高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　李延敏

经济数学
——线性代数

◎ 主　编　李秀玲　刘国军

副主编　张雨雷　苟玉玺

高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础系列教材

总主编　李延敏

经济数学——线性代数

主　编　李秀玲　刘国军
副主编　张雨雷　苟玉玺

高等教育出版社

内容提要

本书是教育科学“十一五”国家规划课题“我国高校应用型人才培养模式研究”数学类子课题项目研究成果之一。

内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，书后附 Mathematica 软件在线性代数中的应用及习题（A）、（B）的参考答案。

本书可作为经济管理类专业本科教材，也可作为报考研究生的数学复习参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学．线性代数／李秀玲，刘国军主编．—北京：高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027246-8

Ⅰ．经… Ⅱ．①李…②刘… Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材 Ⅳ．F224.0 O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 112678 号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张申申
版式设计 马敬茹 **责任校对** 杨凤玲 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2009 年 8 月第 1 版
印　　张	12.75	印　　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	230 000	定　　价	15.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 27246-00

前　　言

本书是教育科学"十一五"国家规划课题"我国高校应用型人才培养模式研究"数学类子课题项目研究成果之一。

本套高等学校经济管理学科数学基础系列教材由《经济数学——微积分》、《经济数学——线性代数》、《经济数学——概率论与数理统计》三本教材组成。

"经济数学——线性代数"是高等学校经济与管理专业的必修基础课。为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标,培养具有创新能力的高素质人才,我们在多年的线性代数教学实践的基础上,经过统一策划、集体研究编写了本教材,力求实现基础性与应用性相结合、科学性与通俗性相结合,着力体现加强基础、重视应用、培养创新能力的教学理念。此外,我们还认真参考了最新颁布的《2009年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求,力争使本书的内容既能满足经济类、管理类本科线性代数教学的要求,又能兼顾一部分报考硕士研究生学生的需要。

本教材在保留线性代数基本内容的基础上,以矩阵为主线,突出矩阵方法,用矩阵的初等变换来研究线性方程组、二次型。结合经济管理类学生的专业特点,介绍了线性代数在投入产出模型中的应用。在附录中介绍了数学软件 Mathematica 在线性代数中的应用,使学生在学习线性代数的基本概念、基本理论和基本方法的基础上掌握运用数学软件进行复杂计算的技能。各章配有两组习题及习题参考答案,(A)组习题为基本题型,(B)组习题有一定难度,以帮助学生通过系统训练培养应用数学知识分析和解决实际问题的能力。

本教材内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、Mathematica 软件在线性代数中的应用以及习题参考答案。

本教材第一、四章及附录由李秀玲编写,第二、三章由刘国军编写,第五章由张雨雷、苟玉玺编写。全书框架结构安排、统稿、定稿由李秀玲承担。

本教材的出版得到了高等教育出版社的大力支持,在此表示衷心感谢。本教材也得到了长春税务学院、北华大学等高校的大力支持,在此一并表示衷心感谢。

虽然我们希望编写出一套质量较高、适合当前高等财经类学校数学教学

实际需要的教材，但限于水平，本书仍可能存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2009 年 4 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个重要的概念,它广泛应用于数学、工程技术及经济学等众多领域.本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法,进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1　n 阶行列式

一、二阶和三阶行列式

考虑含有两个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为求得上述方程组的解,利用加减消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组有唯一解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于记忆上述公式,引进二阶行列式的概念:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称为**二阶行列式**,其中横排称为**行**,竖排称为**列**,数 a_{ij} 称为**行列式的元素**,其第一个下标 i 称为**行标**,表示这个元素所在的行数;第二个下标 j 称为**列标**,表示这个元素所在的列数. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为**二阶行列式的展开式或值**.

利用对角线法则(图 1.1),很方便地记忆二阶行列式的计算公式(1.3),图中用实线连接的两个元素的乘积减去用虚线连接的两个元素的乘积即为二阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1.1

利用二阶行列式,线性方程组(1.1)的解,即式(1.2)的分子可分别表示为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

因此,当线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,则方程组(1.1)有唯一解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1.1 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 3 = -1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 1 \times 1 = 2,$$

于是方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{1} = -1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{1} = 2.$$

类似地,对于三元线性方程组

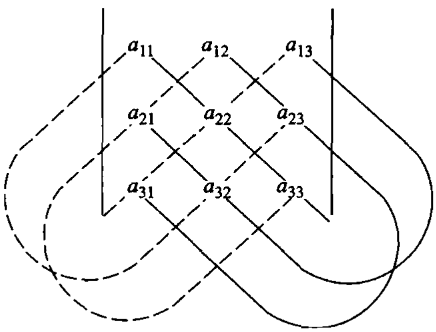
$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3,
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

引入三阶行列式如下：

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\tag{1.5}
$$

称为**三阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，数 a_{ij} 称为**行列式的元素**，其第一个下标 i 称为**行标**，表示这个元素所在的行数；第二个下标 j 称为**列标**，表示这个元素所在的列数. 右端项称为**三阶行列式的展开式或值**.

同样，利用对角线法则(图 1.2)，也将很方便地记忆三阶行列式的计算公式(1.5)，其中实线连接的三个元素的乘积取正号，虚线连接的三个元素的乘积取负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的值.



$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
$$

图 1.2

例如

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2\times1\times3 + (-3)\times(-2)\times5 + 1\times4\times1 - 1\times1\times5 - (-3)\times4\times3 - 2\times(-2)\times1 = 75.
$$

利用消元法解线性方程组(1.4)，可得出与二元线性方程组(1.1)相类似的结果，即如果线性方程组(1.4)的系数行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,
$$

则线性方程组(1.4)有唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列换成方程组(1.4)的常数项 b_1,b_2,b_3 后所得到的三阶行列式.

例 1.2 解线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0,\\3x_1+2x_2-5x_3=1,\\x_1+3x_2-2x_3=4.\end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=28\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21,$$

所以方程组有唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

从以上讨论可以看出,利用二阶、三阶行列式可以很方便地求解二元、三元线性方程组. 但在实际应用中,遇到的方程组的未知元常常多于3个,而且在某些理论研究上也需要讨论 n 元线性方程组的求解问题. 这样,要把二阶、三阶行列式加以推广,引入 n 阶行列式的概念.

二、排列与逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式上,首先引入排列的概念.

定义 1.1 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 **n 级排列**.

例如,3421 是 4 级排列,43125 是 5 级排列.

显然,n 级排列的总数为 $n!$ 个. 如 3 级排列的总数为 $3!=6$ 个,即

$$123\quad 132\quad 213\quad 231\quad 312\quad 321.$$

若排列中各数是按照从小到大的自然顺序排列的,通常称为**标准排列**. 上述排列中的 123 是标准排列,而其余排列中都存在较大的数排在较小的数之前的情况,对此我们定义

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果较大的数排在较小的数的前面,称这一对数构成一个**逆序**. 而排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为此排列的**逆序数**,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**,逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

例 1.3 求下列排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1) 43125; (2) $n(n-1)\cdots 21$.

解 (1) $\tau(43125)=3+2+0+0+0=5$,故该排列为奇排列.

(2) $\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,故当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,该排列为偶排列; 当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,该排列为奇排列.

注:标准排列的逆序数为 0,故标准排列是偶排列.

以下给出与排列有关的另一概念.

定义 1.3 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置,其余各数位置不变,就得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$. 这种变换称为一个**对换**,记为 (i_s,i_t).

例如, $43125\xrightarrow{(1,5)}43521\xrightarrow{(2,4)}23541$,容易计算 $\tau(43521)=8$,$\tau(23541)=5$,说明奇排列 43125 经过一次对换(1,5)变成偶排列 43521,偶排列 43521 经过一次对换(2,4)变成奇排列 23541.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后,其奇偶性发生改变.

证明 先证对换相邻两个数的情形. 设原排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

这里"…"表示那些不变的数. 经过对换(i,j)得到一个新排列

$$\cdots ji\cdots.$$

我们比较这两个排列的逆序数. 在这两个排列中,"…"部分排列的逆序数不变,且数 i 与 j 和其余的数所成的逆序显然也没有改变. 如果 i 与 j 在原来的排列中

没有构成逆序，即 $i<j$，则在新排列中就构成了一个逆序，即新排列较原排列逆序数增加 1. 如果 i 与 j 在原来的排列中构成逆序，即 $i>j$，则在新排列中就没有构成逆序，即新排列较原排列逆序数减少 1. 因此对换相邻两个数，排列的奇偶性一定改变.

再证一般对换的情形. 设原排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots,$$

即 i 与 j 两数之间有 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，经过对换 (i,j) 得到一个新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

显然，这样一个对换可以经过一系列的相邻两数的对换来实现：在原排列中，先把 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻两数的对换，化为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots,$$

再把数 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻两数的对换，就得到新排列，也就是说原排列经过 $2s+1$ 次相邻两数的对换就得到了新排列. 因此一个排列中的任意两个数对换，排列改变奇偶性.

定理 1.2 在全部 $n!$ 个 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 假设在 $n!$ 个 n 级排列中，有 k 个奇排列，t 个偶排列，则 $k+t=n!$. 对于这 k 个奇排列施以同一个对换，由定理 1.1，可得到 k 个偶排列，而且不同的奇排列经过同一个对换后不能得到同一个偶排列，故奇排列的个数不会大于偶排列的个数，即 $k\leqslant t$. 同理可证得 $t\leqslant k$，所以有

$$k=t=\frac{n!}{2}.$$

三、n 阶行列式

下面观察和分析二阶、三阶行列式所具有的特点，并加以推广，从而引进 n 阶行列式的概念.

我们先看二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

它的展开式具有以下特点：

1. 二阶行列式的展开式有 $2!$ 项.

2. 每一项是位于不同行与不同列的两个元素的乘积.

3. 每一项所带的符号是这样确定的：当该项两个元素的行标为标准排列

时，如果列标构成偶排列，那么该项带正号；如果列标构成奇排列，那么该项带负号. 例如，项 $a_{11}a_{22}$ 的两个元素的列标构成偶排列 12，所以它带正号. 而项 $a_{12}a_{21}$ 的两个元素的列标构成奇排列 21，所以它带负号.

我们再来看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

它的展开式具有以下特点：

1. 三阶行列式的展开式有 3！项.

2. 每一项是位于不同行与不同列的三个元素的乘积.

3. 每一项所带的符号是这样确定的：当该项三个元素的行标为标准排列时，如果列标构成偶排列，那么该项带正号；如果列标构成奇排列，那么该项带负号. 例如，项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 的三个元素的列标构成偶排列 231，所以它带正号. 而项 $a_{11}a_{23}a_{32}$ 的三个元素的列标构成奇排列 132，所以它带负号.

根据观察到的这些特点，二阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对所有二级排列求和. 三阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

按照上面分析，可定义 n 阶行列式如下：

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

的代数和,其中$j_1 j_2 \cdots j_n$是一个n级排列. 当$j_1 j_2 \cdots j_n$为偶排列时,项(1.6)带正号;当$j_1 j_2 \cdots j_n$为奇排列时,项(1.6)带负号.

这样n阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.7}$$

其中$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$表示对所有$n$级排列$j_1 j_2 \cdots j_n$求和,等号右端称为$n$**阶行列式的展开式**或**值**. 由于$n$级排列共有$n!$个,因此,$n$阶行列式的展开式是$n!$项的代数和. n阶行列式也简记为$|a_{ij}|$.

例 1.4 在5阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中,下列两项(1) $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$;(2) $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$各带什么符号?

解 (1) $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$的行标为标准排列,列标14523的逆序数为4,所以该项带正号;

(2) 将$a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$改写为$a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}$,其行标为标准排列,列标54123的逆序数为7,所以该项带负号.

例 1.5 计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4},$$

和式中只有当$j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 4, j_4 = 1$时,$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$,所以

$$D = (-1)^{\tau(2341)} a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} = (-1)^3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = -24.$$

例 1.6 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这里 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为**主对角线上的元素**.

解 在展开式中,行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

显然,不为零的项中必有 $j_n=n$,而 j_{n-1} 可取 n 或 $n-1$,但 $j_n\neq j_{n-1}$,因此 $j_{n-1}=n-1$,依此类推,可得 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$,即展开式中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为上三角形行列式的特殊情形,对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得,下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由上面的例题可知,上(下)三角形行列式及对角形行列式都等于主对角线上的元素的乘积.

在行列式的定义中,为了确定每一项的符号,把项中 n 个元素的行标排成标准排列.由于数的乘法满足交换律,因而这 n 个元素的次序可以是任意的.一般地,有如下结论

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的项可写为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 和 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列.

例如,在例 1.4 中,项 $a_{31}a_{24}a_{15}a_{42}a_{53}$ 所带的符号为 $(-1)^{\tau(32145)+\tau(14523)}=(-1)^{3+4}=-1$.

按定理 1.1 来确定行列式中每一项的符号的好处在于,不需要重排因子的顺序就可以确定符号.同时定理表明,行标和列标的地位是对称的,因而为了确定每一项的符号,同样可以把每一项的列标排成标准排列,于是 n 阶行列式定义的另一种表示法为

$$D=|a_{ij}|=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}, \tag{1.8}$$

其中 $i_1 i_2\cdots i_n$ 是 n 级排列.

§1.2 行列式的性质

行列式的计算问题是一个很重要的问题,但当行列式的阶数较高时,直接用定义计算行列式是很麻烦的.为了简化行列式的计算,本节讨论行列式的性质.这些性质不仅是为了简化行列式的计算,而且对行列式的理论研究及应用也是很重要的.

一、行列式的性质

性质 1 将行列式的行、列互换,行列式的值不变.即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D^{\mathrm{T}}$.这里行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

证明 将行列式 D 按(1.7)式展开,行列式 D^{T} 按(1.8)式展开,得

$$D=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=D^{\mathrm{T}}.$$

性质 1 说明,行列式的行与列的地位是相同的,因此对于行成立的性质,对列也成立.