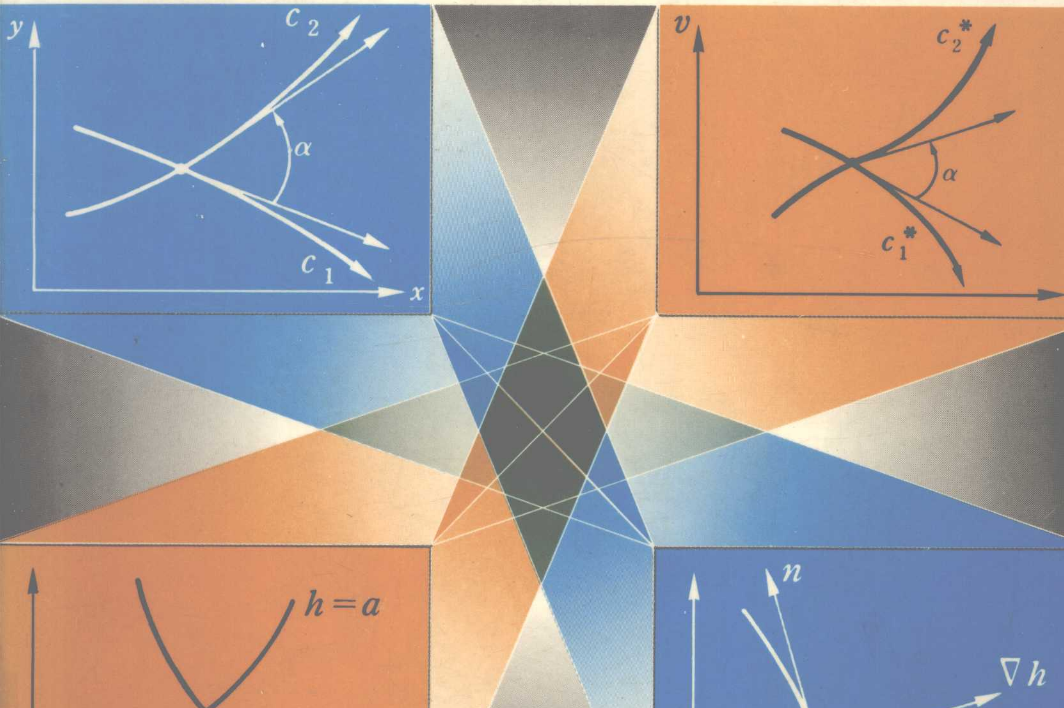
複變函數論

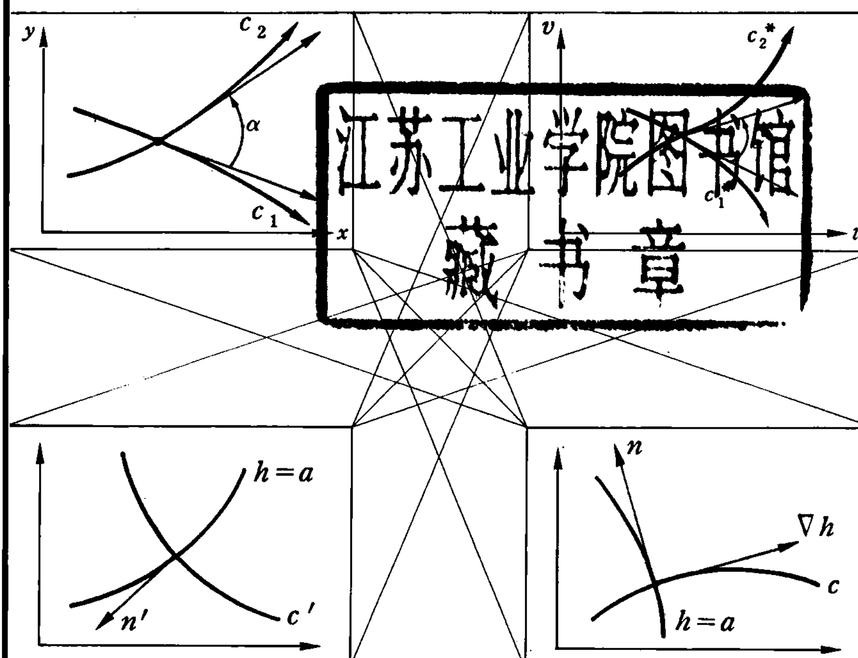
林昭仁　編著



全華科技圖書股份有限公司　印行

複變函數論

林昭仁　編著



全華科技圖書股份有限公司　印行

複變函數論

林昭仁 編著

出版者　全華科技圖書股份有限公司
北市龍江路76巷20-2號
電話: 581-1300・541-5342
581-1362・581-1347
郵撥帳號: 1 0 0 8 3 6
發行人　陳　本　源
印刷者　華一彩色印刷廠
定　價　新臺幣　180　元
初　版　中華民國73年7月

圖書編號　021665

謹以此書獻給——

我的家人與

錦霞

我們的宗旨：

推展科技新知・帶動工業升級

「圖書之可貴，在其量也在其質」，量指圖書內容充實，質指資料新穎夠水準，我們本著這個原則，竭心盡力地為國家科學中文化努力，貢獻給您這一本全是精華的“全華圖書”

為學校教科書推陳出新

感謝您選購全華圖書
希望本書能滿足您求知的慾望

為保護您的眼睛，本公司特別採用不反光的米色印書紙!!

序　　言

本書詳述複變函數的微分，積分與級數的有關理論及性質，保形映象（變換）及有關之應用，以及非基本函數的理論及性質等等，並收集台大、清大、交大、成大、中大各校的研究所考題且詳解之，俾對於有關複變數理論的研究與準備有所助益。

林 昭 仁　謹識

73年5月

目　錄

第一章　複變數函數

第二章　複變數函數之微分

第三章　複變數函數之積分

第七章 保形映像

1

複變數函數

很多工程上的問題可藉由複數分析的方法來解決，而複變數函數的理論又稱爲複數分析法，此理論根源於位能理論與流體力學，其在應用數學上常用來解電流，電磁學，熱傳導，流體力學與彈性力學等重要問題。

實數集合爲複數集合的子集合，所以複變函數的有關理論，施用於實數系統亦成立，此因複數的虛部爲零時即爲實數之緣故。吾人對於實變數的有關理論大多熟悉，而所對應的複變數函數的有關理論，也甚爲類似，所以可互相對照以增加明瞭的效率。

1-1 複變數

觀察一些方程式，諸如

$$x^2+3=0$$

$$x^2-10x+40=0$$

等，可知沒有任何實數能滿足這些或者類似的方程式，所以建立複數系統是需要的。複變數通常以 z 表示，且其形式如下：

$$z=x+iy$$

其中 i 表示虛數單位（imaginary unit），x 與 y 爲實變數且 x 叫做複變數 z 的實部（real part），y 叫做複變數 z 的虛部（imaginary part），通常記做

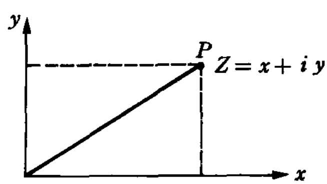
$$R_e(z)=x$$

$$I_m(z)=y$$

$$i=\sqrt{-1}$$

例如對於複數（$4-3i$），吾人可寫成 $R_e(4-3i)=4$，$I_m(4-3i)=-3$。

複數可表成平面上之點，因此我們選擇橫軸即 x 軸，縱軸即 y 軸兩軸長度單位相同來表示複變數 $z=x+iy$，如下圖所示。對於複變數 $z=x+iy$



有在 xy 座標系統的一點 p 與之對應，複變數 z 以此方式表示在 xy 一平面，此時稱此平面爲複數平面（complex plane），x 軸叫做實軸（real axis），y 軸叫做虛軸（imaginary axis）。

以下我們將定義複變數相等及數學運算的一些規則。

◎　相等（equal）

兩個複變數

$$z_1=x_1+iy_1$$

$$z_2=x_2+iy_2$$

若且唯若 z_1 與 z_2 相等，則它們的實部與虛部各自相等即

$$z_1=z_2 \qquad x_1=x_2 \text{ 且 } y_1=y_2$$

若 z_1 與 z_2 不相等，則寫成 $z_1 \neq z_2$。至於不等式如 $z_1<z_2$ 或 $z_1 \geqslant z_2$ 是無意義的 因爲它們不能比較大小，只有取絕對值（absolute value）時才有意義。

◎　相加（addition）

兩複變數 z_1 與 z_2 的和 z_1+z_2 是被定義為 z_1 與 z_2 實部與虛部各自相加，即

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) \\ &= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \end{aligned}$$

◎ 相減（subtraction）

此運算是由加法的反運算而得，z_1 與 z_2 的差是複變數 z 且 $z_1=z+z_2$ 而來。故

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

◎ 相乘（multiplication）

兩複變數 z_1 與 z_2 相乘 z_1z_2 是由實變數的算術運算規則而得，即

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \end{aligned}$$

在其中我們用到 $i^2=i\cdot i=-1$

◎ 相除（division）

兩複變數相除 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ 是由乘法反運算而得來的，即若

$$\begin{aligned} z_1 &= zz_2 \\ &= (x+iy)(x_2+iy_2) \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} (x_1+iy_1) &= (x+iy)(x_2+iy_2) \\ &= (x_2x-y_2y)+i(y_2x+x_2y) \end{aligned}$$

由相等定義知

$$x_1=x_2x-y_2y$$

$$y_1=y_2x+x_2y$$

假定 $z_2\neq 0$，即 $x_2\neq 0$，$y_2\neq 0$，解出 x 與 y，則

$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

因此可知 $z=x+iy$ 是由 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的分子與分母同乘 (x_2-iy_2) 而得，即

$$z=\frac{z_1}{z_2}$$
$$=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

◎ 設 z_1, z_2, z_3 爲任意複變數，由上述的定義可得下列性質：

① 交換律 (commutative laws)

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$
$$z_1z_2=z_2z_1$$

② 結合律 (associative laws)

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$
$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$$

③ 分配律 (distribution laws)

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

◎ 共軛複數 (conjugate complex numbers)

複變數 $z=x+iy$ 的共軛複數被定義爲 $\overline{z}=x-iy$，亦即

若　$z=x+iy$

則　$\overline{z}=x-iy$

例如 $4-7i$ 的共軛複數爲 $4+7i$ 。

由上述共軛複數的定義吾人可得下列幾個性質：

① $\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$

③ $\overline{(z_1z_2)}=\overline{z}_1\,\overline{z}_2$

④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

◎ 純虛數 (pure imaginary number)

在 $z=x+iy$ 中，若 $y=0$ ，則 $z=x$ 爲實數，但如果 $x=0$ ，即 $z=iy$ ，此時 iy 叫做純虛數，因此

$$i=0+i(1)$$

$$i^2=[0+i(1)][0+i(1)]$$
$$=-1$$

所以在計算問題時，常使用列代換：

$i^2=-1$ $\quad$ $i^3=-i$

$i^4=1$ $\quad$ $i^5=i$

……………

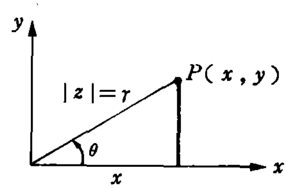
$\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$ $\quad$ $\dfrac{1}{i^2}=-1$

……………

◎ 複數的極式（polar form of complex number）

如果在複數平面上，我們介紹極座標 γ ，θ 即令

$$x=\gamma\cos\theta$$
$$y=\gamma\sin\theta$$



則複變數 $z=x+iy$ 可以表成

$$z=\gamma\cos\theta+i\gamma\sin\theta$$
$$=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$$

上式即爲 z 的極式，γ 叫做複變數 z 的絕對值（absolute value）或模數（modulus）記爲 $|z|$ 且

$$|z|=\gamma$$
$$=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{z\bar{z}} \qquad (\geqslant 0)$$

而由 x 軸到 $\overline{op}$ 的方向角叫做 z 的幅角（argument），記做 $\arg z$ 且以逆時針方向爲正，因此

$$\arg z=\theta$$
$$=\sin^{-1}\left(\frac{y}{\gamma}\right)$$
$$=\cos^{-1}\left(\frac{x}{\gamma}\right)$$
$$=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

在幾何上而言，$|z|$ 表示點 z 到原點的距離，因此不等式

$$|z_1|>|z_2|$$

則表示點 z_1 到原點的距離大於點 z_2 到原點的距離，而 $|z_1-z_2|$ 則表示兩點 z_1 與 z_2 間的距離。

對於給定的 $z \neq 0$，其幅角 θ 只決定到 2π 的倍數爲止，亦即幅角 θ 的值落在 $-\pi<\theta\leq\pi$ 者稱爲 z 的幅角的主值（principal value）。

◎ 極式的運算規則

令 $$z_1=x_1+iy_1=\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$
$$z_2=x_2+iy_2=\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

則根據三角函數的基本定理（如積化和公式），可以得到下列幾個性質：

① $$\begin{aligned}z_1z_2&=\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=\gamma_1\gamma_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=\gamma_1\gamma_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

② $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

③ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

④ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

⑤ $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$　　（到 2π 的倍數爲止）

⑥ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$　　（到 2π 的倍數爲止）

⑦ $z^n=\gamma^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

◎ 三角不等式（triangle inequality）

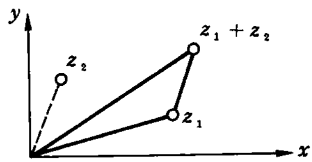
對於任意複變數 $z=x+iy$，我們有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq|x| \quad \text{且} \quad |z|\geq|y|$$

因此可得

$$|R_e z|\leq|z| \quad \text{且} \quad |I_m z|\leq|z|$$

令 z_1 與 z_2 爲兩個任意複變數，則如圖所示，



原點與點 z_1 與點 z_1+z_2 爲一個三角形的三頂點，其邊長爲 $|z_1|$，$|z_2|$ 與 $|z_1+z_2|$，因此可得三角不等式

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

推擴到 n 個複變數，則有

$$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots\cdots+|z_n|$$

◎　複平面上的曲綫與區域

由於 $|z-a|$ 表示 z 與 a 兩點間之距離，因此一個以點 a 爲圓心，ρ 爲半徑的圓可以

$$|z-a|=\rho \qquad (\rho>0)$$

來表示，而不等式

$$|z-a|<\rho$$

則表示對圓內部的任何點皆成立，此種區域叫做開放圓盤（ open circular disk ），而封閉圓盤（ closed circular disk)則包括圓曲綫本身即

$$|z-a|\le\rho$$

至於不等式

$$|z-a|>\rho$$

則表示圓的外部，而

$$\rho_1<|z-a|<\rho_2$$

即表示以 a 爲圓心，ρ_1 與 ρ_2 爲半徑的圓環區域。

◎　複數的根（ root ）

如果 $z=\omega^n$（$n=1,2,\cdots\cdots$），那麼對於每個 ω 的值，有一個 z 值與之對應，此時我可看出若給定 $z\neq 0$，則將有 n 個 ω 值與之對應，寫成

$$\omega=\sqrt[n]{z}$$

因此 n 個 $\sqrt[n]{z}$ 值可如下求出。

令 $\omega=R(\cos\phi+i\sin\phi)$

$z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$

由前面之公式知

$$
\begin{aligned}
z &= \omega^n \\
&= R^n(\cos n\phi+i\sin n\phi) \\
&= \gamma(\cos\theta+i\sin\theta)
\end{aligned}
$$

所以

$$R^n=\gamma \quad \text{且} \quad n\phi=\theta+2k\pi \qquad (k\text{ 爲整數})$$

即

$$R=\sqrt[n]{\gamma} \quad \text{且} \quad \phi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$$

由於 $z\neq 0$，故得 ω 的 n 個不同值如下

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt[n]{z} \\
&= \sqrt[n]{\gamma}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$

當 $k=0$ 時，則得其主值。

【例1】 若 $z_1=2-3i$，$z_2=-5+i$

求(a) z_1+z_2

(b) z_1-z_2

(c) z_1z_2

(d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

解：(a) $z_1+z_2=(2-3i)+(-5+i)$

$=-3-2i$

(b) $z_1-z_2=(2-3i)-(-5+i)$

$=7-4i$

(c) $z_1z_2=(2-3i)(-5+i)$