

滚动轴承 分析计算与应用

GUNDONG ZHOUCHENG
FENXI JISUAN YU YINGYONG

罗继伟 罗天宇 著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

滚动轴承分析计算与应用

罗继伟 罗天宇 著



机械工业出版社

本书详细介绍了滚动轴承的基础理论——Hertz 点接触与线接触理论的推导过程和基本公式，同时介绍了非 Hertz 接触问题——有限长线接触问题的数值解法。以此为基础，分别对球轴承和滚子轴承在不同载荷作用下的滚动体载荷分布、滚动体接触应力与变形、轴承位移与刚度以及轴承寿命等进行了分析，提供了计算方法、程序设计框图和具体的算例。本书对滚动轴承设计计算与应用分析具有一定的指导意义。

本书可供从事滚动轴承设计与应用的技术人员参考使用，也可作为机械制造专业的大学生和研究生的教学参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

滚动轴承分析计算与应用/罗继伟, 罗天宇著. —北京: 机械工业出版社, 2009. 6

ISBN 978-7-111-27108-6

I. 滚… II. ①罗…②罗… III. 滚动轴承 IV. TH133. 33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 069948 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 孔 劲 版式设计: 张世琴 责任校对: 张玉琴

封面设计: 马精明 责任印制: 邓 博

北京中兴印刷有限公司印刷

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 7.25 印张 · 137 千字

0 001—3 000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-27108-6

定价: 18.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

销售服务热线电话: (010)68326294

购书热线电话: (010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话: (010)88379772

封面无防伪标均为盗版

前 言

滚动轴承是大批量生产的、高度标准化、系列化的工业产品。除了特殊用途或是针对特定主机的专用轴承需要特别设计之外，一般滚动轴承能够适应大多数工况条件的使用要求，因此它也是应用最为广泛的机械基础元件之一。

在大多数实际应用中，滚动轴承能够正确安装，润滑良好，轴承座或支承结构具有足够的刚度，轴承的载荷和转速适中。在这些条件下，可以对轴承的分析模型进行适当的简化，以便抓住主要矛盾，解决工程中最为关注的问题。在经典的轴承分析中普遍采用刚性套圈假设，即假定轴承套圈是一个刚体，滚动体与滚道的接触只会产生局部的接触变形而不会改变套圈的整体形状和尺寸，这就为套圈的位移和接触变形分析带来了很大的方便。其次是忽略滚动体与滚道接触时产生的摩擦力（包括油膜拖动力）以及由于滚动体高速运转而产生的惯性力（如离心力、陀螺力矩等）。对普通工况下的通用轴承而言，摩擦力和惯性力与滚动体的接触载荷相比一般要小一个数量级，因此忽略它们不会对分析结果产生显著影响。本书在进行轴承分析时也采用了这些假设。

通用轴承的力学分析主要是求解接触力学问题。滚动轴承中的接触问题可以分为两类，一类是单个滚动体与滚道的接触问题，另一类是轴承整体的接触问题，即确定有多少个滚动体发生了接触以及接触载荷的整体平衡问题。对前一个问题，早在19世纪80年代初期，Hertz就完成了点接触（1881年）与线接触（1882年）问题的理论解，它们分别构成了球轴承和滚子轴承分析的基础。实际上，滚子轴承中，不论是圆锥滚子还是圆柱滚子，它们的接触模型都不完全符合Hertz线接触理论，因此滚子轴承分析的理论基础在很长一段时间内是不完备的。直到20世纪70年代以后，才提出了一些行之有效的数值计算方法，比较好地解决了有限长柱体与滚道接触的问题。

在复杂受力状态下，滚动轴承的整体平衡问题最后归结为求解一组非线性方程组。在20世纪60年代之前，受计算工具的限制，求解这些方程组是比较困难的。因此，人们往往要对计算方法进行简化，例如将离散的滚动体载荷分布简化为连续分布载荷，不考虑接触角变化，忽略滚子端部的应力集中，不考虑力矩载荷的影响等。今天，随着计算机的普及以及数值计算方法的进展，已经完全能够把这些因素考虑在内，因而分析结果也更加符合工程实际。

本书目的就是介绍通用轴承力学分析中的基础理论和基本方法。书中特别重视数值计算方法和计算机程序设计，因为这是现代滚动轴承分析中不可或缺的方

法和手段。本书可供从事滚动轴承设计与应用的技术人员参考使用，也可作为机械制造专业的大学生和研究生的教学参考书。

本书第4章和第7章由罗天宇完成，其余由罗继伟完成。在本书编写过程中，得到洛阳轴承研究所、洛阳轴研科技股份有限公司、中国轴承工业协会以及很多轴承企业的同事、领导和朋友们的热情鼓励与支持，作者在此向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中一定存在不足之处，欢迎广大读者批评指正。

罗继伟

目 录

第 1 章 Hertz 点接触理论	1
1.1 Hertz 点接触问题的基本假设	1
1.2 分布压力作用在弹性半空间表面的问题	1
1.3 点接触问题的几何描述	6
1.4 点接触问题的基本方程	7
1.5 Hertz 点接触问题的数值计算	10
第 2 章 Hertz 线接触理论	14
2.1 弹性半平面界面作用有法向载荷的问题	14
2.2 接触问题的基本方程	16
2.3 线接触问题中的弹性趋近量	18
第 3 章 有限长线接触问题	20
3.1 非 Hertz 接触问题求解的一般方法	20
3.2 圆柱滚子有限长线接触问题的一维处理	22
3.3 压痕试验	26
3.4 圆锥滚子有限长线接触问题的一维处理	27
3.5 计算实例	30
第 4 章 球轴承计算	33
4.1 向心球轴承的几何关系	33
4.2 径向游隙	35
4.3 沟道曲率半径系数	37
4.4 球—滚道接触的载荷位移关系	39
4.5 纯径向载荷作用	40
4.6 纯轴向载荷作用	42
4.7 径向力、轴向力和力矩载荷作用	45
4.8 成对双联角接触球轴承	47
4.9 双列调心球轴承	51

4.10 推力球轴承	53
4.11 双列球面滚子轴承	54
第5章 圆柱滚子轴承计算	57
5.1 圆柱滚子的弹性趋近量	57
5.2 圆柱滚子与滚道接触的载荷位移关系	59
5.3 圆柱滚子与内、外滚道的接触应力	59
5.4 滚子倾斜	61
5.5 径向力与力矩作用下的圆柱滚子轴承	62
第6章 圆锥滚子轴承计算	67
6.1 圆锥滚子的平衡	67
6.2 圆锥滚子与滚道接触的载荷位移关系	67
6.3 纯轴向载荷作用	69
6.4 径向与轴向载荷作用下的单列圆锥滚子轴承	70
6.5 径向、轴向和力矩载荷作用	72
6.6 成对安装圆锥滚子轴承	74
第7章 滚动轴承疲劳寿命计算	79
7.1 点接触球轴承疲劳寿命	79
7.2 线接触滚子轴承疲劳寿命	82
7.3 滚子接触应力不均匀分布对疲劳寿命的影响	84
7.4 多列轴承组合的寿命计算	86
第8章 轴承刚度与主轴系统	90
8.1 单一变量下的轴承刚度	90
8.2 多变量下的轴承刚度	93
8.3 轴系分析的有限元法	95
8.4 考虑轴承支承刚度的主轴系统	99
参考文献	107

第 1 章 Hertz 点接触理论

1.1 Hertz 点接触问题的基本假设

Hertz 点接触问题考虑的是两个任意弹性曲面体在初始状态下仅在一点发生接触的情况。在载荷作用下，接触区域内的变形和应力都只具有局部的性质，即它们将随着离开接触点距离的增大而迅速衰减。Hertz^[1]在处理这个问题时做了以下几点假设：

1) 接触体是均匀各向同性的线性弹性体，在外力作用下处于小变形状态。

2) 接触体具有连续光滑的表面。两接触体处于非密合 (non-conforming) 接触状态，即接触仅仅是局部的，接触区域长度 a 与物体表面的曲率半径 R 相比为一小量。

3) 由于 $a \ll R$ ，因此在接触区域附近，可以忽略物体表面的曲率而将物体作为半空间来处理。

4) 接触表面不存在摩擦力。

基于上述假设，Hertz 在三个方面做了开创性的工作。首先是用二次函数来描述接触点附近的一般曲面方程；其次是假定接触区域是一个椭圆，接触应力呈半球函数分布；第三是将弹性半空间的 Boussinesq 解引入接触区域内的法向位移计算。下面我们将从这几方面来论述 Hertz 问题的求解。

1.2 分布压力作用在弹性半空间表面的问题

法向集中力 p 作用在弹性半空间表面的 (x', y') 点，而在另一点 (x, y) 产生的法向位移由弹性理论的 Boussinesq 解^[2]给出：

$$w(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{p}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (1.1)$$

式中， E ， ν 分别是弹性体的弹性模量和泊松比。

当 p 是半空间表面局部区域 S' 上的分布压力 $p(x', y')$ 时， (x, y) 点的法向位移可表示为：

$$w(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{S'} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (1.2)$$

压力 p 按半椭圆函数分布的情况如图 1.1 所示, 可表示为:

$$p(x', y') = p_0 \sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2} \quad (1.3)$$

式中, a, b 分别为椭圆区域 S'_c 的半长轴和半短轴, p_0 为椭圆中心处的最大压应力。根据式 (1.2), 分布压力 $p(x', y')$ 在 (x, y) 点产生的位移为:

$$w(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{S'_c} \frac{p_0 \sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' \quad (1.4)$$

如图 1.2 所示, 将面积元 $dx' dy'$ 表示为 $r' dr' d\theta'$, 弦长 $C'D'$ 的长度用 $2l'$ 表示,

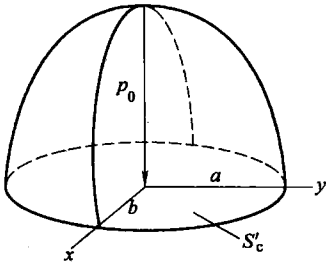


图 1.1 接触区域与接触应力分布

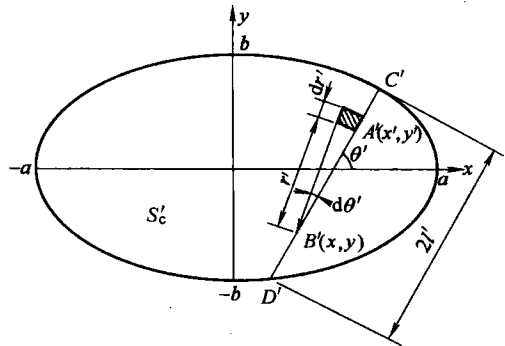


图 1.2 椭圆区域 S'_c (xy 平面)

则式 (1.4) 可以写成:

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_0^\pi d\theta' \int_{r'} p dr' \quad (1.5)$$

为了计算式 (1.5), 进行坐标变换, 令:

$$u = x, v = \frac{a}{b}y \quad (1.6)$$

这样, 椭圆区域 S'_c 就变换成 uv 平面内的半径为 a 的圆形区域 S_c , 如图 1.3 所示。

分布压力 p 变换成半球面函数:

$$p = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - u'^2 - v'^2} \quad (1.7)$$

图 1.2 中的弦 $C'D'$ 变成弦 CD , 其长度为 $2l$, 变换前后的关系如图 1.4 所示。

从图 1.4 中可以看出:

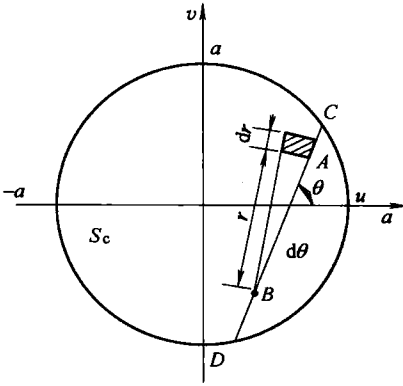


图 1.3 圆形区域 (uv 平面)

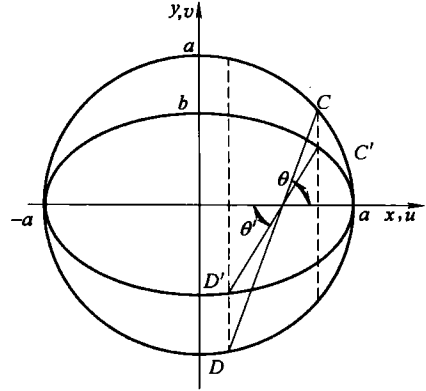


图 1.4 坐标变换关系

$$l' \cos \theta' = l \cos \theta \quad (1.8a)$$

$$l' \sin \theta' = \frac{b}{a} l \sin \theta \quad (1.8b)$$

由式(1.8a)和式(1.8b)可得:

$$\frac{l}{l'} = \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \quad (1.9a)$$

$$\left(\frac{l'}{l}\right)^2 = \cos^2 \theta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \theta \quad (1.9b)$$

$$\tan \theta' = \frac{b}{a} \tan \theta \quad (1.9c)$$

对弦长微元有:

$$dr' = \frac{l'}{l} dr \quad (1.10a)$$

对式(1.9c)两边求导,得:

$$\frac{d\theta'}{\cos^2 \theta} = \frac{b}{a} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

利用式(1.9a),得:

$$d\theta' = \frac{b}{a} \left(\frac{\cos \theta'}{\cos \theta}\right)^2 d\theta = \frac{b}{a} \left(\frac{l}{l'}\right)^2 d\theta \quad (1.10b)$$

将式(1.10a)和式(1.10b)代入式(1.5),并注意到 l'/l 与 r 无关,得:

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_0^{\pi} \frac{b}{a} \left(\frac{l}{l'}\right)^2 d\theta \int_{z_1}^l p \frac{l'}{l} dr$$

$$= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \frac{b}{a} \int_0^\pi \frac{l}{l'} d\theta \int_{2l} p dr \quad (1.11)$$

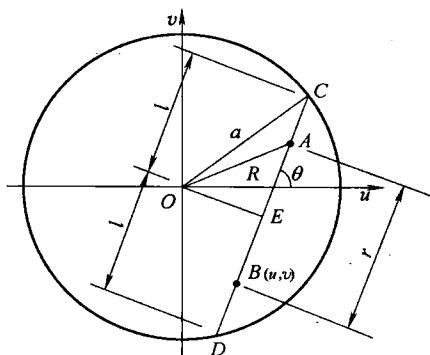


图 1.5 坐标变换关系图

从图 1.5 可以确定如下关系:

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= u \sin \theta + v \cos \theta \\ R^2 &= \overline{OE}^2 + (r - \overline{BE})^2 \\ l^2 &= a^2 - \overline{OE}^2 = a^2 - (u \sin \theta + v \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

由于 p 是半球面函数, 可以写成:

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - R^2} = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \overline{OE}^2 - (r - \overline{BE})^2} \\ &= \frac{p_0}{a} \sqrt{l^2 - (r - \overline{BE})^2} \end{aligned}$$

于是式 (1.11) 中的第二项积分可以写成:

$$\int_{2l} p dr = \frac{p_0}{a} \int_{\overline{BE}-l}^{\overline{BE}+l} \sqrt{l^2 - (r - \overline{BE})^2} dr$$

设 $r - \overline{BE} = l \sin \varphi$, 则 $dr = l \cos \varphi d\varphi$, 于是:

$$\int_{2l} p dr = \frac{p_0 l^2}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi l^2}{2a} p_0 \quad (1.13)$$

将式 (1.13) 代入式 (1.11), 得:

$$w = \frac{(1-\nu^2) b p_0}{2a^2 E} \int_0^\pi \frac{l^2}{(l'/l)} d\theta$$

再将式 (1.9b) 和式 (1.12) 代入式 (1.13), 并利用式 (1.6), 得到:

$$w = \frac{(1-\nu^2) b p_0}{2a^2 E} \int_0^\pi \frac{a^2 - (u \sin \theta + v \cos \theta)^2}{\sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \frac{(1-\nu^2)b p_0}{2a^2 E} \int_0^\pi \frac{a^2 - x^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta - (a/b)^2 y^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (1.14)$$

为了完成式 (1.14) 的积分, 需要事先求出下列积分:

设:
$$e^2 = 1 - (b/a)^2 \quad b < a \quad (1.15)$$

则
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} = 2K(e) \quad (1.16a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta}} &= \frac{2}{e^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (1 - e^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{2}{e^2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} - \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta = \frac{2}{e^2} (K(e) - E(e)) \quad (1.16b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta}} &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta d(\sin \theta)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d(\sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \\ &= -\frac{1}{e^2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} \Big|_0^\pi = 0 \quad (1.16c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + (b/a)^2 \sin^2 \theta}} &= \frac{2}{e^2} \int_0^{\pi/2} \frac{e^2 (1 - \sin^2 \theta) + 1 - 1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{2}{e^2} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} - \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{e^2} (E(e) - (1 - e^2)K(e)) \quad (1.16d) \end{aligned}$$

式 (1.16a) ~ 式 (1.16d) 中, $K(e)$ 和 $E(e)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分函数, e 称为椭圆参数。

利用式 (1.16a) ~ 式 (1.16d), 式 (1.14) 可以写成:

$$w = \frac{1-\nu^2}{E} (L - Mx^2 - Ny^2) \quad (1.17)$$

式中
$$L = p_0 b K(e) \quad (1.18a)$$

$$M = \frac{b p_0}{a^2 e^2} (K(e) - E(e)) \quad (1.18b)$$

$$N = \frac{b p_0}{a^2 e^2} \left(\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right) \quad (1.18c)$$

1.3 点接触问题的几何描述

设两个弹性体 V_1 和 V_2 在未施加载荷前仅在 O 点相互接触。 V_1 和 V_2 在 O 点处的主曲率半径分别为 R_{11} 、 R_{12} 和 R_{21} 、 R_{22} ，如图 1.6 所示。对曲率 $1/R_j$ 的正负做如下规定：凸出的表面曲率为正，凹进的表面曲率为负。以 O 点为原点，以通过 O 点的两物体的公切面为 xy 平面，并在该平面内沿物体的主曲率方向分别建立局部坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 和 $Ox_2y_2z_2$ ， z_1 、 z_2 分别指向 V_1 和 V_2 的内部。

在载荷作用下，两物体的接触区域很小，因此在 O 点附近用二次函数来近似描述物体的表面方程。考虑 V_1 上 R_{11} 所在的平面（见图 1.7），由于 β 是一个小量，所以 D 点的纵坐标可以表示为：

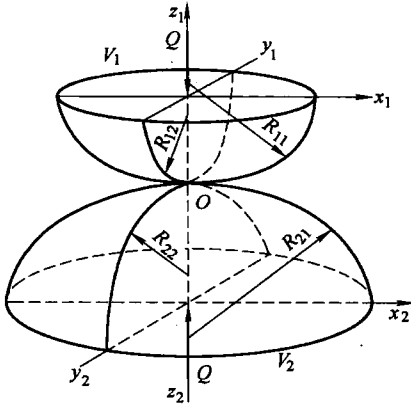


图 1.6 点接触示意图

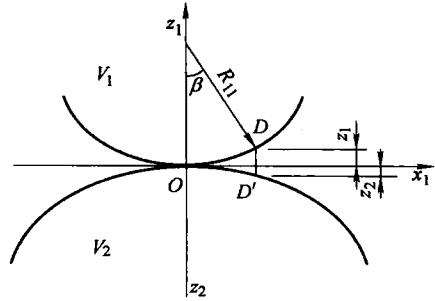


图 1.7 表面间距

$$z_1 = x_1 \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) \approx \frac{1}{2}x_1\beta$$

因 $\beta \approx \sin\beta = x_1/R_{11}$ ，所以
$$z_1 = \frac{x_1^2}{2R_{11}}$$

同理，对 R_{12} 所在的平面，有：
$$z_1 = \frac{y_1^2}{2R_{12}}$$

对不位于 x_1 轴和 y_1 轴上的任意点 (x_1, y_1) ， z_1 可足够精确地表示为：

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{R_{11}} + \frac{y_1^2}{R_{12}}\right)$$

同样，对 V_2 有：

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{R_{21}} + \frac{y_2^2}{R_{22}}\right)$$

设 DD' (见图 1.7) 是两表面之间与公切面垂直的线段, D 、 D' 的坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 则这两点的距离为:

$$z = z_1 + z_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{R_{11}} + \frac{y_1^2}{R_{12}} + \frac{x_2^2}{R_{21}} + \frac{y_2^2}{R_{22}} \right) \quad (1.19)$$

一般情况下两物体的主曲率面不重合, 设 x_1 轴和 x_2 轴之间的夹角为 α , 利用坐标变换 (见图 1.8):

$$x_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$$

$$y_2 = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$$

可以从式 (1.19) 中消去 x_2 和 y_2 , 得:

$$z = A'x_1^2 + 2H'x_1y_1 + B'y_1^2 \quad (1.20)$$

式中 $A' = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{21}} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_{22}} \sin^2 \alpha$

$$H' = \left(\frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

$$B' = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} \sin^2 \alpha + \frac{1}{R_{22}} \cos^2 \alpha$$

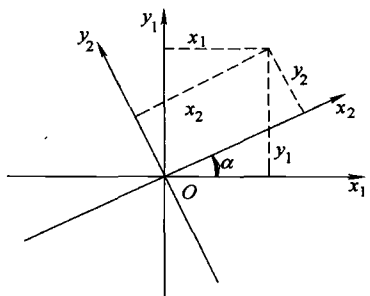


图 1.8 坐标变换

进一步利用坐标变换, 式 (1.20) 可以变换成标准椭圆方程, 设:

$$x_1 = x \cos \gamma - y \sin \gamma$$

$$y_1 = x \sin \gamma + y \cos \gamma$$

式中, γ 的选取应根据消去 x_1y_1 项的要求来确定。这样式 (1.20) 可写成:

$$z = Ax^2 + By^2 \quad (1.21)$$

式中

$$B - A = \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}} \right) + \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{21}} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_{11}} \right) \left(\frac{1}{R_{22}} - \frac{1}{R_{21}} \right) \sin^2 \alpha \right\}^{1/2} \quad (1.22a)$$

$$B + A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \right) \quad (1.22b)$$

从式 (1.21) 可以看出, 当两个物体相互趋近一个确定值, 即 $z = \text{常数}$ 时, 两表面的交线是一个椭圆。

1.4 点接触问题的基本方程

在载荷 Q 作用下, 两物体由于弹性变形而形成接触区域 S_c , S_c 内的接触应力 p 应满足平衡条件:

$$\iint_{S_c} p(x, y) dx dy = Q \quad (1.23)$$

接触体表面的位移由两部分组成，其一是接触体的刚性位移 δ_1 和 δ_2 ，如图 1.9

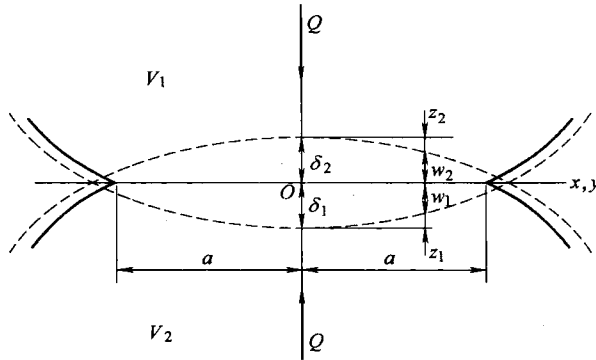


图 1.9 变形协调关系

虚线部分所示。 δ_1 和 δ_2 的和称为弹性趋近量：

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = w_1(O) + w_2(O) \quad (1.24)$$

式中， $w_1(O)$ 和 $w_2(O)$ 分别是原点处的弹性位移。

图 1.9 中， $w_1(x, y)$ 、 $w_2(x, y)$ 、 $z_1(x, y)$ 和 $z_2(x, y)$ 是原点以外的点相对于接触平面的位移。在接触区内，这些位移必须满足变形协调条件：

$$w_1 + w_2 + z_1 + z_2 = \delta_1 + \delta_2 \quad (1.25)$$

式中， z_1 、 z_2 分别是两个未变形物体表面对应点到初始接触点之间的垂直距离（见图 1.7），由式 (1.21) 确定。

将式 (1.21)、式 (1.24) 和式 (1.2) 代入式 (1.25) 中，得：

$$\frac{1}{\pi E'} \iint_{S_c} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (1.26)$$

$$\text{式中} \quad \frac{1}{E'} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (1.27)$$

ν_1 、 E_1 和 ν_2 、 E_2 分别是物体 V_1 和 V_2 的泊松比和弹性模量。

方程式 (1.23) 和式 (1.26) 构成点接触问题的基本方程。这样点接触问题便归结为在接触区域 S_c 内寻找一个与作用载荷 Q 平衡的分布压力 $p(x, y)$ ，由它产生的物体表面的位移满足变形协调方程 (1.26)。

Hertz 假定接触区域 S_c 为一椭圆，其半长轴与半短轴分别为 a 和 b ，在 S_c 内的压应力分布为式 (1.3) 所表示的半椭球函数，则由平衡方程 (1.23) 可得：

$$\iint_{S_c} p_0 \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2} dx dy = \frac{2}{3} \pi ab p_0 = Q$$

即

$$p_0 = \frac{3Q}{2\pi ab} \quad (1.28)$$

根据式 (1.17), 式 (1.26) 左边的积分可以表示为:

$$\frac{1}{\pi E'} \iint_{S_c} \frac{p_0 \sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' = \frac{1}{E'} (L - Mx^2 - Ny^2) \quad (1.29)$$

比较式 (1.26) 和式 (1.29) 的右边, 并利用式 (1.18), 得:

$$\delta = \frac{bp_0}{E'} K(e) \quad (1.30)$$

$$A = \frac{bp_0}{a^2 e^2 E'} [K(e) - E(e)] \quad (1.31a)$$

$$B = \frac{bp_0}{a^2 e^2 E'} \left[\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right] \quad (1.31b)$$

利用式 (1.31) 和式 (1.28), 并由式 (1.15), 有

$$b = \sqrt{1 - e^2} a \quad (1.32a)$$

得:

$$a = \left(\frac{3E(e)Q}{2\pi(1-e^2)(A+B)E'} \right)^{1/3} \quad (1.32b)$$

从式 (1.22) 和式 (1.31) 还可以得到确定椭圆参数 e 的方程:

$$\frac{B-A}{B+A} = F(\rho) = \frac{2(1-e^2)}{e^2} \frac{E(e) - K(e)}{E(e)} + 1 \quad (1.33)$$

式中, $F(\rho)$ 称为曲率函数, 当接触表面的几何参数确定后, 它是一个已知量。定义:

$$\Sigma\rho = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}} \quad (1.34)$$

$\Sigma\rho$ 称为曲率和函数。另根据式 (1.22b), 有:

$$A + B = \Sigma\rho/2$$

这样式 (1.32b), 式 (1.32a) 和式 (1.30) 又可分别表示为:

$$a = a^* \left(\frac{3Q}{2\Sigma\rho E'} \right)^{1/3} \quad (1.35a)$$

$$b = b^* \left(\frac{3Q}{2\Sigma\rho E'} \right)^{1/3} \quad (1.35b)$$

$$\delta = \delta^* \left(\frac{3Q}{2\Sigma\rho E'} \right)^{2/3} \frac{\Sigma\rho}{2} \quad (1.35c)$$

式中

$$a^* = \left(\frac{2E(e)}{\pi(1-e^2)} \right)^{1/3} \quad (1.36a)$$

$$b^* = \left[\frac{2\sqrt{1-e^2}E(e)}{\pi} \right]^{1/3} \quad (1.36b)$$

$$\delta^* = \frac{2K(e)}{\pi} \left(\frac{(1-e^2)\pi}{2E(e)} \right)^{1/3} \quad (1.36c)$$

表 1.1 列出了 $F(\rho)$ 和 a^* , b^* , δ^* 的对应值。

表 1.1 点接触参数表

$F(\rho)$	a^*	b^*	δ^*
0	1	1	1
0.1	1.0703	0.9364	0.9978
0.2	1.1498	0.8776	0.9910
0.3	1.2417	0.8224	0.9792
0.4	1.3511	0.7693	0.9618
0.5	1.4857	0.7172	0.9376
0.6	1.6607	0.6641	0.9045
0.7	1.9051	0.6080	0.8586
0.8	2.2918	0.5443	0.7918
0.9	3.0928	0.4607	0.6799
0.92	3.3944	0.4384	0.6458
0.94	3.8244	0.4117	0.6031
0.96	4.5107	0.3779	0.5463
0.98	5.9282	0.3287	0.4598
0.99	7.7596	0.2868	0.3844
0.992	8.4723	0.2744	0.3620
0.994	9.4465	0.2598	0.3356
0.996	10.9301	0.2415	0.3028
0.998	14.2645	0.2113	0.2490
0.999	18.6994	0.1845	0.2005
0.99925	20.5893	0.1759	0.1847
0.99950	23.5877	0.1643	0.1637
0.99975	29.7424	0.1463	0.1320
0.99990	37.5345	0.1302	0.1055
1	∞	0	0

1.5 Hertz 点接触问题的数值计算

求解点接触问题的关键是先要根据 $F(\rho)$ 的值来确定 e , $K(e)$ 和 $E(e)$, 然后才能计算 a , b , p_0 和 δ 。在数值计算中 $K(e)$ 和 $E(e)$ 可以用级数展开^[3]来计算: