教育部中小学全效学习方案研究与实验项目

教育部新课程国家级课题成果

新课标全程学案

高中数学

选修2-2

配套人民教育出版社实验教科书

B版

丛书主编◎杨光宇

灵活运用思维方法

全面提高数学素养

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

教育部中小学全效学习方案研究与实验项目

教育部新课程国家级课题成果

新课标全程学案

高中数学

（选修 2-2）

丛书主编　杨光宇

本书编写者　杨光宇　孙　彬

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新课标全程学案.高中数学.选修 2-2/杨光宇主编. —北京：北京大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-301-13889-2

Ⅰ.新… Ⅱ.杨… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 076325 号

书　　　名：新课标全程学案·高中数学(选修 2-2)
著作责任者：杨光宇　主编
责 任 编 辑：刘　维　刘春香
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-13889-2/G·2384
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　电子信箱：zyl@pup.pku.edu.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767346　出版部 62754962
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
经　销　者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　11.5 印张　170 千字
2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
定　　　价：20.00 元

出版说明

《新课标全程学案·高中数学》丛书是全国数学名师杨光宇在其独创的“学案教学法”基础上编写的一套教案与学案相统一的教学用书。

本丛书以数学课程标准为总纲，以人教社数学教材（B版）为主线，以学生认知水平为标准，结合了多年教学积累的优秀而独特的解题方法，汲取了近几年的全国高考试题以及模拟试题的精华。学案既有条理清晰的知识点总结，经典的例题素材，又有精心挑选的习题；源于教材，又高于教材，从中既能找到课本的影子，又跳出了书本并开阔了学生的视野，使其具有丰富的数学综合能力。学案极具系统性和全面性，是学生同步学习和综合复习的必备资料。

本丛书的特点如下：

深厚的理论背景

本丛书独创的“学案教学法”是在“全效学习”理论的基础上提出的，“全效学习”理论是众多国内著名教育专家历时数年潜心研究的创新性成果，该理论从教学论的视角，探索了如何在不同的教学背景下，引导不同学习条件下的、不同学习风格的中小学生建构起适合自己的全面的学习方案。

雄厚的项目依托

“学案教学法”被教育部“十一五”项目办确立为首批实验课题，其母课题“中小学全效学习方案研究与实验”项目是国家教育部“十一五”专项任务项目。该项目是经教育部批准立项的国家级项目，凝聚了众多教育领域的专家学者，旨在进一步探索建构面向全体学生的、全面有效的学习方案，综合应用学习理论，指导中小学生的学习，提高中小学生的学习效率的有效途径。

坚实的实践基础

本丛书在编写之初，各位编者曾进行了广泛的学习现状调查，并组织了大范围的教学实验，根据实验结果形成本学习方案，然后再由众多名师讨论研究，并进一步修正、细化、完善，最终才完成本丛书的编写，所以具有超强的实践效果。

本丛书具有许多新颖之处：

新理论 “学案教学法”“全效学习”理论。

新视角 教学论的视角。

新模式 理论——实践——完善理论——再实践，由师生共同参与编写。

新体例 集教案、笔记、作业、练习于一体，一案一批，一案一评，一案一导。

希望广大师生在本书的指导下，取得学习上的新效果、好成绩！

编　者

目　录

第一章　导数及其应用

1.1　导　　数

一　课标导引与三维定向

◆ 教学目标

➢ 知识与技能：了解函数的平均变化率的概念、运动的瞬时速度以及导数的几何意义，会求曲线的切线方程.

➢ 过程与方法：经历由实例抽象出导数概念的过程，体会特殊到一般的思维方法，通过例题的学习，掌握用定义求导数的方法.

➢ 情感态度价值观：经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，感受导数在实际问题中的应用，初步认识导数的应用价值，树立学好数学的信心.

◆ 重点难点

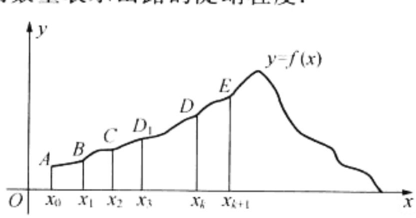
➢ 重点：导数的概念.

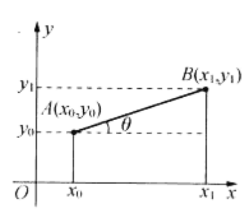
➢ 难点：导数的物理意义与几何意义.

二　课程实施与教学互动

● 函数的平均变化率：

引例 1　用数量表示山路的陡峭程度.





引例 1 题图(1)

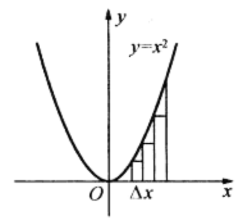
解： 若山路 AB 段是平直的. 设 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，记 $\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=y_1-y_0$，则$\overrightarrow{AB}=(x_1-x_0,y_1-y_0)=(\Delta x,\Delta y)$.

设$\overrightarrow{AB}$对 x 轴的倾斜角为 θ，直线 AB 的斜率为 k，则 $k=\tan\theta=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

即比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$反映了 AB 段山坡的陡峭程度.

同理 CD_1 段山坡的陡峭程度 $k=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

∵ 说明：AB 段与 CD_1 段的$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是不同的. 各段内的$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是登山高度在这段山路上的平均变化的度量. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$越大，山坡越陡，高度的平均变化量就越大.



引例 1 题图(2)

一般地，高度的平均变化可以用起点和终点的纵坐标之差与相应横坐标之差的比值来度量.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$.

也就是$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

例 1 设 $f(x)=x^2$，求在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的变化率.

解：当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为：

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$$

当 Δx 取定值，x_0 取不同的数值时，该函数的平均变化率也不一样. 如 x_0 取正值，并不断增大时，该函数的平均变化率也不断增大，曲线变得越来越“陡”.

● 瞬时速度与导数：

引例 2 瞬时速度

物体的运动规律是 $s=s(t)$.

如果一个运动物体在时刻 t_0 时位于 $s(t_0)$，在时刻 $t_0+\Delta t$ 时位于 $s(t_0+\Delta t)$，

那么从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时间内，物体的位移是 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$，这段时间内物体的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

于是可知，物体在时刻 t 的瞬时速度为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

例 2 火箭竖直向上发射，熄火时向上速度达到 100 m/s，试问熄火后多长时间火箭向上速度为 0？

解：火箭的运动方程为

$$h(t)=100t-\frac{1}{2}gt^2,$$

火箭向上位移是初速度引起的位移($100t$)与重力引起的位移$\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)$的合成.

在 t 附近的平均变化率为

$$\frac{\left[100(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left[100t-\frac{1}{2}gt^2\right]}{\Delta t}$$

$$=\frac{100\Delta t-gt\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$=100-gt-\frac{1}{2}g\Delta t$.

当 $\Delta t\to 0$ 时，上式趋近于 $100-gt$.

由 $100-gt=0$，解得 $t=\frac{100}{g}\approx\frac{100}{9.8}\approx 10.2(\mathrm{s})$，

即火箭熄火后约 10.2 s 向上速度变为 0.

● 曲线的切线：

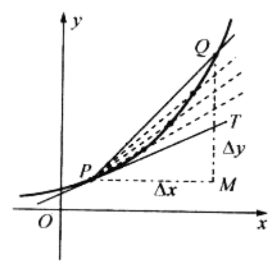
引例 3 设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，在曲线 C 上取一点 $P(x_0,y_0)$ 及邻近点 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，$PQ$ 为曲线 C 的割线.

于是可知，割线的斜率为

$$\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当点 Q 沿着曲线无限接近于点 P，即 $\Delta x\to 0$ 时，割线 PQ 的极限位置为切线 PT. 则切线的斜率为

$$k=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



引例 3 题图

● 导数的概念：

☞ 平均变化率：函数 $y=f(x)$，如果自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，那么函数 y 相应地有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率. 即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

☞ 导数：如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，我们就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并把这个极限叫做 $f(x)$ 在 x_0 处的导数(或变化率). 记作 $f'(x_0)$，或 $y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

✧ 概念解读：

○ 函数 $f(x)$ 在 x_0 要有定义；

○ 是 x_0 附近的任意一点，即 $\Delta x=x-x_0\neq 0$，但可正可负；Δy 可以为 0；

○ 改变量的对应：若 $\Delta x=x-x_0$，则 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，而不是 $\Delta y=f(x_0)-f(x)$.

○ 平均变化率可正可负也可为零.

○ 平均变化率的几何意义：表示曲线割线 AB 的斜率.

○ 求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数步骤：

求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

取极限. 当 Δx 趋近于 0 时，得导数 $f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

○ “函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数”、“导函数”、“导数”三者之间的区别与联系：

“函数在一点处的导数”，就是在该点处函数自变量的改变量趋近于零时，平均变化

率趋于一个固定值.它是一个数值,不是变数.

导函数简称导数,所以 $f(x)$ 在一点 x_0 处的导数与导数是个别与一般的关系.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数 $f(x_0)$ 就是导函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值.

例 3 求抛物线 $y=x^2$ 过点(1,1)切线的斜率.

解:过点(1,1)的切线的斜率是:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

所以抛物线在点(1,1)处切线斜率为 2.

另法:先求导函数,再求点 $x=1$ 处的导数即为点(1,1)处的切线的斜率.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

所以 $k = y'|_{x=1} = 2$.

例 4 求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 过点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 的切线的方程.

解:过点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 的切线的斜率是:

$$k=f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{2(2+\Delta x)}=-\frac{1}{4}.$$

所以这条双曲线过点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 的切线的方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$.

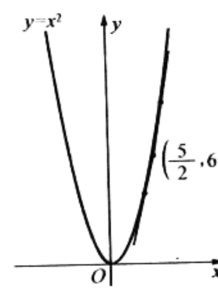
即 $y=-\frac{1}{4}x+1$,即 $x+4y-4=0$.

例 5 求抛物线 $y=x^2$ 过点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 的切线的方程.

解:设此切线过抛物线上的点 (x_0,x_0^2).

则由导数的几何意义知:

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$



例 5 题图

又切线过点 $\left(\frac{5}{2},6\right)$ 和点 (x_0,x_0^2),则由斜率公式得,

即 $x_0{}^2-5x_0+6 = 0$.

解得 $x_0=2$ 或 $x_0=3$.

即切线过抛物线上的点(2,4),(3,9).

所以切线方程分别为 $y-4=4(x-2)$,$y-9=6(x-3)$,

化简得,$y=4x-4$,$y=6x-9$.

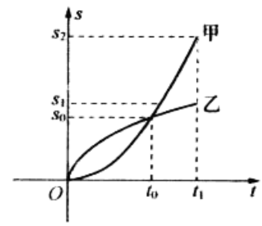
∵ 说明:求曲线切线方程的步骤:

先判断所给点是否在曲线上,若在,用定义求函数导数,得出斜率;

若不在,可设出切点坐标,写出切线方程,由题意求出切点坐标,再得方程.

三 基础训练与自主探究

1. 如图所示，物体甲、乙在时间 0 到 t_1 范围内路程的变化情况，下列说法正确的是 ( )



第 1 题图

A. 在 0 到 t_0 范围内甲的平均速度大于乙的平均速度

B. 在 0 到 t_0 范围内甲的平均速度小于乙的平均速度

C. 在 t_0 到 t_1 范围内甲的平均速度大于乙的平均速度

D. 在 t_0 到 t_1 范围内甲的平均速度小于乙的平均速度

2. 下列说法正确的是 ( )

A. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处没有切线

B. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，则 $f'(x_0)$ 必存在

C. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线斜率不存在

D. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处没有切线，则 $f'(x_0)$ 可能存在

3. 在曲线 $y=x^2+1$ 的图象上取一点 $(1,2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,2+\Delta y)$，则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为 ( )

A. $\Delta x+\dfrac{1}{\Delta x}+2$ B. $\Delta x-\dfrac{1}{\Delta x}-2$ C. $\Delta x+2$ D. $2+\Delta x-\dfrac{1}{\Delta x}$

4. 设函数 $f(x)$ 可导，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于 ( )

A. $f'(1)$ B. $3f'(1)$ C. $\dfrac{1}{3}f'(1)$ D. $f'(3)$

5. 已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f(3)=2$，$f'(3)=-2$，则 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-3f(x)}{x-3}$ 的值是 ( )

A. 4 B. 6 C. 8 D. 不存在

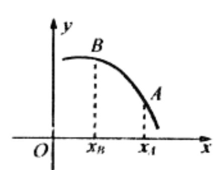
6. 函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的导数是 ( )

A. 2 B. $\dfrac{5}{2}$ C. 0 D. 不存在

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 等于 ( )

A. $-\dfrac{1}{a}$ B. $\dfrac{2}{a}$ C. $-\dfrac{1}{a^2}$ D. $\dfrac{1}{a^2}$

8. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图，则 $f'(x_A)$ 与 $f'(x_B)$ 的大小关系是 ( )



第 8 题图

A. $f'(x_A)>f'(x_B)$ B. $f'(x_A)<f'(x_B)$

C. $f'(x_A)=f'(x_B)$ D. 不能确定

9. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-2x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 ( )

A. 2　　B. -1　　C. 1　　D. -2

10. 曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(-1,3)$ 处的切线方程为(　)

A. $y=-4x+1$　　B. $y=-4x-7$　　C. $y=4x-1$　　D. $y=4x+7$

11. 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导,且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$,则 $f'(x_0)$ 等于　(　　)

A. 1　　B. 0　　C. 3　　D. $\dfrac{1}{3}$

12. 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导,且 $x_0\in(a,b)$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 的值为　(　　)

A. $f'(x_0)$　　B. $-2f'(x_0)$　　C. $2f'(x_0)$　　D. 0

13. 运动按照 $s(t)=3t^2+t+4$ 的规律作直线运动,求在 $4s$ 附近平均变化率为__________.

14. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 11,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$__________.

15. 已知函数 $f(x)=ax+4$,若 $f'(1)=2$,则 a 等于__________.

16. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$__________.

17. 已知曲线 $y=\sqrt{2x^2+2}$ 上一点 $P(1,2)$,用导数定义求过点 P 的切线的倾斜角和切线方程.

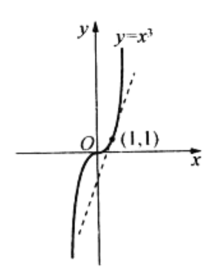
18. 质点 M 按规律 $s(t)=at^2+1$ 作直线运动(位移单位:m,时间单位:s).若质点 M 在 $t=2$ 时的瞬时速度为 8 m/s,求常数 a 的值.

四　能力提高与合作学习

19. 已知曲线 C: $y=x^3$.

(1) 求曲线 C 上横坐标为 1 的点处的切线方程;

(2) (1)问中的切线与曲线 C 是否还有其他公共点?



第 19 题图

20. 直线 l：$y=x+a(a\neq 0)$和曲线 C：$y=x^3-x^2+1$ 相切.
(1) 求切点的坐标；
(2) 求 a 的值.

21. 曲线 $y=x^2+1$ 上过点 P 的切线与曲线 $y=-2x^2-1$ 相切，求点 P 的坐标.

参考答案

三 基础训练与自主探究

1. C. **解析：** 在 0 到 t_0 范围内甲、乙的平均速度为$\bar{v}=\frac{s_0}{t_0}$，故 A、B 错；在 t_0 到 t_1 范围内甲的平均速度$\frac{s_2-s_0}{t_1-t_0}$，乙的平均速度为$\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$，显然$\frac{s_2-s_0}{t_1-t_0}>\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}$.

2. C.

3. C. **解析：** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(1+\Delta x)^2+1-(1^2+1)}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\Delta x+2$.

4. C. **解析：** 原式$=\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{1}{3}f'(1)$.

5. C. **解析：** 由已知$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=-2$

所以$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-3f(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x-6)-3[f(x)-2]}{x-3}=2-3\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=8$.

6. D. **解析：** $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$，

因为 $f(0)$不存在，所以 $f'(0)$不存在.

7. C. **解析：** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{a-x}{(x-a)\cdot xa}=-\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{ax}=-\frac{1}{a^2}$.

8. B. **解析：** $f'(x_A)$与 $f'(x_B)$分别表示函数图象在点 A，B 处的切线的斜率，所以 $f'(x_A)<f'(x_B)$.

9. B. **解析：** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-2x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-2x)-f(1)}{-2x}=-1$，即 $y'|_{x=1}=-1$.

10. A. **解析：** $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[2(-1+\Delta x)^2+1]-[2(-1)^2+1]}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-4+2\Delta x)=-4.$$

所以切线方程为 $y-3=-4(x+1)$，即 $y=-4x-1$.

11. D.　**解析**：由已知$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}$，所以 $f'(x_0)=\dfrac{1}{3}$.

12. C.　**解析**：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{-h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$.

13. $25+3\Delta t$.　**解析**：$\Delta s=s(4+\Delta t)-s(4)=3(4+\Delta t)^2+(4+\Delta t)+4-(3\times 4^2+4+4)=25\Delta t+3\Delta t^2$.

所以平均变化率为$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=25+3\Delta t$.

14. -11.　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)=-11$.

15. 2.　**解析**：$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=a(1+\Delta x)+4-(a+4)=a\Delta x$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a$，所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a$. 所以 $f'(1)=a=2$.

注：函数 $f(x)=ax+b$(a,b 为常数)的导数 $f'(x)=a$.

16. $-2f'(x_0)$.　**解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[-2\,\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}\right]$，

令 $\Delta h=-2\Delta x$，则$-2\lim\limits_{\Delta h\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta h)-f(x_0)}{\Delta h}=-2f'(x_0)$.

17. **解析**：$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt{2(1+\Delta x)^2+2}-2$，

所以 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{2(1+\Delta x)^2+2}-2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(1+\Delta x)^2-2}{\Delta x\left[\sqrt{2(1+\Delta x)^2+2}+2\right]}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4+2\Delta x}{\sqrt{2(1+\Delta x)^2+2}+2}=\dfrac{4}{\sqrt{2+2}+2}=1$.

所以 $\tan\alpha=1$，得 $\alpha=45°$. 即过点 P 的切线的倾斜角为 $45°$，切线方程为 $y-2=x-1$，即 $x-y+1=0$.

18. **解析**：因为 $\Delta s=s(2+\Delta t)-s(2)=a(2+\Delta t)^2+1-a\cdot 2^2-1=4a\Delta t+a(\Delta t)^2$，

所以$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=4a+a\Delta t$，

在 $t=2$ 时，瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=4a$，

即 $4a=8$，所以 $a=2$.

四 能力提高与合作学习

19. **解析**：(1) 先求切点，将 $x=1$ 代入曲线 C 的方程得 $y=1$，

所以切点坐标为 $(1,1)$.

$$\text{因为 } y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2,$$

所以 $k=y'|_{x=1}=3$.

所以过点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，

即 $3x-y-2=0$.

(2) 由 $\begin{cases}y=3(x-1)+1,\\ y=x^3,\end{cases}$ 得 $(x-1)(x^2+x-2)=0$，解得 $x_1=1,x_2=-2$.

所以公共点为 $(1,1)$ 和 $(-2,-8)$.

即切线与曲线 C 的公共点除了切点外，还有另外的点.

∵ 说明：圆的切线定义："与圆只有一个公共点的直线"，"唯一公共点叫切点"此定义仅限于圆、椭圆等一类曲线. 不能对任何曲线 C 都用"与 C 只有一个公共点"来定义切线.

本题中直线与 C 有两个公共点，但仍为切线.

切线与曲线的公共点除了切点处，还有可能有另外的点，即导数的概念告诉我们：直线与曲线相切不仅有一个公共点.

20. **解析**：(1) 设直线 l 与曲线相切于点 $P(x_0,y_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0{}^3-x_0{}^2+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0{}^2\Delta x-2x_0\Delta x+(3x_0-1)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0{}^2-2x_0+(3x_0-1)(\Delta x)+(\Delta x)^2]=3x_0{}^2-2x_0.$$

由题意知，$k=1$，即 $3x_0{}^2-2x_0=1$，解得 $x_0=-\frac{1}{3}$，或 $x_0=1$(舍. 此时 $a=0$).

于是切点坐标为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$.

(2) 当切点为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$ 时，有 $\frac{23}{27}=-\frac{1}{3}+a$，解得 $a=\frac{32}{27}$.

21. **解析**：设 $P(x_0,y_0)$，由题意知，过 P 点的切线斜率为

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0{}^2+1)}{\Delta x}=2x_0,$$

所以过 P 点的切线方程为 $y-y_0=2x_0(x-x_0)$，即 $y=2x_0x+1-x_0{}^2$，

而此直线与曲线 $y=-2x^2-1$ 相切，所以切线与曲线 $y=-2x^2-1$ 有一个交点.

由 $\begin{cases}y=2x_0x+1-x_0{}^2,\\ y=-2x^2-1,\end{cases}$ 得 $2x^2+2x_0x+2-x_0{}^2=0$.

即 $\Delta=4x_0{}^2-8(2-x_0{}^2)=0$，解得 $x_0=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y_0=\frac{7}{3}$.

所以 P 点坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{7}{3}\right)$ 或 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{7}{3}\right)$.

1.2 导数的运算

一 课标导引与三维定向

◆ 教学目标

➢ 知识与技能：掌握基本初等函数的导数公式；会用导数的四则运算法则求简单函数的导数；能求简单复合函数的导数.

➢ 过程与方法：通过对导数的四则运算法则和复合函数求导的学习，灵活掌握运算法则.

➢ 情感态度价值观：通过对导数的深入学习，培养发现新事物的能力，体会数学的学科魅力，增强学习数学的兴趣.

◆ 重点难点

➢ 重点：导数公式、运算法则及复合函数的导数.

➢ 难点：复合函数的导数.

二 课程实施与教学互动

● 基本初等函数的导数公式：

$C'=0$（C 为常数）； $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

$(x^n)'=nx^{n-1}(n\in\mathbf{Q})$； $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；

$(\sin x)'=\cos x$； $(e^x)'=e^x$；

$(\cos x)'=-\sin x$； $(a^x)'=a^x\ln a$.

例 1 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$；(2) $y=\sqrt{x}$；(3) $y=x^{\frac{4}{3}}$.

解：(1) $y'=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$；

(2) $y'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$；

(3) $y'=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

例 2 求下列函数的导数：

(1) $x=\sin t$；(2) $u=\cos\varphi$；(3) $y=2^x$；(4) $y=\log_2 x$.

解：(1) $x'=\cos t$；

(2) $u'=-\sin\varphi$；

(3) $y'=2^x\ln 2$；

(4) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$.

● 导数的四则运算法则：

$(u\pm v)'=u'\pm v'$；$(uv)'=u'v+uv'$；$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

例 3　求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2+3)(3x-2)$；(2) $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$.

解：(1) $y'=18x^2-8x+9$；

(2) $y'=\dfrac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2 x}$.

例 4　求 $y=\dfrac{x+3}{x^2+3}$在点 $x=3$ 处的导数.

解：$y'=\dfrac{-x^2-6x+3}{(x^2+3)^2}$. 所以$y'|_{x=3}=-\dfrac{1}{6}$.

● 复合函数的导数：

$y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

例 5　求下列函数的导数：

(1) $y=(3x-2)^2$；(2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x}{1-x}}$.

解：(1) $y'=2(3x-2)\cdot(3x-2)'=2(3x-2)\cdot 3=18x-12$；

(2) $y'=\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}(1-x)^{-\frac{6}{5}}$.

三　基础训练与自主探究

1. 下列结论不正确的是　(　　)

A. 若 $y=0$，则 $y'=0$　　B. 若 $y=5x$，则 $y'=5$

C. 若 $y=x^{-1}$，则 $y'=-x^{-2}$　　D. 若 $y=x^{\frac{1}{2}}$，则 $y'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

2. 下列结论：

① 若 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则 $y'\Big|_{x=2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

② 若 $y=\cos x$，则$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1$.

③ 若 $y=e^x$，则 $y'=e^x$.

其中正确的个数是　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 若函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(1)$等于　(　　)

A. 0　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

4. 函数 $y=x^{-\frac{2}{5}}$的导数为　(　　)

A. $\dfrac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$　　B. $-\dfrac{7}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

C. $-\frac{2}{5}x^{\frac{7}{5}}$ D. $-\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$的导数是 ( )

A. $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ B. $-\frac{1}{x}$

C. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ D. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6. 函数 $y=\log_3 x$ 的导数是 ( )

A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x\ln 3}$

C. $\frac{1}{x\log_3 e}$ D. $\frac{\ln 3}{x}$

7. 函数 $y=e^{-x}$的导数是 ( )

A. e^x B. e^{-x} C. $-e^x$ D. $-e^{-x}$

8. $y=\frac{\cos x}{x}$的导数是 ( )

A. $-\frac{\sin x}{x^2}$ B. $-\sin x$

C. $-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ D. $-\frac{x\cos x+\cos x}{x^2}$

9. 函数 $y=x(x^2+1)$的导数是 ( )

A. x^2+1 B. $3x^2$ C. $3x^2+1$ D. $3x^2+x$

10. 函数 $y=x^3\cos x$ 的导数是 ( )

A. $3x^2\cos x+x^3\sin x$ B. $3x^2\cos x-x^3\sin x$

C. $3x^2\cos x$ D. $-x^3\sin x$

11. 函数 $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 的导数是 ( )

A. $5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ B. $5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

C. $5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\left(1+\frac{1}{x}\right)$ D. $5\left(x+\frac{1}{x}\right)^4\left(x+\frac{1}{x}\right)$

12. 函数 $y=x^5a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$的导数是 ( )

A. $5x^4a^x\ln a$ B. $5x^4a^x+x^5a^x\ln a$

C. $5x^4a^x+x^5a^x$ D. $5x^4a^x+x^5a^x\log_a e$

13. 若 $y=x\sin x$,则 $y'=$__________.

14. 若 $y=x^7+x^6-3x^5$,则 $y'=$__________.

15. 若 $y=\ln(5x+4)$,则 $y'=$__________.

16. 若 $y=3^{2x-1}$,则 $y'=$__________.

17. 求下列函数的导数:

(1) $y=(3x^2+2)(x-5)$; (2) $y=(5x^3-7)(3x+8)$;