



怎样学 丛书

方程与不等式

成翠格 主编

河北人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

方程与不等式 / 成翠格主编. — 石家庄: 河北人民出版社, 2009. 2

(怎样学丛书)

ISBN 978-7-202-05106-1

I. 方… II. 成… III. 代数课—初中—课外读物 IV. G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 201446 号

编委 康平爽 丁虹 李红凝 成翠格 王玉娟
阎雅玲 史红霞 康宏 杜素格 梁昕

丛 书 名 怎样学丛书

书 名 方程与不等式

主 编 成翠格

出版发行 河北人民出版社 (石家庄市友谊北大街 330 号)

印 刷 河北新华印刷一厂

开 本 787×1092 毫米 1/32

印 张 4.125

字 数 85 000

版 次 2009 年 2 月第 1 版 2009 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-202-05106-1/G·1700

定 价 7.20 元

版权所有 翻印必究

目 录

第一章 一元一次方程	1
第一节 一元一次方程	2
第二节 解一元一次方程	7
第三节 用一元一次方程解决实际问题	13
第二章 二元一次方程组	34
第一节 二元一次方程组	35
第二节 二元一次方程组的解法	37
第三节 二元一次方程组的应用	47
第三章 一元一次不等式和一元一次不等式组	65
第一节 不等式	65
第二节 不等式的基本性质	67
第三节 一元一次不等式	70
第四节 一元一次不等式组	76
第四章 分式方程	90
第一节 分式方程	90
第二节 分式方程的应用	94
第五章 一元二次方程	103
第一节 一元二次方程	104
第二节 解一元二次方程	108
第三节 用一元二次方程解决实际问题	112
第四节 方程的近似解	117

第一章 一元一次方程

数学趣苑

方程小史

世界上最早的方程产生于幼发拉底河畔的文明古国巴比伦. 大约在三千五百年前, 居住在那里的苏马连人和阿卡德人独立地创造了自己的数学. 他们把数字和符号刻在泥板上, 晒干后, 可以长久地保存下来. 下面就是在这种泥板上发现的世界最早的方程:

一堆(未知数), $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, 整堆数等于 33.

用现在我们学习的方程翻译为: $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$.

在我国, “方程”一词最早出现在东汉初年的数学经典著作《九章算术》的第八章“方程”. 《九章算术》是世界上讲述方程最早的著作, 就世界数学史来说, 也是最早的比较正确的定义. 定义如下: “方程: 程, 课程也, 群物总杂, 各列有数, 总言其实. 会每行为率, 二物者再程, 三物者三程, 皆如物数程之, 并列为行, 故谓之方程. 行之左右无所同存, 且为有所据而言耳.” 这里所说的“会每行为率”, 就是设出几个等式, “如物数程之”, 就是有几个未知数, 就列出几个方程, 此方程也就是我

们到高中将要学习的线性方程.

《九章算术》不但是我国古代数学中的伟大成就,而且是世界数学史上一份非常宝贵的遗产.这一成就进一步证明:中华民族是一个充满智慧和才干的伟大民族.

第一节 一元一次方程

知 识 解 读

概念理解

1. 等式:用等号连接的式子叫等式.如: $3+4=7$, $a-b=c+d$, $x+5=9$ 等,它们都是用等号表示相等关系的式子,所以都是等式.

2. 方程:含有未知数的等式,叫做方程.方程必须满足:(1)含有未知数;(2)是等式,两者缺一不可.如 $2x+3=5$, $x^2-2x+1=0$ 等都是方程.

3. 一元一次方程:只含有一个未知数,未知数的次数是1,这样的方程叫做一元一次方程.

注意:(1)一元一次方程都是整式方程,或者说分母中不含有未知数的方程.

(2)一个整式方程的“元数”和“次数”都要在这个整式方程化为最简形式后才能确定.

4. 方程的解:使方程左、右两边相等的未知数的值叫做方程的解.

5. 解方程:求方程解的过程叫做解方程.

典型例题解析

一、方程及方程的解

例1 判断下列各式是不是方程:

- ① $3t-1 \neq 1-t$; ② $2-(-3)=-1+6$; ③ $y^2+2y=4y-4$; ④ $3x-y=0$; ⑤ $3x+7$; ⑥ $x=2$.

分析: ①不是方程, 因为表示不等关系; ②不是方程, 因为不含有未知数; ③是方程; ④是方程; ⑤不是方程, 因为它不是等式; ⑥是方程(它是最简方程).

例2 如果 $5x^{k-2}=3$ 是一元一次方程, 那么 $k=$ _____.

分析: 此题主要考查一元一次方程的定义和解简单的一元一次方程. 由定义可知 $k-2=1$, 从而求出 $k=3$.

例3 解是 $x=\frac{1}{2}$ 的方程是().

A. $2-4x=1$

B. $3x+2=5$

C. $\frac{1}{2}x=2$

D. $4x-2=6x-3$

分析: 解决本题有两种方法: 一是将各个方程的解求出来, 确定选项; 二是将 $x=\frac{1}{2}$ 代入各个方程, 看左右两边的值是否相等. 请同学们动手按两种方法做一做, 答案选D.

二、构造一元一次方程解题

在数学题目中, 有许多看似与一元一次方程无关的问题, 只要能根据题目的特点, 利用数学中的相关知识, 构造出一元一次方程, 就能快速、准确地求解. 现就如何利用有关知识来构造一元一次方程解题举例说明, 希望能对同学们学习一元一次方程、巩固相关知识有所帮助.

1. 利用一元一次方程的定义

例4 若 $\frac{1}{3}x^{2m-3}-6=0$ 是关于 x 的一元一次方程, 试求代数式 $\frac{1}{2}m^2+3m-1$ 的值.

解: 依题意, 得 $2m-3=1$, 解得 $m=2$.

所以当 $m=2$ 时, $\frac{1}{2}m^2+3m-1=\frac{1}{2}\times 2^2+3\times 2-1=7$.

2. 利用方程的解的定义

例5 已知 $x=-3$ 是方程 $4x=7x+k$ 的解, 求 k 的值.

解: 把 $x=-3$ 代入方程 $4x=7x+k$, 得 $4\times(-3)=7\times(-3)+k$, 即 $-12=-21+k$, 解得 $k=9$.

3. 利用互为相反数的意义

例6 若 $5m+\frac{1}{4}$ 与 $5(m-\frac{1}{4})$ 的值互为相反数, 求 m 的值.

解: 因为 $5m+\frac{1}{4}$ 与 $5(m-\frac{1}{4})$ 的值互为相反数, 所以 $5m+\frac{1}{4}+5(m-\frac{1}{4})=0$.

解这个一元一次方程, 得 $m=\frac{1}{10}$.

4. 利用互为倒数的概念

例7 当 $x=$ _____时, 代数式 $2x-5$ 与 $\frac{1}{3}$ 互为倒数.

解: 由题意得 $\frac{1}{3}(2x-5)=1$, 解得 $x=4$.

5. 利用两个代数式的值相等

例8 当 $x=$ _____时, 代数 $5x+10$ 与 $4x+14$ 的值相等.

解: 由题意, 得 $5x+10=4x+14$, 解得 $x=4$.

6. 利用同类项的概念

例9 若代数式 $4x^{2m-1}y$ 与 $-3x^3y^{n+1}$ 是同类项, 求 m 、 n 的值.

解: 因为代数式 $4x^{2m-1}y$ 与 $-3x^3y^{n+1}$ 是同类项, 所以 $2m-1=3, n+1=1$.

解得 $m=2, n=0$.

7. 利用非负数的性质

例10 若 $|m+2|+(n-3)^2=0$, 求 mn 的值.

解: 根据非负数的性质, 得 $m+2=0, n-3=0$,

解得 $m=-2, n=3$.

所以 $mn=-6$.

数学思考

根据你理解的方程、一元一次方程及方程的解的概念写出一个方程, 使它的解为 -2 .



解决问题

下图是一张某月份的日历.

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

(1)在该日历中能否找出一竖列上相邻的3个数,使它们的和分别为25、60和75?

(2)阴影所示的方框中,每行数之和有什么规律?每竖列数之和有什么规律?

开阔视野

$x=6$ 是什么

有这样一道选择题:

$x=6$ 是()

A. 方程的解

B. 方程

解题时,有些同学选择 A,认为“ $x=6$ ”是方程的解.其实,这样的选择是不正确的.我们知道,使方程左右两边相等的未知数的值,叫做方程的解,方程的解是指一个数,而题中问的是“ $x=6$ ”这个等式是什么,而不是指“6”这个数.

那么,“ $x=6$ ”是方程吗?根据方程的概念——含有未知数的等式叫做方程,很容易知道方程必须具备两个条件:①含有未知数,②是等式.很明显,“ $x=6$ ”是等式,字母 x 应理解为未知数.“ $x=6$ ”具备了上述两个条件,符合方程的概念,所以它是方程.此题的正确答案是 B.

第二节 解一元一次方程

数学趣苑

三个和尚

三个和尚的故事同学们都不陌生,可你知道瘦和尚和小和尚是怎样收留胖和尚的吗?这里还有一个数学问题呢.

有一天,胖和尚来到小庙前,看到小和尚和瘦和尚正在烧水做饭,就走上前说:“我是东海山上的和尚,路过此地,想在此庙暂住,不知你们能否留



下我?”小和尚看看胖和尚,说:“只要你能答对我的问题就可以留下来,我的问题是这样的:我的年龄和瘦和尚的年龄正好倒过来,我们的年龄差正好是我们年龄和的 $\frac{1}{11}$,我的年龄比瘦和尚大,你算算我们的年龄吧!”胖和尚想了又想,终于算出了他们的年龄,被留下了.同学们,你们算出来了吗?

知识解读

一、一元一次方程的解法

解一元一次方程的基本思路是通过对方程变形,把含有未知数的项目归到方程的一边(一般在方程的左边),把常数项归到方程的另一边,最终把方程化为 $x=a$ 的形式.

解一元一次方程的一般步骤为去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1.

注意:在解具体的方程时,有些步骤可能用不到,有些步骤可能多次使用,有些方程可能先去括号后去分母比较简便等等,要根据方程的特点,对这些步骤灵活掌握.

二、解一元一次方程应注意的几个问题

1. 去分母

去分母时,方程两边各项都乘以各分母的最小公倍数,不要漏乘不含分母的项;分数线隐含着“括号”的作用,去分母时,如果分子是一个多项式,应把分子看成一个整体用括号括起来.如解方程 $\frac{x-3}{3} - \frac{2x+1}{4} = 1$,去分母得 $4(x-3) - 3(2x+1) = 12$.

2. 去括号

如果括号前是“-”号,去括号时括号内各项都应改变符号.如解方程 $2(x+1) - 5(1-x) = 6$,去括号得 $2x+2-5+5x=6$.

3. 移项

移项时:(1)方程中的任何一项都可以改变符号后从方程的一边移到方程的另一边;(2)移项与交换两项的位置不同,交换两项的位置是在方程同一边进行的,不改变项前边的符号.

如:解方程 $3x-2=4x-5$.移项,得 $3x-4x=-5+2$;而交换位置,得 $-2+3x=-5+4x$,项的符号不改变.

4. 系数化为1

系数化为1时,方程两边都除以未知数的系数,即方程 $ax=b(a \neq 0)$ 两边同除以 x 的系数 a 得到 $x = \frac{b}{a}$,应把未知

数的系数 a 作为分母. 如解方程 $7x=8$, 系数化成 1, 得 $x=\frac{8}{7}$.

5. 灵活解方程

在解一元一次方程时, 一般按解一元一次方程的步骤进行, 但对于一些特殊的方程, 要根据其特点, 灵活运用解方程的步骤, 这样会使解方程的过程比较简单.

6. 检验方程的解的正确性

做完一道题后, 检验方程的解是否正确非常重要. 其方法是: 将所得的解分别代入方程的左边和右边, 如果左、右边的值相等, 则说明所得的解是原方程的解; 如果左边不等于右边, 则说明所得的解不是原方程的解, 这说明在解方程时一定是哪一步计算出现了错误, 应认真检查. 检验可用口算或在草稿纸上进行.

典型例题解析

一、正误例析——解一元一次方程“错误档案”

1. 错用连等号

例 1 解方程 $x+13=4$.

错解: $x+13=4=x=4-13=x=-9$.

辨析: 错解中, $x+13=4$, $x=4-13$, $x=-9$ 是三个方程, 它们是方程的同解变形, 不能连等.

正解: 移项, 得 $x=4-13$, 解得 $x=-9$.

2. 移项没有改变符号

例 2 解方程 $10+9x=9+10x$.

错解:移项,得 $9x + 10x = 9 + 10$,合并同类项,得 $19x = 19$,解得 $x = 1$.

辨析:根据移项法则,方程中的 $10x$ 和 10 从方程的一边移到另一边时应改变符号.

正解:移项,得 $9x - 10x = 9 - 10$,合并同类项,得 $-x = -1$,系数化为 1 ,得 $x = 1$.

3. 去分母时漏乘不含分母的项

例 3 解方程 $\frac{3x-2}{5} + 2 = \frac{x+6}{5}$.

错解:去分母,得 $3x - 2 + 2 = x + 6$,移项、合并同类项,得 $2x = 6$,系数化为 1 ,得 $x = 3$.

辨析:去分母时,方程两边都乘以 5 ,而“ 2 ”这一项漏乘了 5 .

正解:去分母,得 $3x - 2 + 10 = x + 6$,移项、合并同类项,得 $2x = -2$,系数化为 1 ,得 $x = -1$.

4. 去括号时错用乘法分配律

例 4 解方程 $8x - 2(1 - x) = 7x - 3(x - 1)$.

错解:去括号,得 $8x - 2 - x = 7x - 3x - 3$,移项、合并同类项,得 $3x = -1$,系数化为 1 ,得 $x = -\frac{1}{3}$.

辨析:用乘法分配律时,方程左边的 $-2(1 - x) = -2 + 2x$,右边的 $-3(x - 1) = -3x + 3$.

正解:去括号,得 $8x - 2 + 2x = 7x - 3x + 3$,移项、合并同类项,得 $6x = 5$,系数化为 1 ,得 $x = \frac{5}{6}$.

5. 去分母时忽略分数线的括号作用

例5 解方程 $\frac{x+1}{2} - \frac{4-3x}{8} = 1$.

错解:去分母,得 $4(x+1) - 4 - 3x = 8$,去括号,得 $4x + 4 - 4 - 3x = 8$,合并同类项,得 $x = 8$.

辨析:分子 $4-3x$ 是一个整体,在去分母时应加上括号.

正解:去分母,得 $4(x+1) - (4-3x) = 8$,去括号,得 $4x + 4 - 4 + 3x = 8$,合并同类项,得 $7x = 8$,系数化为1,得 $x = \frac{8}{7}$.

6. 未知数的系数是分数时,系数化1出错

例6 解方程 $\frac{x}{5} - \frac{7}{3} = 2$.

错解:移项,得 $\frac{x}{5} = \frac{7}{3} + 2$,合并同类项,得 $\frac{x}{5} = \frac{13}{3}$,系数化为1,得 $x = \frac{13}{15}$.

辨析:把方程 $\frac{x}{5} = \frac{13}{3}$ 系数化为1时,方程两边都应乘以5,而错解中右边乘了 $\frac{1}{5}$.

正解:移项,得 $\frac{x}{5} = \frac{7}{3} + 2$,合并同类项,得 $\frac{x}{5} = \frac{13}{3}$,系数化为1,得 $x = \frac{65}{3}$.

二、一元一次方程中的“新题型”

一元一次方程是初中阶段的重要内容,同学们不仅要熟练掌握其解法,还要注重这部分知识在新问题情景中的创新应用.现举例说明如下.

1. 将错就错型

例7 小李在解方程 $5a - x = 13$ (x 为未知数) 时, 误将 $-x$ 看做 $+x$, 得方程的解为 $x = -2$, 则原方程的解为 ().

A. -3 B. 0 C. 2 D. 1

解: 选 C.

2. 复原残缺型

例8 某同学在做作业时发现: 方程 $2 - ()x = -\frac{3}{2} + 2x$ 不能求解了, 因为 () 处在印刷时被污迹盖住了, 经过翻看后面的答案, 知道该方程的解为 $x = \frac{1}{2}$, 该同学很快就知道了被污迹盖住的数字了. 你认为将该方程复原出来应为 _____.

解: 设被污迹盖住的 () 为 a , 则原方程变为 $2 - ax = -\frac{3}{2} + 2x$, 把 $x = \frac{1}{2}$ 代入方程, 得 $2 - \frac{1}{2}a = -\frac{3}{2} + 1$. 解得 $a = 5$. 所以该方程复原出来为 $2 - 5x = -\frac{3}{2} + 2x$.

3. 结论开放型

例9 请你构造一个解为 $\frac{2}{3}$ 的一元一次方程, 要求至少有三项.

解: 此题答案不唯一. 由 $x = \frac{2}{3}$ 得 $3x = 2$, 进而可以得到 $2x + x = 2$, 所以得到 $2x = 2 - x$, 此方程即为符合条件的方程. 此题还可写出方程 $4x - x = 2$; $3x - 1 = 1$; $-\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{7}{2}x + 1$ 等等.

第三节 用一元一次方程解决实际问题

数学趣苑

侦破“借债不还”案

猴警探睡得正香，一阵急促的电话铃声把他从睡梦中惊醒。

他抓起电话筒大声问：“是哪个讨厌的家伙？不知道我正睡觉吗？”

电话听筒里传来浑厚的男低音：“我是熊法官，现在有件疑案急需你来侦破。”

“我马上就到！”一听说有案子可破，猴警探立刻就来了精神，他跨上摩托车直奔“动物法院”。

在法院里，老山羊正状告黑豹，原来黑豹借了他10根胡萝卜不还。黑豹要老山羊说出是哪天借的，老山羊记不清准确日期。黑豹说既然报不出日子，那就是没借！

熊法官小声对猴警探说：“你看这怎么办？一个忘了日期，一个说不出日期就不承认。”

猴警探倒背双手走到老山羊面前：“你不要着急，要慢慢地想，除了日期外，你还能想起点儿别的什么？”

老山羊低头想了一会儿，突然说：“我想起来了，那是今年1月份的事，是1月份的第一个星期四。”

黑豹大声叫道：“猴警探，别听他瞎说！”

猴警探不理黑豹，继续问：“老山羊，你还想起点儿什么？”

老山羊突然一拍大腿，说：“当时我看了一眼挂历，我把1

月份所有星期四的日期相加,结果恰好是80.”

“很好!”猴警探转身对黑豹说,“如果我算出的日期,和日历上查得的日期一样,你承认不承认借过胡萝卜?”

黑豹一瞪眼睛说:“承认!”

猴警探边写边分析:“设这一天是1月 x 日, x 日既然是1月份的第一个星期四, x 必然小于或等于7.”

熊法官点头说:“分析得有道理!”

“第一个星期四是 x 日,第二个星期四必然是 $(x+7)$ 日,第三个星期四必然是 $(x+14)$ 日.”猴警探越说越快,“第四个星期四必须是 $(x+21)$ 日,如果1月份只有4个星期四的话,那么

$x + (x+7) + (x+14) + (x+21) = 80$, x 没有整数解,说明1月份有5个星期四,第五个星期四是 $(x+28)$ 日,把这些日期相加,得

$$x + (x+7) + (x+14) + (x+21) + (x+28) = 80$$

$$5x + 70 = 80$$

$$5x = 10$$

$$x = 2.$$

老山羊站起来说:“对,是1月2日.”

熊法官拿出日历一查,1月2日正好是星期四.黑豹像泄了气的皮球一样,一屁股坐在了地上.

知 识 解 读

如何列方程

在前面两节中,我们学习了一元一次方程的概念与解法,现在我们来认识一元一次方程在实际生活中的应用.