

算學小叢書



算術——比及比例

林鶴一 森啓助著

鄭心南譯



商務印書館發行

算學小叢書

算術

比及比例

林鶴一 森啓助著

鄭心南譯

商務印書館發行

目次

第一章 比	1
1. 比之定義	1
2. 名數之比	2
3. 以比之值乘後項則得前項	3
4. 比之性質	3
5. 反比	4
6. 優比 劣比	5
練習問題I	5
第二章 比例	9
7. 比例之意義	9
8. 比例之性質	10
9. 比例式之解法	11
例題	13
第三章 應用第一 反比例	15
10. 正比例及反比例	15

11. 比例之問題	18
例題	19
練習問題 II	21
第四章 應用第二 複比例	27
12. 複比	27
例題	32
13. 複比例	33
14. 複比例式之解法	34
15. 複比例之問題	35
練習問題 III	40
第五章 應用第三 連鎖法	49
16. 連鎖法	49
練習問題 IV	51
第六章 應用第四 配分比例	55
17. 連比	55
18. 求連比之法	56
例題	59
19. 配分比例	61

20. 合資算.....	63
練習問題 V.....	64
第七章 應用第五 混合法.....	76
21. 定義.....	76
22. 混合法(其一).....	76
23. 混合法(其二).....	77
練習問題 VI	80
答及解法指針	88
練習問題 I.....	88
第二章 例題	95
第三章 例題	95
練習問題 II	97
第四章 例題	107
練習問題 III	109
練習問題 IV	121
第六章 例題	126
練習問題 V	129
練習問題 VI	149

算術—比及比例

第一章

比

1. 比之定義

甲數對乙數之比者，指甲數爲乙數之幾倍，或與其幾分之幾相當之關係也。

稱此二數爲比之項，稱甲數爲前項，乙數爲後項。

例如 6 對於 3 之比，稱 6 爲前項，3 爲後項。述二數之比時有種種之法，如“甲數對於乙數之比”“甲數與乙數之比”等皆表示同一之意義。

表示前項爲後項之幾~~倍~~或與其幾分之幾相當之數稱爲比之值。此數與以後項除前項所得之商相等，又與以前項爲分子後項爲分母之分數相等。

例如 6 對於 3 之比之值爲 2，5 對於 7 之比之值爲 $\frac{5}{7}$ 。

比之值通常略稱爲比。

欲記二數之比，或於前項之右作(：)而後書後項於其右，或用分數之形亦可。

例如 6 對於 3 之比，可記爲 $6:3$ 或 $\frac{6}{3}$

注意 如有甲乙二數，甲對於乙之比爲 $3:5$ 者，指甲若爲某數之 3 倍，則乙適與某數之 5 倍相當。即甲之三分之一與乙之五分之一相等，即甲爲乙之五分之三，乙爲甲之三分之五。

2. 名數之比

如比之項爲名數時，則比之兩項須表同種類之量之名數。

甲數爲乙數之幾倍，或爲幾分之幾者，當然就兩數皆爲不名數，或限於皆表同種類之量之名數而言。故例如 2 對 3 之比，2 人對 3 人之比，2 尺對 4 寸之比等可以成立，而 2 元對 3 之比，或 2 斤對 3 日之比則無意義。

故比在不名數之間，或在表同種類之量之名數間可成立，但在不名數與名數間或在表異種類之量之名數間，不能成立。

注意 1 2 尺：4 寸即爲 20 寸：4 寸，故此比之值爲 $\frac{20}{4}$ 即 5，非 $\frac{2}{4}$ 。欲求名數之比之值，須先將兩項改爲同一單

位而後以後項除前項。

注意 2 不論兩項爲名數抑不名數，而比之值常爲不名數。

注意 3 因 $5 \text{ 斤} : 3 \text{ 斤} = 5 \text{ 元} : 3 \text{ 元} = 5 \text{ 尺} : 3 \text{ 尺} = 5:3$ ，故一切同單位之名數之比與略去單位所得不名數之比相等。

注意 4 比與分數之商相同。前項與分子或被除數相當，後項與分母或除數相當。

然分數或商，雖離卻分母分子，除數被除數而觀，仍有意義，而比之觀念，則由比較二數而起，故不能離卻二數而言比。

3. 以比之值乘後項則得前項

例如以後項 3 乘 $6:3$ 之值即 2，則可得前項 6；又以後項 5 乘 $4:5$ 之值即 $\frac{4}{5}$ ，則可得前項 4。

甲數對於乙數之比者，欲得甲數所乘於乙數之數也。

4. 比之性質

比不外前項爲分子後項爲分母之分數而已，故比與分數有同樣之性質如下：

比之兩項雖以同數乘之或以同數除之，其值不變。

故比之兩項如有公約數時，可以約之，又比之兩項或一項爲分數或小數時，可化爲整數之比。

如此將所設之比，務以極小之整數表之之事，稱爲化原比使之簡單。

$$(例一) \quad 12:18 = \frac{12}{6} : \frac{18}{6} = 2:3.$$

$$(例二) \quad 2:0.7 = 2 \times 10 : 0.7 \times 10 = 20:7.$$

$$(例三) \quad \frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \times 15 : \frac{2}{5} \times 15 = 5:6$$

5. 反比

前項與後項互易所得之二比互爲反比（一稱逆比）。

例如 3:5 爲 5:3 之反比，5:3 爲 3:5 之反比。對於反比而言，其他之一比，稱爲正比。例如以 3:5 爲 5:3 之反比時，則對於反比 3:5 而言，稱 5:3 爲正比。

注意 1 反比係對其他一比而言，單就一比而論，則不生此觀念。

$$\text{注意 2} \quad \frac{1}{5} : \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \times 15 : \frac{1}{3} \times 15 = 3:5.$$

然 3:5 爲 5:3 之反比，故 $\frac{1}{5} : \frac{1}{3}$ 亦等於 5:3 之反比，故反比之定義，得述如次：

甲對於乙之比之反比（一作逆比），爲甲之反數（一作逆

數)對於乙之反數(一作逆數)之比.

注意 3 反比之值等於正比之值之反數.

注意 4 比之大小,從比之值之大小.

例如 $8:15 = \frac{8}{15}$, $3:5 = \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$;

故 $3:5 > 8:15$.

通常欲比較比之大小,當以分數之形表比,化爲同分母而後比較其分子,與比較分數之大小相同.

注意 5 於 $\frac{5}{12} : \frac{7}{12}$ 之兩項各乘 12, 則得 5:7;

又於 $\frac{3}{4} : \frac{3}{5}$ 之兩項各以 3 除之, 則得 $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$;

然 $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 5:4$, 故分母相同之二分數之比等於分子之比, 分子相同之二分數之比等於分母之比之反比.

6. 優比 劣比

前項大於後項之比稱爲優比; 前項小於後項之比稱爲劣比.

練習問題 I

1. 問下列諸比之值:

$28:42$,

$15:3$,

$156:144$.

2. 化下列諸比使成簡單：

$$\frac{1}{4} : \frac{5}{6}, \quad 2 + \frac{1}{3} : \frac{3}{5}, \quad 6:1.25,$$

$$2.6:4.55, \quad \frac{2\frac{1}{4}}{12} : 2\frac{1}{7}.$$

3. 下列諸比務以最小整數之不名數表之：

15時:12時, 1.5丈:3尺, 3丈:5畝, 1升:1畝.

4. 18:25 與 5:7 孰大?

5. (一) 若干與 15 之比爲 $\frac{2}{3}$.

(二) 四斗八升與若干之比爲 $3:2\frac{1}{2}$.

(三) 與 $\frac{4}{3} : \frac{3}{2}$ 之反比相等之比, 其前項如爲 9 斤時, 問其後項當爲若干斤?

(四) 一斗七升之酒與水相混, 欲使酒與水之比爲 9:2 時, 問所混之水量若干?

6. 有甲乙二數, 甲之十五分之四, 等於乙之二十五分之六, 甲與乙所成之比試簡單表之.

7. 茶三斤之價等於酒五升之價, 問茶一斤之價與酒一升之價之比如何?

8. 二整數之比爲 4:5, 其最大公約數爲 7, 求此二整

數之值如何？又其最小公倍數爲 260 時，此二數如何？

9. 米每升之價爲一角六分，麥爲一角二分，問同一金額所買米及麥之量之比如何？

10. 以金若干可買梨 15 個與柿 130 個，又可買梨 9 個與柿 175 個時，問梨 1 個與柿 1 個之價之比如何？

11. 男 12 人，童 3 人 2 日所作之工，如使男 7 人，童 6 人作之，則須 3 日，問男 1 人與童 1 人工作之比如何？

12. 二數之和及差之比爲 17:11 時，求二數之比。

13. 有水夫駕舟，上水 5 時間行 3 里，下水 3 時間行 5 里，問上下速度之比如何？又行同一距離上下時間之比如何？又水夫之漕力及河流之速度之比如何？

14. 甲乙二數之比爲 5:4，甲之 2 倍與乙之三倍之差爲 6 時，求此二數。

15. 有甲乙二船航行若干里之行程，甲比乙須多三時間，然甲增加速度達於二倍時，則較乙早着一時間半，問二船速度之比如何？

16. 酒與水之比爲 18:5 及 19:4，今將此二種之酒等量混合時，問酒與水之比如何？又二種混合爲 5:2 及 7:3 時如何？

17. 酒與水之比爲 $7:2$ 與 $8:3$, 今將此二種之酒取 4 與 5 之比例而混合時, 問混合酒中酒與水之比如何?

18. 有一種鹽, 論重量則爲 100 兩 2 角 5 分, 論容量則爲 1 升 9 分, 如水 1 升之重量爲 48 兩時, 求同容量之水與鹽重量之比.

*19. 地球表面, 海面約爲陸地之 3 倍, 陸地約 $\frac{3}{4}$ 在北半球. 問北半球陸地與海面之比約若干? 又南半球如何?

*20. 北半球陸地之面積與海面之面積之比爲 $419:1000$, 南半球爲 $129:1000$. 問南半球之海面與北半球之海面之廣之比如何?

*21. 北半球陸地之面積與海面之面積之比爲 $419:1000$, 南半球爲 $129:1000$. 問地球全表面陸地與海面面積之比如何?

第二章

比例

7. 比例之意義

有四數於此，第一數對於第二數之比等於第三數對於第四數之比時，稱此四數成爲比例。

例如 3 對於 4 之比之值爲 $\frac{3}{4}$ ；6 對於 8 之比之值亦爲 $\frac{3}{4}$ 。故 3, 4, 6, 8 四數，成爲比例，以式表之如下：

$$3:4=6:8 \quad \text{或} \quad \frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

此式稱爲比例式。3, 4, 6, 8 各爲比例式之第一項，第二項，第三項，第四項，第一項與第四項稱爲外項，第二項與第三項稱爲內項，又第一項與第三項，第二項與第四項各稱爲對應項。

於上例中 3 與 8 爲外項，4 與 6 爲內項，又 3 與 6，4 與 8 爲對應項。

注意 1 如 $4:6=6:9$ 內項相等時，則稱三數 4, 6, 9 成爲比例，稱 6 爲 4 與 9 之比例中項。

注意 2 成爲比例之四數中如有名數時，則第一項與第二項，或第三項與第四項須表同種類之量之名數。

例如 $3\text{元}:4\text{元}=6\text{元}:8\text{元}$ ， $3\text{尺}:4\text{尺}=6\text{日}:8\text{日}$ ， $3\text{人}:4\text{人}=6:8$ 等雖皆可以成立，而 $3\text{時}:4\text{里}=6\text{時}:8\text{里}$ 則無意義（參照第二節）。

8. 比例之性質

例如 $3:4=6:8$ 時，即 $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ 時，如將 4×8 之積乘此兩方則亦相等甚明。

$$\text{故} \quad \frac{3}{4} \times 4 \times 8 = \frac{6}{8} \times 4 \times 8,$$

$$\text{即} \quad 3 \times 8 = 4 \times 6.$$

此 3 與 8 爲比例式之外項，4 與 6 爲其內項，故

（第一）如四數成爲比例時，外項之積與內項之積相等。

反之，例如 $3 \times 8 = 4 \times 6$ 時，如將 4×8 除此兩方所得之商亦相等。

$$\text{故} \quad \frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{4 \times 6}{4 \times 8},$$

$$\text{即} \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \text{ 或 } 3:4=6:8.$$

依同理將上式書如 $4 \times 6 = 3 \times 8$ 各以 4×8 除之，則得

$$6:8=3:4. \text{ 故}$$

(第二) 如二數之積，與他二數之積相等時，則以一方之二數爲外項，他一方之二數爲內項之比例式可以成立。

注意 四數 3, 4, 6, 8 成爲比例時，則得下列八種之比例式：

即 $3:4=6:8$ 時，由 (第一) $3 \times 8 = 4 \times 6$ ，其次以 3 與 8, 4 與 6 之一方爲外項他一方爲內項依種種之順序變化，可得種種之比例式，皆與 $3 \times 8 = 4 \times 6$ 相等。

$$(1) \quad 3:4=6:8.$$

$$(2) \quad 3:6=4:8.$$

$$(3) \quad 8:4=6:3.$$

$$(4) \quad 8:6=4:3.$$

$$(5) \quad 4:3=8:6.$$

$$(6) \quad 6:3=8:4.$$

$$(7) \quad 4:8=3:6.$$

$$(8) \quad 6:8=3:4.$$

於 (1) 將內項互換則得 (2)，將外項互換則得 (3)，內項與外項同時互換則得 (4)；又 (1), (2) (3), (4) 之第一項與第二項，第三項與第四項互換，則各得 (5), (6), (7), (8)。

9. 比例式之解法

成爲比例之四數中，如知其三時，則可求其所餘之一數。此一數稱爲比例式之未知項。通例以 x 表之，求比例式之

未知項，稱為解比例式。

(例一) 解 $3:7=9:x$.

解 由前節(第一)，知欲使此比例式成立，非 $3 \times x = 7 \times 9$ 不可。即 x 之 3 倍為 7×9 。故

$$x = \frac{7 \times 9}{3} = 21. \quad \text{答： } 21.$$

於此比例如將外項之 3 與 x 互換，演算亦得同一之結果。

(例二) 解 $12:x=8:5$.

解 $12 \times 5 = 8 \times x$.

故 $x = \frac{12 \times 5}{8} = 7\frac{1}{2}$. 答： $7\frac{1}{2}$.

於此比例式內項之 x 與 8 互換，演算亦得同一之結果，通例省略途中之式，即將 x 之值書成分數之形。故由前二例，得法則如下：

〔法則〕 欲求外項之一，可將他一外項除內項之積；欲求內項之一，可將他一內項除外項之積即得。

注意 1 前節及本節，就四數皆為不名數而論，若為名數，則由比之定義或乘法之定義，有時為無意義。

然名數之比與不名數之比相等。故於解本節比例式之