数函数的性质解决有关问题.

案例导入

某种细胞分裂时，由一个分裂为 2 个，2 个分裂为 4 个……显然，一个这样的细胞分裂 x 次后，得到细胞的个数 y，与 x 的函数关系式为 $y=2^x$.

在函数 $y=2^x$ 中，自变量 x 是指数，底数 2 是一个大于 0 且不等于 1 的常数，这个函数就是一个指数函数，本节将研究指数函数的图像，并利用指数函数的性质解决有关的实际问题.

1.2.1　指数

1. 根式

在初中已经学习了平方根和立方根的概念.

若 $x^2=a$，则称 x 是 a 的平方根(或二次方根)；

若 $x^3=a$，则称 x 是 a 的立方根(或三次方根).

定义 1.1　设 n 是大于 1 的整数，如果 $x^n=a$，则称 x 是 a 的 **n 次方根.**

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数，此时 a 的 n 次方根都可以用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，例如，$\sqrt[3]{27}=3$；$\sqrt[3]{-8}=-2$；$\sqrt[3]{a^6}=a^2$.

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有 2 个，这两个数互为相反数. 正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示. 它们可以合并写成 $\pm\sqrt[n]{a}\ (a>0)$，例如，$\sqrt[4]{16}=2$；$-\sqrt[4]{16}=2$.

16 的 4 次方根有两个，可以写成 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$.

注意：负数没有偶次方根，0 的 n 次方根是 0.

定义 1.2　形如 $\sqrt[n]{a}$ 的式子称为**根式**，n 称为**根指数**，a 称为**被开方数**.

根式具有以下性质：

(1) n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$.

(2) n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$.

(3) $(\sqrt[n]{a})^n=a$（n 是大于 1 的整数).

例如，

$\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$；$\sqrt{(-9)^2}=9$；$(\sqrt[4]{5})^4=5$；$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$.

2. 分数指数幂

考察下列根数运算过程：

$\sqrt[4]{2^8}=\sqrt[4]{(2^2)^4}=2^2=2^{\frac{8}{4}}$；

$\sqrt[3]{5^9}=\sqrt[3]{(5^3)^3}=5^3=5^{\frac{9}{3}}$.

从以上两式中容易看出，如果把根式写成指数形式会使运算简便，为此，我们规定：

(1) 正分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　$(a>0$，m、n 是正整数，且 $n>1)$.

(2) 负分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　$(a>0$，m、n 是正整数，且 $n>1)$.

(3) 0 的正分数指数幂等于 0；0 的负分数指数幂无意义.

至此，我们把整数指数幂推广到了有理指数幂，并且整数指数幂的运算性质对于有理指数幂仍然成立. 例如设 a、$b>0$，α、β 都是有理数，则

(1) $a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

(2) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

(3) $(a\cdot b)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha$.

上述运算性质还可以推广到实数指数幂的运算中.

例 1.5　计算下列各式（式中字母均为正数）.

(1) $3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}$.　　　　(2) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^3$.

解：(1) $3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}=3\times 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=3^2=9$.

(2) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^3=(a^{\frac{2}{3}})^3\cdot(b^{\frac{1}{4}})^3=a^2b^{\frac{3}{4}}$.

注意：任意指数幂的值可以使用计算器求得.

1.2.2　指数函数

定义 1.3　形如 $y=a^x$　$(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的函数称为指数函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

下面研究指数函数的图像与性质.

在同一个坐标系内画出函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像.

列出 x、y 的对应值表(表 1.1)：

表 1.1

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…

用描述点法画出 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像(图 1.4).

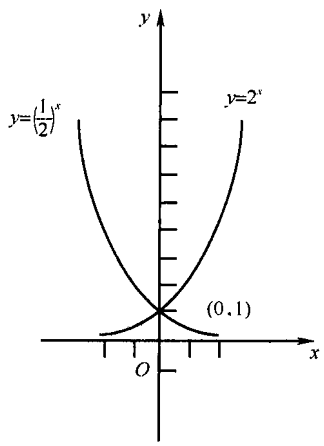


图 1.4

一般地，$0<a<1$ 时，$y=a^x$ 的图像如图 1.5(a)所示；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 的图像如图 1.5(b)所示.

由图 1.5 可以看出，指数函数 $y=a^x$ 具有以下主要性质：

(1)值域是$(0,+\infty)$.

(2)图像都经过点$(0,1)$.

(3)$a>1$ 时，在$(-\infty,+\infty)$内 y 随 x 的增大而增大；$0<a<1$ 时，在$(-\infty,+\infty)$内 y 随 x 的增大而减小.

对于函数的这种增减性质给出以下定义.

在函数 $y=f(x)$ 的定义域内的某个区间(a,b)内任取 x_1、$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时：

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间(a,b)内是**增函数**，区间(a,b)称为函数 $f(x)$ 的**增区间**.

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间(a,b)内是**减函数**，区间(a,b)称为函数 $f(x)$ 的**减区间**.

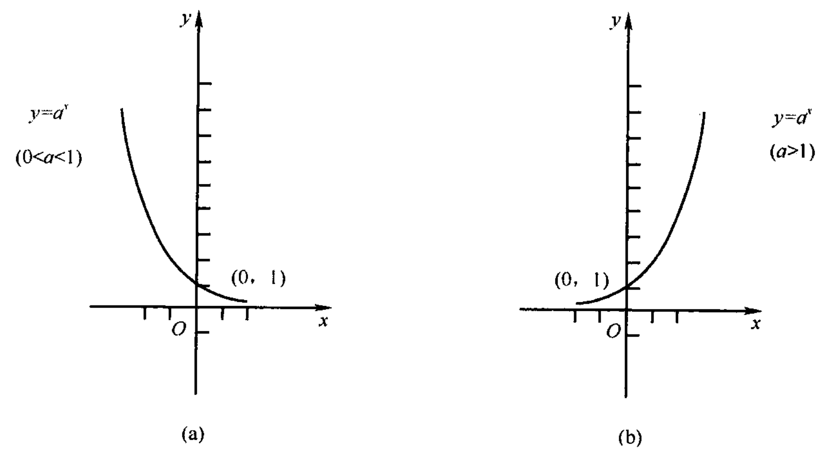


图 1.5

增函数的图像沿 x 轴的正向是上升的，如图 1.6(a)所示；减函数的图像沿 x 轴的正向是下降的，如图 1.6(b)所示：

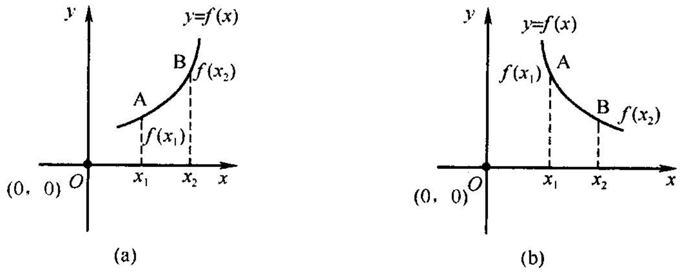


图 1.6

例 1.6 比较下列各项中两个值的大小.

(1)$5^{\frac{1}{2}}$与$5^{\frac{1}{3}}$. (2)$0.18^{-0.2}$与$0.18^{-0.3}$.

解:(1)考察函数 $y=5^x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是增函数，因为$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，所以 $5^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{3}}$.

(2)考察函数 $y=0.18^x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是减函数，因为$-0.2>-0.3$，所以 $0.18^{-0.2}<0.18^{-0.3}$.

例 1.7 设储蓄本金 $a=1000$ 元，每期利率 $r=8\%$. 已知本利和 y 随存期 x 变化的函数关系式为 $y=a(1+r)^x$，求五期后的本利和.

解:将 $a=1000$，$r=8\%$，$x=5$ 带入已知式，得

$$y=1000(1+8\%)^5=1000\times1.08^5.$$

使用计算器，得 $y\approx1469.32$ 元.

所以五期后的本利和约为 1469.32 元.

习题 1.2

1. 计算(式中字母均为正数).

(1)$8^{\frac{2}{3}}$； (2)$100^{-\frac{1}{2}}$； (3)$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$； (4)$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}$；

(5)$(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8$； (6)$\sqrt{49x^2y^2}$； (7)$\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[4]{x^3y}$； (8)$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

2. 在同一直角坐标系中，画出 $y=3^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像，并指出其主要性质.

3. 比较下列各题中两个值的大小.

(1)$3^{0.8}$与$3^{0.7}$； (2)$\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}$与$\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

4. 某产品原来的年产量是 2 万 t，计划从今年开始年产量平均每年增加 15%，写出年产量 y(单位：万 t)随经过的年数 x 变化的函数关系式，并求出 6 年后该产品的年产量是多少(精确到 0.001)?

1.3 对数函数

能力目标

会进行对数运算，会做对数函数图像，能利用对数函数的性质解决有关实际问题.

案例导入

已知2008年我国的国内生产总值为a亿元，如果平均每年增长8%，问经过多少年，国内生产总值能翻一番(即是2008年的2倍)?

设经过x年，国内生产总值能翻一番，根据题意得

$$a(1+8\%)^x=2a,$$

即

$$1.08^x=2.$$

这是已知底数和幂的值，求指数的问题，也就是本章首先将要学习的对数问题.

1.3.1 对数

1. 对数的概念

定义1.4 如果$a^b=N(a>0$，且$a\neq1)$则称b是以a为底数的**对数**，记作

$$\log_a N=b\ (a>0,\text{且}\ a\neq1),$$

其中，a称为**底数**，N称为**真数**.

例如，

因为$4^2=16$，所以2是以4为底数的对数，记作$\log_4 16=2$.

因为$2^3=8$，所以3是2为底8的对数，记作$\log_2 8=3$.

因为$2^0=1$，所以0是以2为底1的对数，记作$\log_2 1=0$.

由对数的定义可知，对数具有下述基本性质：

(1)1的对数等于0，即$\log_a 1=0$.

(2)底的对数等于1，即$\log_a a=1$.

(3)零和负数没有对数.

通常把以10为底的对数称为常用对数，为了简便，正数N的常用对数$\log_{10}N$记作$\lg N$，如$\log_{10}2$记作$\lg 2$，$\log_{10}\frac{1}{2}$记作$\lg\frac{1}{2}$.

在工程技术中常用到以无理数$e=2.71828\cdots$为底的对数，以e为底的对数称为自然对数，正数N的自然对数$\log_e N$记作$\ln N$，如$\log_e 2$记作$\ln 2$.

求任意正数N的常用对数或自然对数时，可以查《常用对数表》或《自然对数表》，也可以使用计算器求得.

2. 对数的运算性质

根据对数的定义及指数的运算性质,可推得对数的运算性质:

若 $a>0$ 且 $a\neq1$,$M>0$,$N>0$,则

(1)$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$.

(2)$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$.

(3)$\log_aM^x=x\log_aM$ (x 是实数).

(4)运算性质 $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$ 可以推广到若干个正数之积的情形,例如,

$$\log_a(N_1\ N_2\ \cdots\ N_R)=\log_aN_1+\log_aN_2+\cdots+\log_aN_R.$$

例 1.8 计算:(1) $\lg\sqrt[3]{1000}$. (2)$\log_2(4^5\times2^3)$. (3)$\lg4+\lg25$.

解:(1)$\lg\sqrt[3]{1000}=\dfrac{1}{3}\lg1000=\dfrac{1}{3}\lg10^3=\dfrac{1}{3}\times3\lg10=1$.

(2)$\log_2(4^5\times2^3)=\log_24^5+\log_22^3=5\times\log_24+3\times\log_22=5\times2+3\times1=13$.

(3)$\lg4+\lg25=\lg(4\times25)=\lg100=\lg10^2=2\times\lg10=2\times1=2$.

3. 换底公式

在实际计算中,若遇到不以 10 或 e 为底的对数,我们通常是将其转换成常用对数或自然对数来解决,为此,我们给出下面的对数**换底公式**:

设 a、$b>0$,且 $a\neq1$,$b\neq1$,$N>0$,则有

$$\log_aN=\frac{\log_bN}{\log_ba}.$$

例 1.9 求下列各式的值.

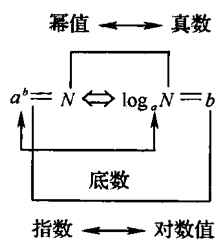
(1)$\log_35$. (2)$\log_89\cdot\log_{27}32$.

解:(1)$\log_35=\dfrac{\lg5}{\lg3}$.

使用计算器,得 $\log_35\approx\dfrac{0.6990}{0.4771}\approx1.4651$.

(2)$\log_89\cdot\log_{27}32=\dfrac{\lg9}{\lg8}\times\dfrac{\lg32}{\lg27}=\dfrac{2\lg3}{3\lg2}\times\dfrac{5\lg2}{3\lg3}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{9}$.

4. 指数式与对数式的互化



例 1.10 已知 $\log_{54}27=a$，$54^b=3$，用 a，b 表示 $\log_{108}81$ 的值.

解：由 $54^b=3$ 得 $\log_{54}3=b$.

所以

$$\log_{108}81=\frac{\log_{54}81}{\log_{54}108}=\frac{\log_{54}27+\log_{54}3}{\log_{54}2+1}=\frac{a+b}{2-\log_{54}27}=\frac{a+b}{2-a}.$$

1.3.2 对数函数

现在我们将案例导入中的国内生产总值增加的倍数用 x 表示，经过的年数用 y 表示，则有 $x=1.08^y$，根据对数的定义，把它写成对数式就得到了以国内生产总值增加的倍数 x 为自变量的函数 $y=\log_{1.08}x$. 这个函数的自变量 x 是对数的真数，底数是一个常量，这是一个对数函数.

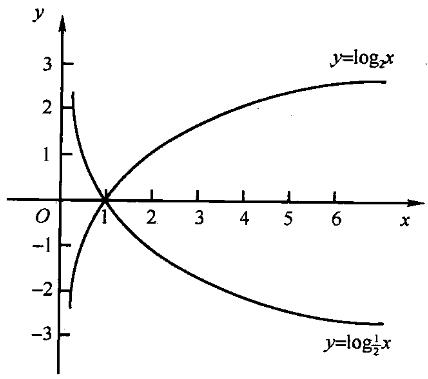


图 1.7

一般地，形如 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$) 的函数称为对数函数，根据对数函数的性质，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

下面研究对数函数的图像与性质.

在同一坐标系内做出函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像.

列出 x、y 的对应值表(表 1.2)：

用描点法画出图像(图 1.7).

表 1.2

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=\log_2 x$	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$	…	2	1	0	-1	-2	…

一般地，$a>0$ 时，$y=\log_a x$ 的图像如图 1.8(a)所示；$0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 的图像如图 1.8(b)所示.

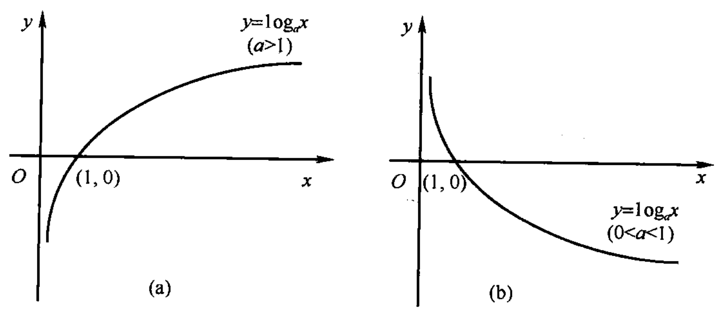


图 1.8

由图 1.8 可以看出，对数函数 $y=\log_a x$ 具有以下主要性质：

(1)值域是$(-\infty,+\infty)$.

(2)图像都经过$(1,0)$.

(3)$a>1$ 时，在$(0,+\infty)$ 内是增函数；$0<a<1$ 时在$(0,+\infty)$内是减函数.

例 1.11　比较下列各题中两个值的大小.

(1)$\log_5 6$ 与 $\log_5 6.1$.　　(2)$\log_{\frac{1}{2}} 3.14$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}\pi$.

解：(1)考察函数 $\log_5 x$，它在$(0,+\infty)$内是增函数.

因为　$6<6.1$，

所以　$\log_5 6<\log_5 6.1$.

(2)考察函数 $\log_{\frac{1}{2}} x$，它在$(0,+\infty)$内是减函数.

因为　$3.14<\pi$，

所以　$\log_{\frac{1}{2}} 3.14>\log_{\frac{1}{2}}\pi$.

例 1.12　2004 年底我国人口总数是 13 亿. 如果人口的自然年增长率控制在 0.9%，问到哪一年我国人口总数可达 14 亿.

解：设经过 x 年我国人口总数达到 14 亿，根据题意得

$$13\times(1+0.009)^x=14.$$

即

$$(1+0.009)^x=\frac{14}{13}.$$

两边取常用对数，得

$$x\lg 1.009=\lg 14-\lg 13.$$

使用计算器，得

$$x=\frac{\lg 14-\lg 13}{\lg 1.009}\approx 8.3.$$

所以，经过约 9 年的时间，即 2013 年我国人口总数将达到 14 亿.

例 1.13　已知给一个电容器充电时，电压 u_c(V)随时间 t(s)的变化规律为

$$u_c=10\times(1-e^{-\frac{t}{0.02}}),$$

问经过多少时间，电容器的电压能达到 8V?

解：设经过时间 t，电容器电压能达到 8V. 由题意得

$$8=10\times(1-e^{-\frac{t}{0.02}}).$$

化简整理，得

$$e^{-50t}=\frac{1}{5}.$$

两边取自然对数，得

$$\ln e^{-50t}=\ln\frac{1}{5}.$$

所以

$$-50t\ln e=\ln 1-\ln 5.$$