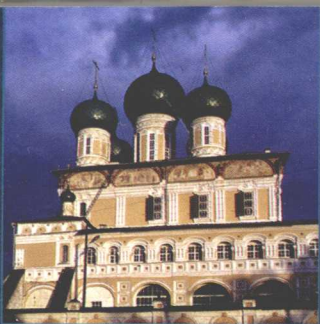




俄罗斯数学物理
学校教学参考书

俄罗斯 平面几何问题集 (第6版)

□ 波拉索洛夫 编著

□ 周春荔 译

◆ 数学奥林匹克

◆ 世界看中国

◆ 中国学俄罗斯

- 中国是数学奥林匹克大国
- 俄罗斯是数学奥林匹克强国
- 中国有世界上人数最多的数学奥林匹克选手
- 俄罗斯有世界上最优秀的数学奥林匹克选手
- 中国的数学奥林匹克训练题花样翻新
- 俄罗斯的数学奥林匹克训练题最具原创性
- 中国全民学奥数
- 俄罗斯精英学奥数



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学物理学校教学参考书

俄罗斯

平面几何问题集

(第6版)

波拉索洛夫 编著

周春荔 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书提供了俄罗斯在中学,其中包括在专门化的学校学习的几乎所有平面几何的问题及各题的提示.本书适用于大学、中学师生和数学奥林匹克选手及教练员.

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯平面几何问题集/(俄罗斯)波拉索洛夫编著;
周春荔译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5603-2922-2

I. 俄… II. ①波… ②周… III. 平面几何 IV. O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 108052 号

书名:Задач и по планиметрии. Часть1. Часть2.

作者:Прасолов В.В

©Прасолов В.В

Исключительное авторское право Произведения перевода на китайский язык приобретено издательством «Харбинский политехнический университет» при посредничестве Китайского агентства по авторским правам и Российского авторского общества.

本作品中文专有出版权由中华版权代理中心和俄罗斯著作权协会代理取得,由哈尔滨工业大学出版社独家出版.

版权登记号 黑版贸审字 08-2009-066 号

版权所有 侵权必究

策划编辑 刘培杰 甄森森

责任编辑 唐 蕾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 49.5 字数 621 千字

版 次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2922-2

印 数 1~3 000 册

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

第四版序言

在这本问题集中提供了在中学,其中包括在专门化的学校^①学习的几乎所有平面几何的题材.来源于各个不同时期的数学奥林匹克问题,以及文献中数学竞赛和数学小组的问题,是编写本书的基础.

为了方便读者,在书中按照惯用的栏目将问题分类整理为30章,在每章中又分为若干节(由2到14).分类法的根据是通常问题的解法.这样分类的主要目的是为了帮助读者在如此大量的问题组成中确定方向.在新版中增加了类似的“对象索引”也是为了这个目的.

在新版中包含了70个补充的问题,这是我一年后知道的,也改变了某些问题的解法.高难度的问题在新版中作了“*”的标记.还增加了“补充”讨论某些比单独问题更为广泛的问题.

第28章由A.Ю.瓦因特洛勃完成,第29和30章由C.Ю.奥列弗阔夫完成.这些章内容的许多定义来自И.М.雅格洛姆的书——《几何变换》的第2卷,第3部分“线性和圆的变换”(莫斯科:国家技术出版社,1956).

在第一版的准备中A.B.波格列洛夫,A.M.阿勃拉莫夫,A.Ю.瓦因特洛勃,Н.Б.瓦西里耶夫,Н.П.朵尔比林,C.Ю.奥列弗阔夫院士提出的建议和意见给予我极大的帮助,我对他们表示真挚的感谢.

^① 俄罗斯特有的数学及物理奥林匹克学校,这是俄罗斯数学教育的一个特点和成功之处.(编者注)

第五版序言^①

在前面的版本中,在第三版排印的文本里,发生了大量的刊误.在新版中这些刊误得到了改正.其中 И.杰伊曼和莫斯科第 57 中学的学生小组:Д.扎果斯金,А.尼基钦,К.波普果夫,А.富尔索夫,Л.沙伽玛给我以大量帮助.С.马尔科洛夫不仅指出了我的错误,而且提供了某些问题的解法.

由通讯处为 `planimetry_bug@mscme.ru` 的读者来信帮我改正了提示中的某些错误.例如,Дарий Гринберг 指出了我在施泰纳点坐标计算中的错误和在问题 5.137 提示中的错误,而 А.卡尔波夫引导我注意问题 30.34 的条件的简述是不正确的.

在新版中填加了 200 个问题,还补进了与椭圆、抛物线、双曲线联系的新的第 31 章(在本书的第一版有过这样的章节,但在以后的版本中撤掉了).

为了方便读者,我给出新添加的问题的目录:2.11, 2.40, 2.84, 3.9, 3.49, 3.50, 3.57, 3.62, 3.65, 3.76 ~ 3.82, 4.33, 4.57, 5.13, 5.17, 5.24, 5.37, 5.53, 5.70, 5.71, 5.77, 5.96, 5.97, 5.126, 5.127, 5.129 ~ 5.161, 6.41, 6.57, 7.71, 7.43, 8.45, 8.58 ~ 8.60, 9.10, 9.27, 9.48, 9.85, 9.95, 10.20, 10.58, 10.21, 12.17, 12.31, 12.77, 12.78, 12.83, 13.14, 13.15, 13.39, 14.38, 14.42, 14.44 ~

① 第六版没有新的序言,用的是第五版序言.

14.49, 14.53, 15.4, 17.23, 17.33, 17.40, 17.41, 17.42, 18.26, 18.31, 19.50 ~ 19.52, 20.11, 20.28, 20.33, 22.3, 22.7, 22.14, 22.15 ~ 22.23, 22.24 ~ 22.31, 22.34, 23.16, 24.5, 24.6, 24.8, 24.10, 24.16, 24.17, 25.26, 25.37, 25.42, 28.8, 29.14 ~ 29.19, 29.31, 29.32, 29.34, 29.40, 29.42, 30.34, 31.1 ~ 31.84.

就前面版本的问题目录中,对问题的叙述或它们的提示进行了修订的有: 2.5, 5.125, 10.46, 12.41, 14.60, 20.7, 23.15, 23.22, 24.7, 24.15, 24.18, 25.16, 25.63.

本书的电子版在因特网中可以找到,其网址是 <http://www.mccme.ru/prasolov/>.在电子版中没有换掉曾经出现过的印刷错误.

目 录

第1章 相似三角形	(1)
§1 夹在平行线之间的线段	(2)
§2 相似三角形边的比	(8)
§3 相似三角形面积之比	(14)
§4 辅助的全等三角形	(16)
§5 高线足构成的三角形	(21)
§6 相似形	(23)
§7 供独立解答的问题	(27)
第2章 圆周角	(29)
§1 对等弧的角	(30)
§2 两弦之间夹角的度数	(35)
§3 切线与弦之间的角	(37)
§4 弦和弧长与角的量数的联系	(40)
§5 四点共圆	(43)
§6 圆周角与相似三角形	(47)
§7 平分弧的角平分线	(52)
§8 对角线垂直的圆内接四边形	(53)
§9 三个外接圆交于一点	(56)
§10 密克点	(59)
§11 杂 题	(61)
§12 供独立解答的问题	(63)
第3章 圆	(65)
§1 圆的切线	(66)
§2 弦的线段长的乘积	(69)
§3 相切的圆	(71)
§4 相同半径的三个圆	(75)
§5 由一点引的两条切线	(77)

§ 6	三角形高线定理的应用	(79)
§ 7	曲线图形的面积	(80)
§ 8	内切于弓形中的圆	(82)
§ 9	杂 题	(86)
§ 10	根 轴	(87)
§ 11	圆 束	(94)
§ 12	供独立解答的问题	(96)
第 4 章	面 积	(97)
§ 1	中线平分三角形面积	(98)
§ 2	面积的计算	(100)
§ 3	分四边形所成的三角形的面积	(103)
§ 4	分四边形所得部分的面积	(104)
§ 5	杂 题	(107)
§ 6	分图形为等积部分的直线和曲线	(111)
§ 7	四边形的面积公式	(114)
§ 8	辅助面积	(116)
§ 9	面积割补(重新布置)	(121)
§ 10	供独立解答的问题	(123)
第 5 章	三 角 形	(125)
§ 1	内切圆与外接圆	(126)
§ 2	直角三角形	(132)
§ 3	正三角形	(135)
§ 4	带有 60° 或 120° 的三角形	(138)
§ 5	整数三角形	(140)
§ 6	杂 题	(143)
§ 7	梅涅劳斯定理	(153)
§ 8	塞瓦定理	(159)
§ 9	西摩松线	(167)
§ 10	垂足三角形	(172)
§ 11	欧拉线与九点圆	(175)
§ 12	布罗卡尔点	(179)
§ 13	列姆扬点	(185)
§ 14	供独立解答的问题	(191)

第6章 多边形	(192)
§1 内接与外切四边形	(192)
§2 四 边 形	(201)
§3 托勒密定理	(207)
§4 五 边 形	(211)
§5 六 边 形	(213)
§6 正多边形	(216)
§7 内接与外切多边形	(225)
§8 任意凸多边形	(230)
§9 帕斯卡定理	(232)
§10 供独立解答的问题	(235)
第7章 点的轨迹	(237)
§1 轨迹是直线或线段	(238)
§2 轨迹是圆或圆弧	(241)
§3 圆 周 角	(243)
§4 辅助的全等或相似的三角形	(245)
§5 位 似	(246)
§6 轨迹方法	(248)
§7 具有非零面积的轨迹	(249)
§8 卡诺定理	(251)
§9 费马-阿波罗尼圆	(253)
§10 供独立解答的问题	(255)
第8章 作 图	(256)
§1 轨 迹 法	(256)
§2 圆 周 角	(258)
§3 相似三角形与位似	(260)
§4 根据不同的元素作三角形	(261)
§5 根据不同的点作三角形	(264)
§6 三 角 形	(266)
§7 四 边 形	(269)
§8 圆	(272)
§9 阿波罗尼圆	(275)
§10 各种问题	(276)

§ 11	非常规的问题	(277)
§ 12	一把直尺的作图	(279)
§ 13	借助双侧直尺的作图	(282)
§ 14	借助直角的作图	(283)
§ 15	供独立解答的问题	(285)
第 9 章	几何不等式	(286)
§ 1	三角形的中线	(287)
§ 2	在三角形不等式中的代数问题	(288)
§ 3	四边形对角线长的和	(291)
§ 4	三角形不等式的各种问题	(294)
§ 5	三角形的面积不超过两边乘积的一半	(297)
§ 6	关于面积的不等式	(299)
§ 7	面积, 一个图形在另一个图形的内部	(305)
§ 8	正方形内的折线	(312)
§ 9	四 边 形	(314)
§ 10	多 边 形	(317)
§ 11	各种问题	(324)
§ 12	供独立解答的问题	(327)
§ 13	某些不等式	(328)
第 10 章	三角形元素的不等式	(330)
§ 1	中 线	(330)
§ 2	高 线	(332)
§ 3	角平分线	(334)
§ 4	边 长	(336)
§ 5	外接圆、内切圆、旁切圆的半径	(337)
§ 6	对于三角形角的对称不等式	(341)
§ 7	对于三角形角的不等式	(344)
§ 8	对于三角形面积的不等式	(347)
§ 9	大角对大边	(350)
§ 10	三角形内部的线段小于最大边	(351)
§ 11	对于直角三角形的不等式	(353)
§ 12	对于锐角三角形的不等式	(355)
§ 13	在三角形中的不等式	(358)

§ 14 供独立解答的问题	(362)
第 11 章 最大与最小问题	(363)
§ 1 三角形	(363)
§ 2 三角形的极值点	(369)
§ 3 角	(373)
§ 4 四边形	(375)
§ 5 多边形	(377)
§ 6 各类杂题	(378)
§ 7 正多边形的极值性质	(381)
§ 8 供独立解答的问题	(383)
第 12 章 计算与度量的关系	(384)
§ 1 正弦定理	(384)
§ 2 余弦定理	(387)
§ 3 内切、外接和旁切圆及它们的半径	(389)
§ 4 边、高、角平分线的长	(394)
§ 5 三角形的角的正弦与余弦	(396)
§ 6 三角形的角的正切与余切	(399)
§ 7 角的计算	(401)
§ 8 圆	(404)
§ 9 各类问题	(408)
§ 10 坐标方法	(411)
§ 11 供独立解答的问题	(413)
第 13 章 向 量	(415)
§ 1 多边形的边向量	(416)
§ 2 数量积、对应	(419)
§ 3 不等式	(423)
§ 4 向量的和	(426)
§ 5 辅助射影	(429)
§ 6 均值方法	(431)
§ 7 伪数量积	(434)
§ 8 供独立解答的问题	(438)
第 14 章 质量中心	(439)
§ 1 质量中心的基本性质	(439)

§ 2	质量的归组定理	(440)
§ 3	惯性矩	(446)
§ 4	杂 题	(449)
§ 5	重心坐标	(451)
§ 6	三线性坐标	(457)
第 15 章	平 移	(463)
§ 1	平移帮助解题	(463)
§ 2	作图与点的轨迹	(466)
§ 3	供独立解答的问题	(470)
第 16 章	中心对称	(471)
§ 1	中心对称帮助解题	(472)
§ 2	中心对称的性质	(474)
§ 3	在作图问题中的中心对称	(476)
§ 4	供独立解答的问题	(478)
第 17 章	轴 对 称	(479)
§ 1	轴对称帮助解题	(479)
§ 2	作 图	(480)
§ 3	不等式与极值	(484)
§ 4	对称的合成	(485)
§ 5	轴对称的性质与对称轴	(488)
§ 6	沙里定理	(489)
§ 7	供独立解答的问题	(492)
第 18 章	旋 转	(493)
§ 1	旋 转 90°	(494)
§ 2	旋 转 60°	(496)
§ 3	旋转任意角	(501)
§ 4	旋转的合成	(505)
§ 5	供独立解答的问题	(508)
第 19 章	位似与旋转位似	(510)
§ 1	位似的多边形	(511)
§ 2	位似的圆	(513)
§ 3	作图和轨迹	(515)
§ 4	位似的合成	(516)

§ 5	旋转位似	(518)
§ 6	旋转位似中心	(522)
§ 7	旋转位似的合成	(524)
§ 8	三个图形的相似圆	(525)
§ 9	供独立解答的问题	(529)
第 20 章	极端性原理	(531)
§ 1	最小角或最大角	(531)
§ 2	最小或最大距离	(533)
§ 3	最小或最大面积	(535)
§ 4	最大的三角形	(536)
§ 5	凸包和支撑直线	(537)
§ 6	杂 题	(540)
第 21 章	狄利克雷原则	(543)
§ 1	有限个数的点, 直线及其他	(543)
§ 2	角度和长度	(547)
§ 3	面 积	(551)
第 22 章	凸与非凸的多边形	(556)
§ 1	凸多边形	(556)
§ 2	等周不等式	(562)
§ 3	施泰纳对称化	(567)
§ 4	闵可夫斯基和	(568)
§ 5	赫利定理	(570)
§ 6	非凸多边形	(572)
第 23 章	整除性、不变性、染色	(579)
§ 1	奇数与偶数	(579)
§ 2	整 除 性	(582)
§ 3	不 变 量	(583)
§ 4	在棋盘次序中辅助染色	(587)
§ 5	其他的辅助染色	(589)
§ 6	关于染色的问题	(593)
第 24 章	整数格点	(596)
§ 1	以格点为顶点的多边形	(596)
§ 2	皮卡公式	(598)

§ 3 杂 题	(600)
§ 4 围绕闵可夫斯基定理	(602)
第 25 章 分割、划分、覆盖	(606)
§ 1 等组成的图形	(606)
§ 2 分割为具有专门性质的部分	(609)
§ 3 分割所得到部分的性质	(613)
§ 4 分割为平行四边形	(615)
§ 5 用直线分割的平面	(617)
§ 6 分割的杂题	(621)
§ 7 划分图形为线段	(624)
§ 8 覆 盖	(625)
§ 9 铺设骨牌和方块	(628)
§ 10 在平面上图形的放置	(633)
第 26 章 点系与线段系、例与反例	(634)
§ 1 点 系	(634)
§ 2 线段、直线和圆系	(636)
§ 3 例与反例	(638)
第 27 章 归纳法与组合分析	(642)
§ 1 归 纳 法	(642)
§ 2 组合分析	(644)
第 28 章 反 演	(647)
§ 1 反演的性质	(648)
§ 2 圆的作图	(650)
§ 3 一支圆规的作图	(652)
§ 4 作反演	(654)
§ 5 共圆点与共点圆	(657)
§ 6 圆 链	(661)
第 29 章 仿射变换	(664)
§ 1 仿射变换	(664)
§ 2 借助仿射变换解题	(673)
§ 3 复 数	(676)
§ 4 施泰纳椭圆	(687)

第 30 章 射影变换	(689)
§ 1 直线的射影变换	(689)
§ 2 平面的射影变换	(693)
§ 3 变已知直线为无穷远	(700)
§ 4 射影变换的应用,保圆性	(704)
§ 5 直线的射影变换在证明问题中的应用	(707)
§ 6 直线的射影变换在作图问题中的应用	(708)
§ 7 借助一根直尺作图的不可能性	(711)
第 31 章 椭圆、抛物线、双曲线	(713)
§ 1 二次曲线的分类	(713)
§ 2 椭 圆	(715)
§ 3 抛 物 线	(724)
§ 4 双 曲 线	(727)
§ 5 圆锥曲线束	(730)
§ 6 作为点的轨迹的圆锥曲线	(734)
§ 7 有理参数化	(737)
§ 8 圆锥曲线,同三角形的联系	(739)
附 录	(744)
附录 1 三次方程与几何的联系	(744)
附录 2 正多边形对角线的交点	(746)
附录 3 三次曲线与三角形的联系	(749)
名 词 索 引	(756)
几何选择的课程计划	(769)

第1章 相似三角形

基础知识

1. 当且仅当下列等价条件中的一个成立, 就说 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A_1B_1C_1$ (记作 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$).

$$(1) AB : BC : CA = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1.$$

$$(2) \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}, \text{ 并且 } \angle ABC = \angle A_1B_1C_1.$$

$$(3) \angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \text{ 且 } \angle BAC = \angle B_1A_1C_1.$$

2. 如果平行的直线截顶点为 A 的角成 $\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle AB_2C_2$ (点 B_1 和 B_2 在角的一边上, C_1 和 C_2 在角的另一边上), 则这两个三角形相似, 并且 $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$.

3. 联结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线, 这个线段平行于三角形的第三边并且等于第三边长度的一半.

联结梯形两腰中点的线段叫做梯形的中位线, 这个线段平行于梯形的两底且等于两底长度和的一半.

4. 相似三角形面积之比等于相似系数的平方, 也就是对应边长之比的平方.

由公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$ 可以推出这个结果.

5. 在多边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 和 $B_1B_2 \cdots B_n$ 中, 如果 $A_1A_2 : A_2A_3 : \cdots : A_nA_1 = B_1B_2 : B_2B_3 : \cdots : B_nB_1$ 并且在顶点 $A_1, \cdots, A_n$ 处的角分别等于在顶点 $B_1, \cdots, B_n$ 处的角, 则多边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 和 $B_1B_2 \cdots B_n$ 叫做相似多边形.

相似多边形对应的对角线之比等于相似比. 对于圆外切相似多边形, 内切圆半径之比也等于相似比.

引导性问题

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中引高线 AA_1 和 BB_1 , 证明: $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. 在直角 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 是直角, 引高线 CH , 证明: $AC^2 = AB \cdot AH$ 且 $CH^2 = AH \cdot BH$.

3. 证明: 三角形的三条中线交于一点且这点分中线由顶点算起的比是 $2:1$.

4. 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上取点 A_1 , 使得 $\frac{BA_1}{A_1C} = 2$, 则线段 AA_1 分中线 CC_1 为怎样的比?

5. 在 $\triangle ABC$ 中内接正方形 $PQRS$, 使得顶点 P 和 Q 位于边 AB 和 AC 上, 而顶点 R 和 S 位于边 BC 上, 试用边 a 和高线 h_a 表示正方形的边长.

§ 1 夹在平行线之间的线段

1.1 梯形 $ABCD$ 的底 AD 和 BC 等于 a 和 b ($a > b$).

(1) 求两对角线截中位线所成线段之长.

(2) 线段 MN 的端点分两边 AB 和 CD 为 $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{p}{q}$, 求线段 MN 的长.

提示 (1) 设 P 和 Q 分别是边 AB 和 CD 的中点, K 和 L 是直线 PQ 同对角线 AC 与 BD 的交点, 则

$$PL = \frac{a}{2}, PK = \frac{b}{2}.$$

所以

$$KL = PL - PK = \frac{a-b}{2}$$

(2) 在边 AD 上取点 F , 使得 $BF \parallel CD$. 设 E 是线段 MN 与 BF 的交点, 则

$$MN = ME + EN = \frac{qAF}{p+q} + b = \frac{q(a-b) + (p+q)b}{p+q} = \frac{qa+pb}{p+q}$$

1.2 证明: 任意四边形四个边的中点恰是一个平行四边形的顶点.

对于怎样的四边形, 这个平行四边形是矩形? 对于怎样的四边形, 这个平行四边形是菱形? 对于怎样的四边形, 这个平行四边形是正方形?

提示 在四边形 $ABCD$ 中, 点 K, L, M, N 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点, 所以 $KL = MN = \frac{1}{2}AC$, 并且 $KL \parallel MN$, 即 $KLMN$ 是平行四边形, 显然, 如果对角线 AC 与 BD 垂直, 则 $KLMN$ 是矩形; 如果 $AC = BD$, 则 $KLMN$ 是菱形; 如果对角