随书附光盘一张

普通高等院校“十一五”规划教材

张量分析

ZHANGLIANG FENXI

刘新东 郝际平 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十一五”规划教材

张量分析

刘新东　郝际平　编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书以线性仿射空间和多重线性代数为基础，从代数结构、拓扑结构、微分结构三个角度系统完整地阐述了张量分析。全书共分为5章：线性空间；矢量代数和矢量分析；张量代数；张量函数和张量分析；曲线坐标。每章附有一定数量的例题和练习题。

本书可作为力学专业本科生、研究生教材；数学类专业本科生、研究生参考书；高等学校教师及相关工程技术人员参考书。

图书在版编目(CIP)数据

张量分析/刘新东，郝际平编著. —北京：国防工业出版社，2009.9

普通高等院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-118-06425-4

Ⅰ.张... Ⅱ.①刘...②郝... Ⅲ.张量分析—高等学校—教材 Ⅳ.O183.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第104879号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 11¾ **字数** 350千字

2009年9月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 30.00元(含光盘)

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

张量作为描述客观存在物理现象以及几何学的对象，在对物理规律和几何定理表述与推演上更本质地反映了在任何坐标系下具有不变形式的固有属性。在物理、力学和几何学等学科中有着广泛的应用。鉴于张量分析越来越成为许多领域的基本数学工具，本教材试图为相关工科专业本科生、硕士生及工程技术人员提供既通俗又具有一定理论深度的张量分析基本内容。

本教材共分 5 章。第 1 章线性空间：从实数的基本公理体系引入仿射空间点集，给出仿射空间矢量的平行性、基底、坐标等基本概念。同时，通过内积空间、距离空间基本性质引入 Euclid 空间 R^n。最后从多重线性映射角度，通过张映射给出了最一般意义上的张量定义。第 2 章矢量代数和矢量分析：在 Euclid 空间 R^n 中，除了对标准正交坐标系中矢量的代数运算进行了系统分析，重点侧重于仿射(斜角)坐标系中的矢量代数基本运算，并给出了较为完备的基础分析。同时给出了矢量函数和矢量函数分析的基本概念和基本运算规则。最后对数量场、矢量场的场论进行了基本分析。第 3 章张量代数：给出一般 r 阶张量的各种代数运算规则，重点分析了仿射(二阶)张量的各种代数运算(对称、反对称、正交二阶张量)特征值问题。最后对各向同性张量做了简单介绍，并给出了相关结论。第 4 章张量函数和张量分析：比较系统的讨论了二阶张量自变量标量值和二阶张量自变量二阶张量值各向同性函数性质及表示。对张量函数的导数和微分进行了详细的理论分析，给出了张量函数导数和微分基本运算法则。重点对 Euclid 空间 R^n 中的张量场绝对微分和不变形微分算子进行分析。第 5 章曲线坐标：通过典型的极坐标系、柱坐标系和球坐标系简单介绍了曲线坐标局部对偶基、基本度量、物量分量、正交曲线坐标系、协变(逆变)基底矢量导数、曲线坐标系张量场分析等曲线坐标系的基本概念，并给出了极坐标系、柱坐标系和球坐标系相关曲线坐标系的一些基本结果。每章后附有一定数量的习题。

本教材在编写过程中得到了西安建筑科技大学教务处及力学教研室的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，教材中不妥之处恳请读者批评指正。

编　者
2009 年 6 月于西安

目　录

第1章 线性空间

对于一个集合，一旦组成的元素被确定，集就完全确定了。虽然由确定的组成元素可以确定一个集，但集中元素与元素间并未确定任何关系。由于研究问题的实际需要，不仅需要确定由组成元素所构成的集合，同时需要在各种集合中引入元素与元素之间的某种特定关系。对于给定的集合，若在集中的元素之间引入了某种确定关系，则认为这种元素间的确定关系赋予集以确定的空间结构。具有确定的元素间关系的集称为空间，同一集合不同的元素间关系确定不同的空间。

在实数理论中，实数集合中的元素间通过加法法则和乘法法则确定了两种不同的关系。若记实数集合为 F，F 中的元素记为 a、b、c、…，则加法法则 $+$ 将 F 中的任意两个元素 $a\in F$，$b\in F$ 对应为 $c\in F$，且记为：

$$+:(a,b)\mapsto c$$

$$a+b=c$$

同样乘法法则×将 F 中的任意两个元素 $a\in F$，$b\in F$ 与 F 中的另一元素 $c\in F$ 对应，且记为：

$$\times:(a,b)\mapsto c$$

$$a\times b=c$$

显然具有加法法则和乘法法则所确定的实数集合中元素间确定关系使得实数集构成一个空间。并记为：

$$\{F;+,\times\}$$

称为具有加法和乘法法则的实数集空间。当加法法则和乘法法则无需特别声明时，也称为实数空间。实数空间关于加法和乘法法则有如下性质：

(1) $x+y=y+x$；$x,y\in F$

(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$；$x,y,z\in F$

(3) F 中存在称为关于加法的单位元素 0，使得：

$$x+0=x;\ \forall x\in F$$

(4) 对每一个 $x\in F$，存在唯一的元素 $(-x)\in F$，使得：

$$x+(-x)=0$$

(5) $(a\times b)\times x=a\times(b\times x)$；$\forall a,b,x\in F$

(6) $(a+b)\times x=a\times x+b\times x$；$\forall a,b,x\in F$

(7) $a\times(x+y)=a\times x+a\times y$；$\forall a,x,y\in F$

(8) F 中存在称为关于乘法的单位元素 1，使得：

$$1\times x=x;\ \forall x\in F$$

实数空间所具有的上述 8 个性质使得实数集合在加法法则和乘法法则下，规定了加法和乘法两种代数运算，并使得实数集合构成了一种最基本的空间结构——线性空间结构。对于实数空间除加法法则和乘法法则规定的代数运算外，减法法则和除法法则又给出了实数空间的两种运算，分别称为减法运算和除法(除数不为零)运算。定义了加法、减法、乘法、除法(除数不为零)运算的实数集 F 称为实数域。若将实数集合换为有理数、复数等，可得有理数域、复数域等。

1.1 矢量集合的运算

对实数域 F，定义 n 元有序组：

$$(x_1,\cdots,x_n);\ x_1 \in F,\cdots,x_n \in F \tag{1.1-1}$$

且当：

$$(x_1,\cdots,x_n) = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$$

时必有

$$(x_1 = \bar{x}_1,\cdots,x_n = \bar{x}_n)$$

由 n 元有序组构成的集合：

$$\begin{aligned} E^n &= \underbrace{F\times\cdots\times F}_{n\text{个}} \\ &= \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in F, -\infty < x_i < +\infty, 1 \leqslant i \leqslant n\} \end{aligned}$$

称为 n 维仿射空间，E^n 中的每一个元素称为点。记 $\boldsymbol{o}=(0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$分别称为 E^n 空间的原点和位置矢量。位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 具有方向，它表示由原点指向 E^n 空间$(x_1,\cdots,x_n)$所确定的点。E^n 空间中$(-x_1,\cdots,-x_n)$所确定的点也对应了一个位置矢量，记为$-\boldsymbol{x}=(-x_1,\cdots,-x_n)$。$-\boldsymbol{x}$ 具有双重意义，$-\boldsymbol{x}$ 一方面表示由原点指向 E^n 空间$(-x_1,\cdots,-x_n)$所确定的点的位置矢量，另一方面$-\boldsymbol{x}$ 还表示由 E^n 空间$(x_1,\cdots,x_n)$所确定的点指向原点的矢量。若 o 表示 E^n 空间的原点，A、B 分别表示 E^n 空间中$(x_1,\cdots,x_n)$和$(-x_1,\cdots,-x_n)$所确定的点，则 $\boldsymbol{x}$，$-\boldsymbol{x}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{oA},\ -\boldsymbol{x} = \overrightarrow{oB} = \overrightarrow{Ao}$$

对于 E^n 空间，所有的位置矢量构成一个集合，记该集合为 V_0，则：

$$V_0 = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_n) \mid -\infty < x_i < +\infty, x_i \in F, 1 \leqslant i \leqslant n\} \tag{1.1-2}$$

在集合 V_0 中可引入元素间的加法运算和 V_0 在实数域 F 上的数乘运算，使得 V_0 集构成一个空间。设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V_0$，$\alpha\in F$，则定义 V_0 中位置矢量的加法运算和 V_0 在实数域 F 上的数乘运算为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n) \\ &= (z_1,\cdots,z_n) = \boldsymbol{z} \end{aligned} \tag{1.1-3}$$

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{x} &= \alpha(x_1,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_n)\alpha \\ &= (\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n) \end{aligned} \tag{1.1-4}$$

并称具有式(1.1-3)定义的加法运算和式(1.1-4)定义的 V_0 在实数域 F 上的数乘运算

的 V_0 集合为实数域 F 上的矢量空间 V_0（对矢量空间仍采用 V_0 标识，但矢量空间 V_0 与矢量集合 V_0 含义不同。后文中除非特别说明，V_0 都指矢量空间）。

设 V_0 是实数域 F 上的矢量空间，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V_0$，$\alpha$、$\beta\in F$，则：

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$；

(3) V_0 中存在称为关于加法的单位元素 $\boldsymbol{o}$，使得：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{x};\ \forall\boldsymbol{x}\in V_0$$

(4) 对每一个 $\boldsymbol{x}\in V_0$，存在唯一的元素 $(-\boldsymbol{x})\in V_0$，使得：

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}$$

(5) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$；

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$；

(7) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$；

(8) F 中存在称为关于数乘的单位元素 1，使得：

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x};\ \forall\boldsymbol{x}\in V_0$$

证：

(1) 因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}&=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)\\&=(y_1+x_1,\cdots,y_n+x_n)\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(2) 因为
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}&=((x_1+y_1)+z_1,\cdots,(x_n+y_n)+z_n)\\&=(x_1+y_1+z_1,\cdots,x_n+y_n+z_n)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})&=(x_1+(y_1+z_1),\cdots,x_n+(y_n+z_n))\\&=(x_1+y_1+z_1,\cdots,x_n+y_n+z_n)\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})&=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}\\&=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\end{aligned}$$

(3) 因为 $\boldsymbol{o}=(0,\cdots,0)\in V_0$

且
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}&=(x_1+0,\cdots,x_n+0)\\&=(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{x}$

(4) 因为
$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\boldsymbol{x}&=(\alpha\beta)(x_1,\cdots,x_n)\\&=((\alpha\beta)x_1,\cdots,(\alpha\beta)x_n)\\&=(\alpha\beta x_1,\cdots,\alpha\beta x_n)\\&=(\alpha(\beta x_1),\cdots,(\alpha\beta)x_n)\end{aligned}$$

所以 $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$

(5) 因为
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}&=((\alpha+\beta)x_1,\cdots,(\alpha+\beta)x_n)\\&=(\alpha x_1+\beta x_1,\cdots,\alpha x_n+\beta x_n)\end{aligned}$$

所以 $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$

(6) 因为
$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})&=\alpha(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)\\&=(\alpha x_1+\alpha y_1,\cdots,\alpha x_n+\alpha y_n)\end{aligned}$$

所以 $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$

(7) 因为 $1\in F$

且 $1\boldsymbol{x}=1(x_1,\cdots,x_n)$

所以 $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

证毕。

E^n 空间起始点在原点的位置矢量集合按式(1.1-3)和式(1.1-4)的加法和数乘运算构成了实数域 F 上的矢量空间。两个不同的位置矢量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_0$ 在 E^n 空间中确定了两个不同的点$(x_1,\cdots,x_n)$和$(y_1,\cdots,y_n)$，由这两点也可以定义一个矢量。为此，定义连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 点的直线段。首先定义与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 相关，且线性依赖参数 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的矢量 $\boldsymbol{z}$ ：

$$\boldsymbol{z}=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}$$

显然，当 t 在$[0,1]$域内取不同值时，$\boldsymbol{z}$ 在 E^n 空间中确定不同的点。当 $t=1$ 时，$\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 确定着 E^n 空间的同一点；当 $t=0$ 时，$\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 确定着 E^n 空间的同一点。当 t 从 0 连续地变到 1 时，$\boldsymbol{z}$ 在 E^n 空间中确定一系列连续的点。由此定义，当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时，连接 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 两点的直线段$\overline{\boldsymbol{xy}}$满足：

$$\overline{\boldsymbol{xy}}=\{\boldsymbol{z}=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\mid 0\leqslant t\leqslant 1,t\in F\} \qquad (1.1-5)$$

E^n 空间的点集合。由连接 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 两点的直线段$\overline{\boldsymbol{xy}}$给出 E^n 空间 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 点确定的由 $\boldsymbol{x}$ 点指向 $\boldsymbol{y}$ 点的矢量 $\boldsymbol{u}_{xy}$ 是 E^n 空间中由 $\boldsymbol{x}$ 点指向 $\boldsymbol{y}$ 点的有向直线段$\overline{\boldsymbol{xy}}$。并且由 $\boldsymbol{y}$ 点指向 $\boldsymbol{x}$ 点的有向直线段$\overline{\boldsymbol{yx}}$为 $\boldsymbol{u}_{yx}=-\boldsymbol{u}_{xy}$。对于任意 E^n 空间的点 $\boldsymbol{x}$，所有以 $\boldsymbol{x}$ 点为起点的矢量 $\boldsymbol{u}_{xy}$ 按：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{xy}+\boldsymbol{u}_{xz}&=(y_1-x_1,\cdots,y_n-x_n)+(z_1-x_1,\cdots,z_n-x_n)\\&=((y_1-x_1)+(z_1-x_1),\cdots,(y_n-x_n)+(z_n-x_n)) \qquad (1.1-6)\\ \alpha\boldsymbol{u}_{xy}&=\alpha(y_1-x_1,\cdots,y_n-x_n)\\&=(\alpha(y_1-x_1),\cdots,\alpha(y_n-x_n));\ \alpha\in F\end{aligned}$$

定义加法和数乘运算。显然所有以 $\boldsymbol{x}$ 为起点的矢量当取 $\boldsymbol{u}_{xx}$ 为加法单位元素时，构成矢量空间，且记为 V_x。V_x 空间中的矢量称为约束矢量。

V_0 和 V_x 矢量空间，其加法和数乘运算都是针对具有相同起点的矢量定义的。通过平行性的引入，可以将所有不同起点的矢量作为一个集合，并在集合中定义加法运算和数乘运算从而构成一个新的矢量空间。

设$\overline{\boldsymbol{xy}}=\{\boldsymbol{z}=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}\mid 0\leqslant t\leqslant 1,t\in F\}$，定义若存在 S(非 $\boldsymbol{o}$ 的)位置矢量满足：

$$\overline{\boldsymbol{ab}}=\{\boldsymbol{z}=(1-t)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s})\mid a\leqslant t\leqslant b\ ;\ a,b,t\in F\} \qquad (1.1-7)$$

的直线段$\overline{\boldsymbol{ab}}$平行于$\overline{\boldsymbol{xy}}$直线段，记为$\overline{\boldsymbol{ab}}/\!/\overline{\boldsymbol{xy}}$。式(1.1-7)中的 $\boldsymbol{s}$ 是 V_0 中满足一定条件的一组位置矢量。显然不同的 $\boldsymbol{s}$ 将给出不同的$\overline{\boldsymbol{ab}}$。或者说，随 $\boldsymbol{s}$ 的变化，按式(1.1-7)给出一系列与$\overline{\boldsymbol{xy}}$平行的$\overline{\boldsymbol{ab}}$。在 E^n 空间中，一旦给定了点$(x_1,\cdots,x_n)$，按式(1.1-5)可确定直线段$\overline{\boldsymbol{xy}}$($\boldsymbol{y}\in V_0$)的集合，且该集合中每一元素(直线段)都唯一地对应一个矢量 $\boldsymbol{u}_{xy}\in V_x$($\boldsymbol{y}\in V_0$)。$E^n$ 空间中的另一点$(a_1,\cdots,a_n)$，按式(1.1-5)同样可确定直线段$\overline{\boldsymbol{ab}}$($\boldsymbol{b}\in V_0$)的集合，这一集合中的元素(直线段)也可唯一地对应一个矢量 $\boldsymbol{u}_{ab}\in V_a$($\boldsymbol{b}\in V_0$)。那么由$\overline{\boldsymbol{ab}}$与$\overline{\boldsymbol{xy}}$的平行性可以定义 V_x 和 V_a 两矢量空间中元素(矢量)的平行性。

设 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}\in V_0$，$\boldsymbol{u}_{xy}\in V_x$，$\boldsymbol{u}_{ab}\in V_a$。若直线段$\overline{\boldsymbol{xy}}$、$\overline{\boldsymbol{ab}}$满足$\overline{\boldsymbol{xy}}/\!/\overline{\boldsymbol{ab}}$，则称与$\overline{\boldsymbol{xy}}$直线段和

$\overline{\boldsymbol{ab}}$直线段对应的矢量 $\boldsymbol{u}_{xy}\in V_x$ 和 $\boldsymbol{u}_{ab}\in V_a$ 平行，且记为 $\boldsymbol{u}_{xy}//\boldsymbol{u}_{ab}$。

例 1.1 若 0(原点)是二维 Eucild 空间的给定点。取过 0 点的水平和竖直直线为实数数轴。两轴的原点(与实数零对应的点)均在 0 点，正方向分别为实数轴的从左指向右和从下指向上。当在两数轴上给定单位长度对应的实数 1 时，二元有序组(x_1,x_2)，$(x_1,x_2)\in F$ 可由平面上的几何点表示。同时位置矢量、约束矢量也都可以用平面上的有向直线段表示。这种表示称为矢量的几何表示。但当 $n>3$ 时，E^n 空间对应的矢量空间没有直观的几何表示。当 $\boldsymbol{x}=(2,3)$，$\boldsymbol{y}=(6,1)$，$\boldsymbol{a}=(1,1.5)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$时，试证明矢量 $\boldsymbol{u}_{xy}//\boldsymbol{u}_{ab}$，并将结果用平面上的有向线段表示。

解：

取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}=(-4,0)$。则：

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{ab}}&=\{(1-t)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s})\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(-2(1-t),3(1-t))+(2t,t)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(4t-2,3-2t)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\end{aligned}$$

当 $t=b$ 时：位置矢量标定$\overline{\boldsymbol{ab}}$的 $\boldsymbol{b}$ 点，即：

$$(4b-2,3-2b)=(2,1)$$

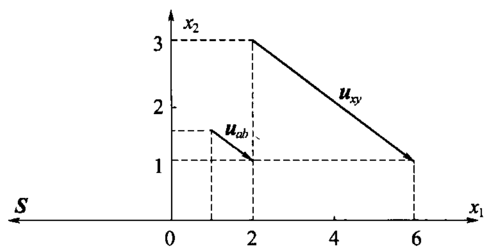
由此确定 $b=1$。

当 $t=a$ 时：位置矢量标定$\overline{\boldsymbol{ab}}$的 $\boldsymbol{a}$ 点，即：

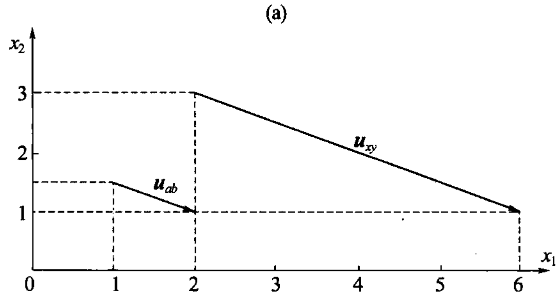
$$(4a-2,3-2a)=(1,1.5)$$

由此确定 $a=0.75$。

以上计算结果表明：当取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}$，$b=1$，$a=0.75$ 时，直线段$\overline{\boldsymbol{xy}}$和直线段$\overline{\boldsymbol{ab}}$满足式(1.1-7)。因此$\overline{\boldsymbol{xy}}//\overline{\boldsymbol{ab}}$，这表明矢量 $\boldsymbol{u}_{xy}\in V_x$，$\boldsymbol{u}_{ab}\in V_a$ 平行。其平行性的几何表示结果如图 1-1 所示。图 1-1 中(a)和(b)都给出了 $\boldsymbol{u}_{xy}//\boldsymbol{u}_{ab}$，但图(a)中 x_1 轴和 x_2 轴的单位



(a)



(b)

图 1-1

长度不同，图中所给结果表明$\overline{xy} /\!/ \overline{ab}$。

1.2 自由矢量

设V_0是实数域F上的矢量空间，$\boldsymbol{x}$是V_0中任一给定的位置矢量。V_x是所有起点在$\boldsymbol{x}$点的约束矢量空间。对V_0中的所有矢量，按式(1.1-7)的平行性，在V_x中有对应的矢量。若矢量$\boldsymbol{y}\in V_0$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)\in V_0$，则起点在$\boldsymbol{x}$的矢量$\boldsymbol{u}_{xx+y}\in V_x$可由有向线段：

$$\overline{\boldsymbol{xx}+\boldsymbol{y}}=\{\xi=(1-t)\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$$

确定。而$\boldsymbol{y}\in V_0$矢量可由有向线段：

$$\overline{\boldsymbol{oy}}=\{z=(1-t)\boldsymbol{o}+t(\boldsymbol{o}+\boldsymbol{y})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$$

确定。容易验证

$$\overline{\boldsymbol{xx}+\boldsymbol{y}}=\{\xi=(1-t)(\boldsymbol{o}+\boldsymbol{x})+t(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$$

满足式(1.1-7)(取$a=0,b=1,\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{o},\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}\to\boldsymbol{x}$)，因此$\boldsymbol{u}_{xx+y} /\!/ \boldsymbol{y}$。

对任意给定的矢量$\boldsymbol{y}\in V_0$，对不同的$\boldsymbol{x}$所确定的约束矢量空间V_x，按平行性可确定一类约束矢量$\boldsymbol{u}_{xx+y} /\!/ \boldsymbol{y}$。定义$E^n$空间中的每一点约束矢量，对给定的$\boldsymbol{y}\in V_0$，按有向直线段：

$$\overline{\boldsymbol{xx}+\boldsymbol{y}}=\{\xi=(1-t)(\boldsymbol{o}+\boldsymbol{x})+t(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\} \quad (1.2-1)$$

确定的矢量$\boldsymbol{u}_{xx+y}$所构成的一类矢量，称为矢量$\boldsymbol{y}$的等价类。V_0中所有矢量按式(1.2-1)所构成的等价类的集合称为自由矢量集合，记为V_0。应当注意的是，自由矢量的集合中的一个元素是一类按平行性等价的约束矢量，而不是一个矢量。

例 1.2 如图 1-2 所示给定的 5 个矢量$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$、$\boldsymbol{r}_4$、$\boldsymbol{r}_5$，试确定其平行性和等价性。

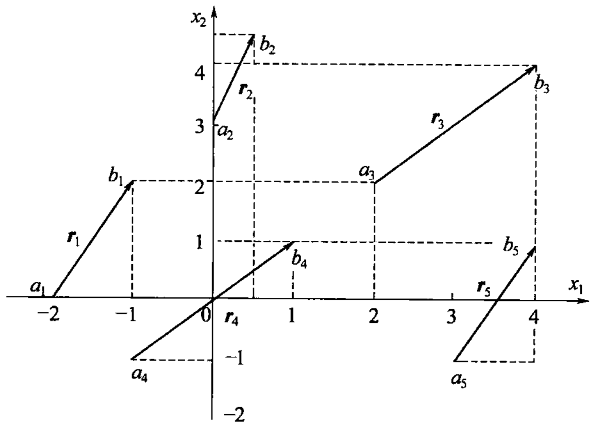


图 1-2

解：

这 5 个矢量对应的有向线段分别为

$\boldsymbol{r}_1$：$\{(1-t)(-2,0)+t(-1,2)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$

$\boldsymbol{r}_2$：$\{(1-t)(0,3)+t(0.65,4.3)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$

$\boldsymbol{r}_3$：$\{(1-t)(2,2)+t(4,4)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$

$\boldsymbol{r}_4$：$\{(1-t)(-1,-1)+t(1,1)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$

$\boldsymbol{r}_5$：$\{(1-t)(3-,1)+t(4,1)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\ ,\ t\in F\}$

$\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$(取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1$)：

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2}&=\{(1-t)(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{s})\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(1-t)(-2+1.65,2.3+0)+t(-1+1.65,2-2.3)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(-0.35+t,2.3+2t)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\end{aligned}$$

当 $t=b$ 时，$(-0.35+t,2.3+2t)=(0.65,4.3)$

当 $t=a$ 时，$(-0.35+t,2.3+2t)=(0,3)$

由此可得 $a=0.35,b=1$。显然由式(1.1-7)可知 $\boldsymbol{r}_1/\!/\boldsymbol{r}_2$，但由式(1.2-1)可知 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 不等价(因为 $a=0.35\neq 0$)。

$\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_3$(取 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2)$)：

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3}&=\{(1-t)(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{s})\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(1-t)(-2+s_1,0+s_2)+t(-1+s_1,2+s_2)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(1-t)(2,2)+t(4,4)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\end{aligned}$$

显然没有一组 s_1、s_2 的解满足：

$$\begin{cases}-2+s_1=2\ ;\ 0+s_2=2\\-1+s_1=4;\ 2+s_2=4\end{cases}$$

中第一组关于 s_1 的方程，即不存在 $\boldsymbol{s}\in V_0$ 满足式(1.1-7)，因此 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 不平行。

$\boldsymbol{r}_3$ 与 $\boldsymbol{r}_4$(取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}_4-\boldsymbol{b}_3$)：

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{b}_4}&=\{(1-t)(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{s})\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(1-t)(-3+2,-3+2)+t(4-3,4-3)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(1-t)(-1,-1)+t(1,1)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(-1+2t,-1+2t)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\end{aligned}$$

当 $t=b$ 时，$(2t-1,2t-1)=(1,1)$

当 $t=a$ 时，$(2t-1,2t-1)=(-1,-1)$

由此可得 $a=0,b=1$，显然 $\boldsymbol{r}_3$ 和 $\boldsymbol{r}_4$ 等价。

$\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_5$(取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}_5-\boldsymbol{b}_1$)：

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{a}_5\boldsymbol{b}_5}&=\{(1-t)(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{s})\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(1-t)(-2+5,0-1)+t(-1+5,2-1)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(3-3t,t-1)(4t,t)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\\&=\{(3+t,2t-1)\mid a\leqslant t\leqslant b\}\end{aligned}$$

当 $t=b$ 时，$(3+t,2t-1)=(4,1)$

当 $t=a$ 时，$(3+t,2t-1)=(3,-1)$

由此可得 $a=0,b=1$，显然 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_5$ 等价。

综上所述，最后得：$\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_5$ 等价；$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_5$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 平行；$\boldsymbol{r}_3$ 与 $\boldsymbol{r}_4$ 等价。

由平行性及式(1.2-1)确定了自由矢量集合 V_0 在集合 V 中同样可以引入关于自由矢量的加法和数乘的运算，使得自由矢量集合 V 具有线性的空间结构。为此定义自由矢量集的元素（自由矢量）间的加法运算和实数域 F 上的数乘运算。设 $\boldsymbol{x}\in V_a,\boldsymbol{y}\in V_b$；与 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 等价的 V_0 中的矢量为 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$；$a\in F$。则 V 中的加法和数乘分别定义为：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \tag{1.2-2}$$

$$a\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{X} \tag{1.2-3}$$

自由矢量的集合在上述加法和数乘运算下构成线性空间，且将带有上述加法和数乘运算的自由矢量空间记为 V。

例 1.3 确定图 1-3 所示自由矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和 $5\boldsymbol{a}$、$2\boldsymbol{b}$，并将结果画在图上。

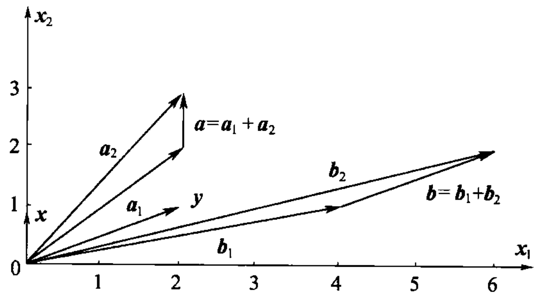


图 1-3

解：

设起点在 0 点与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 等价的矢量为 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in V_0$。$\boldsymbol{a}$ 矢量平移至起点在 0 点对应的有向直线段为：

$$(\boldsymbol{s}=\boldsymbol{o}-\boldsymbol{a}_1)$$

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{ox}}&=\{(1-t)(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{s})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{(1-t)(2-2,2-2)+t(2-2,3-2)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{(0,t)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，对应起点为 0；当 $t=1$ 时，对应终点(0,1)，因此 $\overline{\boldsymbol{ox}}$ 对应的矢量 $\boldsymbol{x}=(0,1)$。同理有 $\boldsymbol{b}$ 矢量平移至起点 0 点对应的有向直线段为：

$$(\boldsymbol{s}=\boldsymbol{o}-\boldsymbol{b}_1)$$

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{oy}}&=\{(1-t)(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{s})\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{(1-t)(4-4,1-1)+t(6-4,2-1)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{(2t,t)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，对应起点为 0；当 $t=1$ 时，对应终点(2,1)，因此 $\overline{\boldsymbol{oy}}$ 对应的矢量 $\boldsymbol{y}=(2,1)$。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(0,1)+(2,1)=(2,2)$$

$$5\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{x}=5(0,1)=(0,5)$$

$$2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{y}=2(2,1)=(4,2)$$

结果如图 1－4 所示。

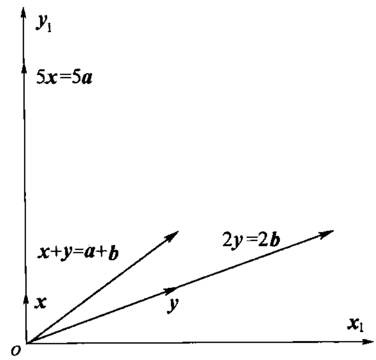


图 1－4

平行四边形法则：

设自由矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}\in V$，其起点和终点分别由 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$；$\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2\in V_0$ 矢量标定。$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 矢量对应的有向直线段分别为：

$$\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}=\{(1-t)\boldsymbol{a}_1+t\boldsymbol{a}_2 \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$$
$$\overline{\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2}=\{(1-t)\boldsymbol{b}_1+t\boldsymbol{b}_2 \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 矢量对应的起点在 o 点的等价矢量为 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$，对 $\boldsymbol{a}$ 矢量的平移取 $\boldsymbol{s}_a=\boldsymbol{o}-\boldsymbol{a}_1$，对 $\boldsymbol{b}$ 矢量的平移取 $\boldsymbol{s}_b=\boldsymbol{o}-\boldsymbol{b}_1$，则：

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{ox}}&=\{(1-t)(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{s}_a)+t(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{s}_a) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{(1-t)\boldsymbol{o}+t(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{t(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，确定起点在 $(0,\cdots,0)$ 点；$t=1$ 时，确定终点在 $(a_{21}-a_{11},\cdots,a_{2n}-a_{1n})$ 点。由此确定：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$$

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{oy}}&=\{(1-t)(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{s}_b)+t(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{s}_b) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{(1-t)\boldsymbol{o}+t(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\\&=\{t(\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，确定起点在 $(0,\cdots,0)$ 点；当 $t=1$ 时，确定终点在 $(b_{21}-b_{11},\cdots,b_{2n}-b_{1n})$ 点。由此确定：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1$$

由式(1.2－2)得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1 \tag{a}$$

另一方面，将 $\boldsymbol{b}$ 矢量的起点平行移动至 $\boldsymbol{a}$ 矢量的终点。设 $\boldsymbol{b}$ 矢量平行移动后的终点由矢量 $\boldsymbol{b}_3\in V_0$ 确定，则：

$$(\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_1)$$
$$\overline{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_3}=\{(1-t)(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{s})+t(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{s}) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

$$= \{(1-t)(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1) + t(\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

当 $t = 1$ 时，确定平移后 $\boldsymbol{b}$ 矢量终点矢量：

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 \in V_0$$

起点在 $\boldsymbol{a}_1$，终点在 $\boldsymbol{b}_3$ 的有向直线段确定自由矢量 $\boldsymbol{c}$ 平行移动至起点在 o 点。则与 $\boldsymbol{c}$ 等价的起点在 o 点的矢量 $\boldsymbol{z}$ 可由有向直线段 $\overline{\boldsymbol{oz}}$ 确定：

$$(\boldsymbol{s} = \boldsymbol{o} - \boldsymbol{a}_1)$$

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{oz}} &= \{(1-t)(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{s}) + t(\boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{s}) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \\ &= \{(1-t)(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_1) + t(\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \end{aligned}$$

当 $t = 1$ 时，$\overline{\boldsymbol{oz}}$ 确定矢量：

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1$$

由于 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 等价，由式(a)得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1 \\ &= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

该式表明自由矢量的加法可在 E^n 空间的任意点进行。图 1-5 给出了矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 加法的几何示意图。图(a)给出了 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in V$；图(b)中将 $\boldsymbol{b}$ 平行移动使得 $\boldsymbol{b}$ 起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点相接。则按图(b)有：

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

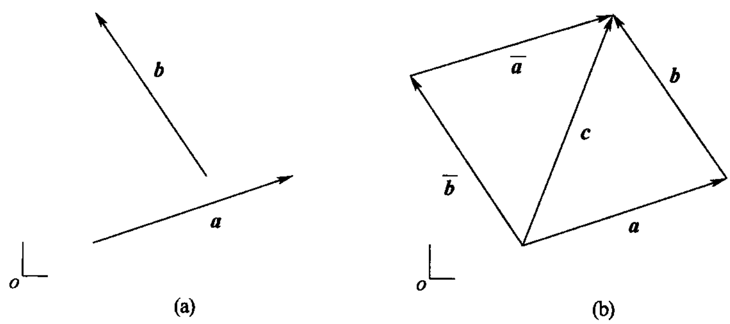


图 1-5

$\boldsymbol{c} \in V$ 为起点在 $\boldsymbol{a}$ 矢量的起点，终点在平行移动后(起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点相接)的 $\boldsymbol{b}$ 矢量终点确定的矢量。图(b)中还给出了与 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)矢量等价的矢量 $\overline{\boldsymbol{a}}$(或 $\overline{\boldsymbol{b}}$)，容易验证，当 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)与 $\overline{\boldsymbol{a}}$(或 $\overline{\boldsymbol{b}}$)等价，则 $\boldsymbol{b}$(或 $\boldsymbol{a}$)与 $\overline{\boldsymbol{b}}$(或 $\overline{\boldsymbol{a}}$)等价。即 $\boldsymbol{a} /\!/ \overline{\boldsymbol{a}}$，$\boldsymbol{b} /\!/ \overline{\boldsymbol{b}}$。$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\overline{\boldsymbol{a}}$、$\overline{\boldsymbol{b}}$ 均成平行四边形，且：

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{c}$$

该式也称为自由矢量加法的平行四边形法则。

例 1.4 试由平行四边形法则求图 1-6(a)所给矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和。

解：

将 $\boldsymbol{b}$ 矢量的终点平移至 $\boldsymbol{a}$ 矢量的起点(见图(b))；或将 $\boldsymbol{b}$ 矢量的终点平移至 $\boldsymbol{a}$ 矢量的

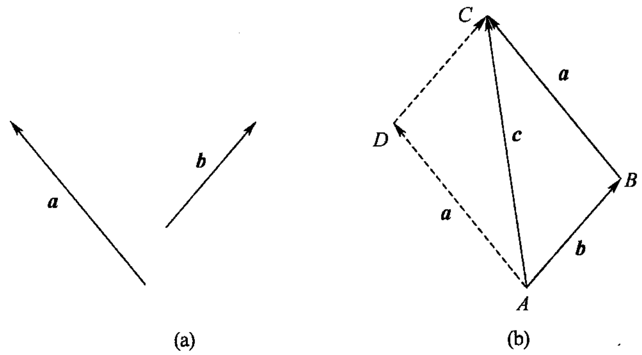


图 1-6

终点，作平行四边形 $ABCD$，则平行四边形的对角线对应的矢量 $\boldsymbol{c}\in V$ 就是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 矢量的和，即：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

1.3 自由矢量空间的基底、坐标

在例 1.1、例 1.2、例 1.3 中都引入了原点在 o 点的坐标系。而实际上在以上三个例子中对平行性和等价性的讨论中，坐标系的引入并不是必需的，仅仅是为了更直观、简便地说明平行性和等价性所附加的。本节则从线性空间元素间的相关性给出自由矢量空间的基底和坐标的概念。

设 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n\in V$；$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in F$。若存在不全为零的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in F$，使得

$$\alpha_1\boldsymbol{r}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{o} \tag{1.3-1}$$

则 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n\in V$ 称为线性相关的 n 个自由矢量。若只有当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ 时式(1.3-1)满足，则称 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n\in V$ 是线性无关的。

例 1.5 试确定自由矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1&=(5,2,7)-(3,1,1)\\ \boldsymbol{r}_2&=(4,4,3)\\ \boldsymbol{r}_3&=(7,2,4)\end{aligned}$$

的相关性。

解：

若 $\alpha_1\boldsymbol{r}_1+\alpha_2\boldsymbol{r}_2+\alpha_3\boldsymbol{r}_3$

$=(2\alpha_1,\alpha_1,6\alpha_1)+(4\alpha_2,4\alpha_2,3\alpha_2)+(7\alpha_3,2\alpha_3,4\alpha_3)$

$=(2\alpha_1+4\alpha_2+7\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3,6\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)$

$=(0,0,0)$

则：
$$\begin{cases}2\alpha_1+4\alpha_2+7\alpha_3=0\\ \alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3=0\\ 6\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3=0\end{cases}$$

这是关于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的齐次线性代数方程，其系数行列式的值为：

$$\boldsymbol{\Delta}=2(16-6)-4(4-12)+7(3-24)\neq 0$$

因此方程无非零解。即只有当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ 时：

$$\alpha_1\boldsymbol{r}_1+\alpha_2\boldsymbol{r}_2+\alpha_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{o}$$

$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 线性无关。

$\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 是 V 中 n 个线性无关的自由矢量，且 V 中任意 $n+1$ 个矢量都是线性相关的，则 V 称为 n 维自由矢量空间。n 维自由矢量空间 V 中的任意 n 个线性无关的自由矢量称为 n 维自由矢量空间 V 中的一组基底。自由矢量空间的维数 n 可以是有限的整数($n\geqslant 1$)，也可以是无穷大。前者称为有限维自由矢量空间，后者称为无限维矢量空间。本书仅讨论有限维自由矢量空间。同时由于式(1.3-1)中的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in F$，因此准确地讲 V 是实数 F 上的 n 维自由矢量空间。在不致引起混淆时就称为 n 维矢量空间 V，或称为矢量空间 V。

定理 1.1 如果 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 是 V 的一组基底，则 V 中的每个矢量 $\boldsymbol{x}$ 可唯一地表示成 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 的线性组合

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{r}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{r}_n;\ x_1,\cdots,x_n\in F \tag{1.3-2}$$

证：

因为 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{x}\in V$；$\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 是 V 的基底表明 V 是 n 维矢量空间，由基底的定义可知 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{x}$ 这 $n+1$ 个矢量必然线性相关。

所以

$$\alpha_0\boldsymbol{x}+\alpha_1\boldsymbol{r}_1+\alpha_2\boldsymbol{r}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{o}$$

上式中 $\alpha_0\neq 0$(若 $\alpha_0=0$，$\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 线性无关。若要求上式成立，则 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 线性无关，这与定义相矛盾)，且当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$ 时，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为零。因此有：

$$\boldsymbol{x}=-\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_1\boldsymbol{r}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{r}_n)$$

令 $-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}=x_1,\cdots,-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_0}=x_n$，则：

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{r}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{r}_n$$

这表明每一个 $\boldsymbol{x}\in V$ 都可由基底线性表示。

设 $\boldsymbol{x}$ 有另一表示：

$$\boldsymbol{x}=\overline{x_1}\boldsymbol{r}_1+\cdots+\overline{x_n}\boldsymbol{r}_n$$

因为 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$

所以 $(x_1-\overline{x_1})\boldsymbol{r}_1+\cdots+(x_n-\overline{x_n})\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{o}$

由于 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 线性无关，所以得：

$$x_1-\overline{x_1}=0,\cdots,x_n-\overline{x_n}=0$$

$$x_1=\overline{x_1},\cdots,x_n-\overline{x_n}$$

因此式(1.3-2)的表示是唯一的。

证毕。