

历年

李林 编著

# 考研数学 真题分类解析

(理工类)

14



大连理工大学出版社  
Dalian University of Technology Press

历年

李林 编著

# 考研数学 真题分类解析

(理工类)



大连理工大学出版社  
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题分类解析. 理工类/李林编著. 一大  
连:大连理工大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-5611-4958-4

I. 历… II. 李… III. 高等数学—研究生—入学考试—  
解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 116713 号

大连理工大学出版社出版

大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

---

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:16.75 字数:389千字  
2009年7月第1版 2009年7月第1次印刷

---

责任编辑:王 伟 曲宏宇 责任校对:王 辉

封面设计:季 强

---

ISBN 978-7-5611-4958-4

定价:30.00元

# 前 言

《历年考研数学真题分类解析》是为报考硕士研究生数学考试编写的辅导书。真题是由教育部考试中心组织命制的,具有权威性、科学性和规范性。在考研的所有练习题中,真题是最有价值的。全面透彻地研究历年的试题,是广大考生复习备考中必不可少的关键环节,有助于掌握考试动态,赢得高分。

按照现行考研数学大纲,考试分理工类(包括数学一、数学二)和经管类(数学三),《历年考研数学真题分类解析》分理工类和经管类,对1997—2009年真题进行分类解析,按照大纲的章节顺序编写:

(1)每题先指出“考点”,然后是“解析”,分析该题的思路与方法,最后进行“点评”,总结该题的关键所在以及一般性的结论。

(2)每题标明了年份与题别,如2009年数一·二(8)表示2009年数学一,第二大题的第8小题。

(3)考研大纲在2008年进行了修订,将原来的数学三、数学四合并为数学三。有些真题也会出现不严谨的情况,在“点评”中做出了说明,以帮助考生全面了解真题。

本书是考研数学系列丛书之一,已出版的《大学数学辅导》为考研第一阶段复习用书,可使考生全面、系统地掌握大纲所要求的基本概念、基本定理、基本方法。《历年考研数学真题分类解析》和《考研数学冲刺》为考生第二阶段训练用书,用以检查第一阶段的复习效果,提高应试水平。

在丛书的编写过程中,得到了大连理工大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,不当和疏漏之处在所难免,望广大专家和读者批评指正。

编著者

2009年7月

# 目 录

## 高等数学

第 1 章	函数、极限与连续性 .....	1
第 2 章	一元函数微分学 .....	19
第 3 章	一元函数积分学 .....	52
第 4 章	向量代数与空间解析几何 .....	89
第 5 章	多元函数微分学 .....	91
第 6 章	多元函数积分学 .....	107
第 7 章	无穷级数 .....	135
第 8 章	常微分方程 .....	148

## 线性代数

第 1 章	行列式 .....	171
第 2 章	矩 阵 .....	174
第 3 章	向 量 .....	185
第 4 章	线性方程组 .....	194
第 5 章	特征值、特征向量 .....	205
第 6 章	二次型 .....	219

## 概率论与数理统计

第 1 章	随机事件及其概率 .....	225
第 2 章	随机变量及其分布 .....	229
第 3 章	多维随机变量及其分布 .....	231
第 4 章	随机变量的数字特征 .....	241
第 5 章	大数定律和中心极限定理 .....	250
第 6 章	数理统计的基本概念 .....	251
第 7 章	参数估计 .....	253
第 8 章	假设检验 .....	262



# 高等数学

## 第 1 章 函数、极限与连续性

### 一、选择题

1. (2009 数一、数二·一(1)) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  是等价无穷小, 则( )。

A.  $a=1, b=-\frac{1}{6}$

B.  $a=1, b=\frac{1}{6}$

C.  $a=-1, b=-\frac{1}{6}$

D.  $a=-1, b=\frac{1}{6}$

考点 无穷小的比较。

解析 依题意

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 (-bx)} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} = \frac{-a^3}{6b} = 1 \end{aligned}$$

故

$$a^3 = -6b$$

又由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$  存在, 所以  $1 - a \cos ax \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$ , 故  $a=1, b=-\frac{1}{6}$ 。A 正确。

点评 已知  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小, 确定参数  $a$  与  $b$  的值是常考题型。但此题需由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$  的存在性得到  $a=1$ 。

2. (2007 数一、数二·一(1)) 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  是等价无穷小量的是( )。

A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$

B.  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

C.  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$

D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

考点 等价无穷小。

解析 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $1 - e^{\sqrt{x}} \sim (-\sqrt{x})$ ,  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ ,  $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ,  $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$ 。B 正确。

3. (2004 数一、数二·二(7)) 把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小量  $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$ ,  $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$ ,  $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$  排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

( )。

A.  $\alpha, \beta, \gamma$

B.  $\alpha, \gamma, \beta$

C.  $\beta, \alpha, \gamma$

D.  $\beta, \gamma, \alpha$

考点 无穷小的比较,洛比达法则,积分变限函数求导。

解析  $\alpha, \beta, \gamma$  直接比较很麻烦,考虑以  $x^k$  来比较。

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}}$$

欲使上式极限存在且不为 0,应有  $k=1$ ,即  $\alpha$  与  $x$  是同阶无穷小。

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{x^k} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan x}{kx^{k-2}}$$

欲使上式极限存在且不为 0,应有  $k=3$ ,即  $\beta$  与  $x^3$  同阶无穷小。

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{x^k} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\frac{1}{2}} \sin x^{\frac{3}{2}}}{2kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2kx^{k-1}}$$

欲使上式极限存在且不为 0,应有  $k=2$ ,即  $\gamma$  与  $x^2$  是同阶无穷小。故排列次序是  $\alpha, \gamma, \beta$ 。B 正确。

点评 此解法通过确定  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $x^k$  的同阶无穷小,从而得到排列顺序。

4. (2003 数一、数二·二(2)) 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列,且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则必有( )。

A.  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立

B.  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立

C.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n$  不存在

D.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n$  不存在

考点 数列极限定义,极限运算性质。

解析 讨论抽象数列极限与性质,可采用排除法(即举反例)或利用定义和性质推理。

对于 A,取  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{n-1}{n}$ ,显然  $a_1 = 1, b_1 = 0, a_1 > b_1$ ,并不是对一切  $n$  有  $a_n < b_n$ ,故 A 不正确;对于 B,取  $b_n = \frac{n-1}{n}, c_n = n-2$ ,有  $b_1 = 0 > c_1 = -1$ ,故 B 不正确;对于 C,取  $a_n = \frac{1}{n}, c_n = n-2$ ,有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot c_n = 1$ ,故 C 不正确,只有 D 正确。

点评 由已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ ,若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = a$ ,则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n \cdot c_n}{b_n} = \frac{a}{1} = a$  与  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$  矛盾,故  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n$  不存在。

5. (2008 数二·一(4)) 设函数  $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$ , 则  $f(x)$  有( )。

A. 一个可去间断点,一个跳跃间断点

B. 一个可去间断点,一个无穷间断点

C. 两个跳跃间断点

D. 两个无穷跳跃间断点

考点 函数间断点。

解析 由已知,  $x=0, x=1$  为  $f(x)$  的间断点

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \cdot \sin x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x) \sin x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1} = \sin 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \cdot \sin x = -\sin 1$$

故  $x=0$  是可去间断点,  $x=1$  是跳跃间断点, A 正确.

6. (2007 数二·一(5)) 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$  渐近线的条数为( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

考点 曲线的渐近线.

解析 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right] = \infty$$

知  $x=0$  是垂直渐近线.

由

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x} + \ln(1+e^x) \right] = 0$$

知  $y=0$  是水平渐近线.

由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^x)}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} + \ln(1+e^x) - x \right] = 0$$

知  $y=x$  为斜渐近线, 故 D 正确.

7. (2007 数二·一(2)) 函数  $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的第一类间断点是  $x = ( )$ .

A. 0

B. 1

C.  $-\frac{\pi}{2}$

D.  $\frac{\pi}{2}$

考点 函数间断点.

解析 由已知,  $x=0$  是  $f(x)$  的间断点. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = 1 \times 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = 1 \times (-1) = -1$$



知  $x=0$  为  $f(x)$  的第一类间断点, 故 A 正确。

8. (2005 数二·二(12)) 设函数  $f(x) = \frac{1}{e^{x-1}-1}$ , 则( )。

- A.  $x=0, x=1$  都是  $f(x)$  的第一类间断点  
 B.  $x=0, x=1$  都是  $f(x)$  的第二类间断点  
 C.  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类间断点,  $x=1$  是  $f(x)$  的第二类间断点  
 D.  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点,  $x=1$  是  $f(x)$  的第一类间断点

考点 求函数的间断点并判别其类型。

解析 依题设,  $x=1, x=0$  为  $f(x)$  的间断点。又  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ , 知  $x=1$  是  $f(x)$  的第一类间断点。 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ , 知  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点, 故 D 正确。

点评 判别函数的间断点是常考内容。

9. (2002 数二·二(3)) 设  $y=y(x)$  是二阶常系数微分方程  $y''+py'+qy=e^{3x}$  满足初始条件  $y(0)=y'(0)=0$  的特解, 则当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$  的极限( )。

- A. 不存在                  B. 等于 1                  C. 等于 2                  D. 等于 3

考点 洛比达法则。

解析 由已知,  $y(x)$  是方程满足  $y(0)=y'(0)=0$  的特解。故

$$y''(0) = e^{3x} \Big|_{x=0} + py'(0) + qy(0) = 1$$

且  $y''(x)$  在  $x=0$  处连续, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

故 C 正确。

点评 此题也可利用泰勒公式将  $y(x)$  表示出来。

由  $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=1$ , 有

$$y(x) = 0 + 0 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = 2$$

10. (2001 数二·二(2)) 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$  是比  $x\sin x^n$  高阶的无穷小,  $x\sin x^n$  是比  $e^{x^2}-1$  高阶的无穷小, 则正整数  $n$  等于( )。

- A. 1                          B. 2                          C. 3                          D. 4

考点 无穷小的比较。

解析 由已知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1} = 0$$

又当  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\ln(1+x^2) \sim x^2$ ,  $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ ,  $\sin x^n \sim x^n$ , 于是两个极限分别可写为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2 \cdot x^{n+1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1}}{x^2} = 0$$

故  $n+1 < 4$  且  $n+1 > 2$ , 即  $n=2$ , B 正确.

点评 考生应熟悉常用的等价无穷小.

11. (2001 数二·二(1)) 设  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $f[f(x)]$  等于( ).

A. 0

B. 1

C.  $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$

考点 复合函数.

解析 用代入法.  $f[f(x)] = \begin{cases} 1 & |f(x)| \leq 1 \\ 0 & |f(x)| > 1 \end{cases}$ , 由已知  $|f(x)| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty)$ ,

故  $f[f(x)] = 1$ . B 正确.

点评 此题属于基本题.

12. (2000 数二·二(4)) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$  为( ).

A. 0

B. 6

C. 36

D.  $\infty$

考点 函数极限, 极限与无穷小的关系.

解析  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + \sin 6x + xf(x)}{x^3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6\cos 6x}{3x^2} + 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = 36$

故 C 正确.

点评 本题的解法用到恒等变形, 也可由极限与无穷小的关系:

$$\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \alpha \quad (\alpha \rightarrow 0, \text{当 } x \rightarrow 0)$$

从而

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 - \sin 6x}{x}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + \frac{\alpha x^3 - \sin 6x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \alpha x^3 - \sin 6x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 36 \end{aligned}$$

13. (2000 数二 · 二(1)) 设函数  $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , 则常数  $a, b$  满足( )。

- A.  $a < 0, b < 0$       B.  $a > 0, b > 0$   
 C.  $a \leq 0, b > 0$       D.  $a \geq 0, b < 0$

考点 已知极限, 确定参数。

解析 由已知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 当  $a < 0, b \neq 0$  时,  $f(x)$  有间断点  $x = \frac{1}{b} \ln(-a)$ , 故排除 A。

当  $a \neq -1, b = 0$  时, 由  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a+1} = \infty$ , 与已知矛盾。

当  $a = -1, b = 0$  时,  $f(x)$  无定义, 由此可知  $b \neq 0$ ,

当  $b < 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a + e^{bx}} = 0$ 。

综上所述知,  $a \geq 0, b < 0$ , 故 D 正确。

点评 此题应用了排除法。

14. (1999 数二 · 二(4)) “对任意给定的  $\epsilon \in (0, 1)$ , 总存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时, 恒有  $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ”是数列  $\{x_n\}$  收敛的( )。

- A. 充分条件但非必要条件      B. 必要条件但非充分条件  
 C. 充分必要条件      D. 既非充分条件又非必要条件

考点 数列极限的定义。

解析 将已知条件与  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  的定义对照。

事实上, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 则对任意给定的  $\epsilon \in (0, 1)$ , 记  $\epsilon_1 = \epsilon > 0$ , 存在正整数  $N_1$ , 记  $N = N_1 + 1$ , 当  $n \geq N = N_1 + 1 > N_1$  时, 有  $|x_n - a| < \epsilon_1 = \epsilon \leq 2\epsilon$ , 故必要性成立。

再证充分性。对任意给定的  $\epsilon_1 > 0$ , 令  $0 < \epsilon < \min\left\{1, \frac{\epsilon_1}{2}\right\}$ , 存在正整数  $N$ , 取  $N_1 = N$ , 当  $n > N = N_1$  时, 有  $|x_n - a| \leq 2\epsilon \leq \epsilon_1$ , 即充分性得证。故 C 正确。

点评 本题的关键是理解定义中  $\epsilon_1 > 0$  的任意性与  $N_1$  的存在性。

15. (1999 数二 · 二(2)) 设  $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{7}} dt$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的( )。

- A. 高阶无穷小      B. 低阶无穷小  
 C. 同阶但不等价的无穷小      D. 等价无穷小

考点 无穷小的比较, 重要极限。

解析 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{7}} dt} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{7}} \cdot \cos x} = \frac{5}{e}$$

知 C 正确。

点评 本题涉及无穷小的比较,积分上限函数求导,洛比达法则,重要极限多个知识点。

16. (1998 数二·二(1)) 设数列  $x_n$  与  $y_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 则下列断言正确的是 ( )。

- A. 若  $x_n$  发散, 则  $y_n$  必发散  
 B. 若  $x_n$  无界, 则  $y_n$  必有界  
 C. 若  $x_n$  有界, 则  $y_n$  必为无穷小  
 D. 若  $\frac{1}{x_n}$  为无穷小, 则  $y_n$  必为无穷小

考点 极限运算, 数列的极限。

解析 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \cdot \frac{1}{x_n} = 0 \cdot 0 = 0$$

知 D 正确。

点评 (1) 由  $\frac{1}{x_n}$  为无穷小知,  $x_n \neq 0$ 。

(2) 本题也可举反例进行排除:

A 的反例:  $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0$ , 但  $y_n$  不发散。

B 的反例:  $x_n$  取  $0, 1, 0, 2, \dots, 0, n, \dots$

$y_n$  取  $1, 0, 2, 0, \dots, n, 0, \dots$

则  $x_n y_n = 0$ 。故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 但  $x_n$  与  $y_n$  均无界。

C 的反例:  $x_n$  取  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$   $y_n$  取  $1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ , 但  $y_n$  不是无穷小。

故只有 D 正确。

17. (1997 数二·二(5)) 设  $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $g[f(x)]$

为 ( )。

A.  $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$

考点 复合函数。

解析 采用举例排除法。当  $x=1$  时,  $f(1)=-1, g[f(1)]=2-(-1)=3$ 。故排除 A 和 C。当  $x=-1$  时,  $f(-1)=1, g[f(-1)]=3$ , 排除 B。故 D 正确。

点评 这类选择题常采用举例排除法。

18. (1997 数二·二(1)) 设  $x \rightarrow 0$  时,  $e^{\tan x} - e^x$  与  $x^n$  是同阶无穷小, 则  $n$  为 ( )。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

考点 无穷小的比较。

解析

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\tan x - x} - 1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{nx^{n-1}} \end{aligned}$$

故当  $n-1=2$  时, 上述极限为  $\frac{1}{n}$ . 从而 C 正确.

点评 此题属于基本题.

## 二、填空题

1. (2006 数一·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

考点  $\frac{0}{0}$  型极限的计算.

解析 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\frac{1}{2}x^2} = 2$ .

点评 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ .

2. (2006 数二·一(1)) 曲线  $y = \frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$  的水平渐近线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

考点 求水平渐近线.

解析  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4\sin x}{x}}{5 - \frac{2\cos x}{x}} = \frac{1}{5}$

故水平渐近线方程为  $y = \frac{1}{5}$ .

3. (2005 数二·一(2)) 曲线  $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$  的斜渐近线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

考点 斜渐近线方程.

解析  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}[(1+x^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1]}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{3}{2}x^{-1} = \frac{3}{2}$$

故斜渐近线方程为

$$y = x + \frac{3}{2}$$

点评 这里利用了  $(1+x^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1 \sim \frac{3}{2}x^{-1} \quad (x \rightarrow +\infty)$

4. (2003 数一·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

考点  $1^\infty$  型极限.

解析

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\ln(1+x^2)} \cdot \ln \cos x}$$

而

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x^2)} \cdot \ln(\cos x - 1 + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = e^{-\frac{1}{2}}$$

点评 利用  $u^v = e^{v \ln u}$ , 求  $1^\infty$  型极限是常用方法。

5. (2000 数二·一(4)) 曲线  $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_。

考点 斜渐近线方程。

解析

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x]$$

$$\stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} (2e^t - 2 - e^t) = 2 - 1 = 1$$

当  $x \rightarrow -\infty$  时, 有同样结果。故曲线的斜渐近线方程为  $y = 2x + 1$ 。

6. (1999 数一·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

考点  $\infty - \infty$  型极限。

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

点评  $\infty - \infty$  型极限一般先通分或提取公因式, 化为  $\frac{0}{0}$  型或  $\infty \cdot 0$  型。

7. (1998 数一、数二·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

考点  $\frac{0}{0}$  型极限。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{4x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

点评 此题也可用泰勒公式。



故

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

8. (1998 数二·一(5)) 曲线  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$  ( $x > 0$ ) 的渐近线方程为\_\_\_\_\_。

考点 渐近线方程。

解析 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = +\infty$  知, 曲线没有水平渐近线。又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1 \right]$$

$$\stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{t} = \frac{1}{e}$$

故斜渐近线方程为

$$y = x + \frac{1}{e}$$

点评 由已知  $x > 0$ , 所以只计算  $x \rightarrow +\infty$  时的极限。

9. (1997 数一·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} =$ \_\_\_\_\_。

考点  $\frac{0}{0}$  型极限。

解析 直接用洛比达法则, 求导不方便, 先用等价无穷小替换化简。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{(1 + \cos x) \cdot x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos \frac{1}{x}}{1 + \cos x} \\ &= \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

点评 此题也可直接用等价无穷小替换:

$$3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x} \sim 3x$$

$$(1 + \cos x) \ln(1+x) \sim 2x \quad (x \rightarrow 0)$$

则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

10. (2006 数二·一(2)) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则

$a =$  \_\_\_\_\_.

考点 积分变限函数的极限, 连续性.

解析 由  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} = a$  知,  $a = \frac{1}{3}$ .

11. (2005 数二·一(5)) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x) = kx^2$  与  $\beta(x) = \sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$  是等价无穷小, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

考点 由等价无穷小确定表达式中的参数.

解析 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+x\arcsin x} - 1}{kx^2} - \frac{\sqrt{1+\cos x} - 1}{kx^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\arcsin x} - 1}{kx^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\cos x} - 1}{kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos x - 1)}{kx^2} \\ &= \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} = \frac{3}{4k} = 1 \end{aligned}$$

得  $k = \frac{3}{4}$ .

点评 此题为利用等价无穷小替换, 先作恒等变形.

12. (2004 数二·一(1)) 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$ , 则  $f(x)$  的间断点为  $x =$  \_\_\_\_\_.

考点 求函数的间断点.

解析 当  $x=0$  时,  $f(0)=0$ . 当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{n(x^2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{x}$ , 故  $x=0$  是

$f(x)$  的间断点.

点评 求由极限表示的函数的间断点, 是常考题型.

13. (2003 数二·一(1)) 若  $x \rightarrow 0$  时,  $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$  与  $x \sin x$  是等价无穷小, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

考点 等价无穷小.

解析 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2} = -\frac{a}{4} = 1$ , 得  $a = -4$ .

14. (2002 数二·一(1)) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} & x > 0 \\ ae^{2x} & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

考点 连续性。

解析  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{2x} = a, \quad f(0) = a$$

由  $f(x)$  在  $x=0$  处连续  $\Leftrightarrow f(0+) = f(0-) = f(0)$ , 得  $a = -2$ 。

点评 已知连续性、确定参数是常考题型。

15. (2001 数二·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} =$  \_\_\_\_\_。

考点 函数极限。

解析 原式  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}{(x^2 + x - 2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

点评 此题属于基本计算题。

16. (2000 数二·一(1))  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$  \_\_\_\_\_。

考点 函数极限。

解析  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6}$$

点评 此题属于基本计算题。

17. (1997 数二·一(1)) 已知  $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x-2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

考点 函数极限。

解析  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x-2 \ln \cos x}$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \ln(1 + \cos x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \cdot (\cos x - 1) = -\frac{1}{2}$$

故