

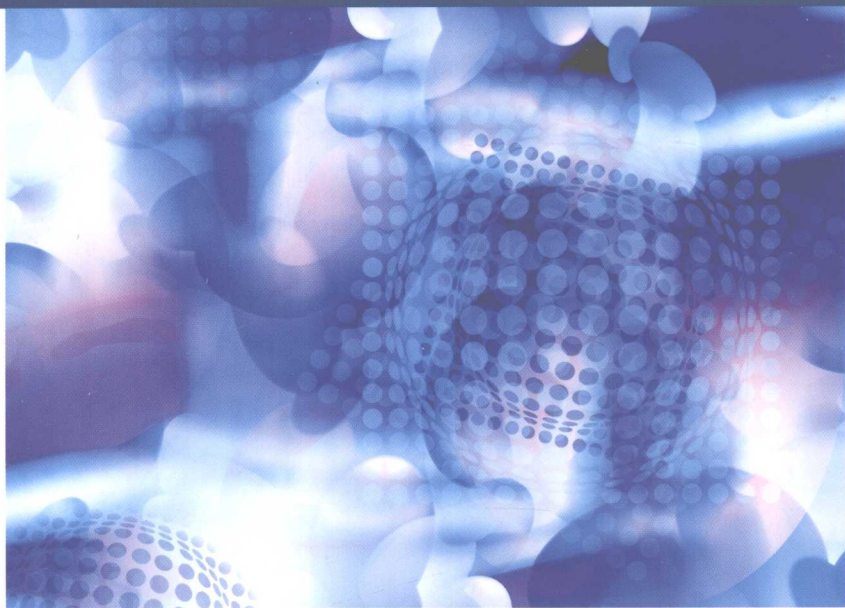


数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

数学思想赏析

Appreciation of Thinking in Mathematics



李伟 高隆昌 著

大连理工大学出版社 | DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

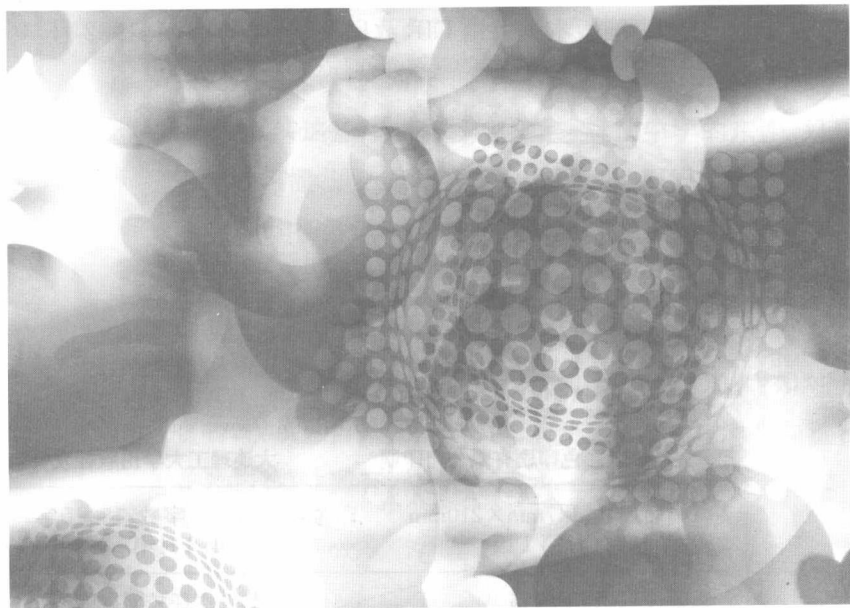


数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

数学思想赏析

Appreciation of Thinking in Mathematics



李伟 高隆昌 著

大连理工大学出版社 DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学思想赏析/李伟,高隆昌著. —大连:大连理工大学出版社,2009.8

(数学方法论应用传播丛书)

ISBN 978-7-5611-5018-4

I. 数… II. ①李…②高… III. 数学—思想方法 IV.
O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 141932 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dutp@dutp. cn URL: <http://www.dutp. cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm
2009 年 8 月第 1 版

印张:9.625 字数:180 千字
2009 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王 伟

责任校对:生晶晶

封面设计:孙宝福

ISBN 978-7-5611-5018-4

定价:25.00 元



数学方法论应用传播丛书

编写委员会

丛书顾问(按姓氏笔画排序)

王梓坤 刘绍学 周春荔 林夏水

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

执行主编 唐志华

委 员(按姓氏笔画排序)

于世章	王民珠	王光明	朱恒杰
何万生	吴勤文	杨世明	杨冠夏
陈安宁	陈远刚	周公贤	周家禧
徐献卿	袁 渊	郭 璋	顾晓华
储东花	谢 祥	裴光亚	

“数学方法论应用传播丛书”题词

推广数学方法论二十年

徐利治

2009年8月于大连

总 序

“太湖烟波碧沉沉 渤海嗒淋^①沁人心。”

由大连理工大学出版社出版的“数学方法论应用传播丛书”，与读者见面了。这是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩。

先让我们扼要地回顾一下这套丛书的由来。

1987年8月，无锡市的数学老师应邀出席了由大连理工大学应用数学研究所主办的“全国数学方法论和数学史学术研讨会”。在此期间，一连六天，我国著名数学家徐利治教授作了关于“数学方法论和G·波利亚数学教育思想”的系列讲座。尔后，无锡市的老师又出席了由周春荔先生、杨世明先生在首都师范大学主持召开的“全国首届波利亚数学教育思想学术研讨会”。

返锡后，他们在时任无锡市教育局局长周稽裘先生的亲自部署和直接领导下，在无锡市原教研室主任、特级教师李永灿先生的支持与指导下，成立了无锡市MM(Mathematical Methodology)课

① “大连”原本是满语中“嗒淋”的译音，本意是“海滨”之意。

题组. 教育行政部门组织和协调市教育科学研究所、市教研室和江南大学·教育学院等各方面的研究力量,“强强联合”协作攻关,设计出“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验(简称 MM 实验)课题. 从此,在中国无锡市正式拉开了把数学方法论和波利亚数学教育思想直接应用于数学教育教学实践的序幕.

此后,在时任江苏省教委主任袁相碗教授、副主任周稽裘先生的关心支持下,在无锡市教委主任林建坤先生的直接参与和领导下,MM 课题先后列入江苏省教育科研“八五、九五”重点项目和国家教委“八五规划”项目.

经过 5 年实验,证明 MM 教育方式不仅减轻了师生的负担,而且提高了老师的数学水平和教学水平,从而提高了教学质量. 因此,它于 1994 年通过了受江苏省教委委托,由王梓坤院士、徐利治教授组成的专家组的鉴定,并获得高度好评.

MM 实验从设计到确立为一种教育方式(MM 教育方式),并且推广到全国十几个省、市、自治区,迄今已经整整 20 年. 这其中倾注了设计者、实验者、推广者的大量心血. 当年参加实验和推广的老师已经陆续退休了,而且随着年龄的增长,他们将无法到全国各地亲自指导和推广 MM 实验. 这就提出一个问题:如何使 MM 实验继续推广下去,使 MM 教育方式世代相传,并且随着时代的发展而不断发展?

当然,作为实验,已经出版过两本教材:杨世明、周春荔、徐沥泉等著的《MM 教育方式:理论与实践》(2002 年)和徐沥泉著的《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(2003 年). 不过,MM 实

验需要具备一定的条件,这就使得它的传播带有一定的局限性.特别是对于不具备实验条件,又希望在数学教学中贯彻 MM 教育方式的一些重要教育思想和教学方法的老师来说,则需要一部能概括 MM 实验、MM 教育方式的普及书.因此,我在 2006 年于新疆召开的数学科学方法论研究交流中心理事会上提议:撰写一部“MM 教育方式”雅俗共赏的书籍.

现在,我国各地 MM 实验点一线教师,以及热心于数学方法论的理论传播和应用研究的大、中、小学数学教师 and 教学研究人员集思广益,共同努力,分工协作撰写的“数学方法论应用传播丛书”,终于正式出版了.她比我原先设想的 MM 教育方式普及性书籍能更全面地传播数学科学,传播数学方法论,传播数学文化,传播数学的精髓.是一套让人走进数学,理解数学,鉴赏数学,品味数学,直到热爱数学和应用数学,宣传数学思想方法的高级科普读物.

丛书作者的知识结构、年龄结构合理,在丛书写作方面具有最佳的主体结构.作者的年龄跨度从 33 岁至 89 岁,这是少见的,也是十分可喜的.我国一批著名数学家、科学家都十分关心和支持数学方法论的研究与普及工作,关心数学科普作品的撰写与出版.王梓坤教授的《科学发现纵横谈》一书,就给我们如何撰写科普著作做出了榜样.该书对从事理科和文科工作的同志都起到了很好的教育作用.本套丛书的作者也认真学习和尝试了这种风韵.

值此 MM 课题实施 20 周年之际,王梓坤院士和刘绍学教授等又为 MM 实验纪念活动,为本套丛书的出版发来了热情洋溢的贺词与贺信.年届 90 的徐利治教授亲自撰写有关 MM 教育方式

的论文和《MM 教育方式：理论与实践》一书的序言。“天下士非一方之士，人伦师乃万世之师。”他们为本套丛书留下了珍贵的作品和墨宝，他们的思想在这套丛书中得以充分体现，以飨读者。作为一名数学哲学工作者，看到这些著名数学家和科学家为数学科普工作付出的辛劳，我感到由衷的欣慰。

丛书共有八本专著和一本编著。《源于教学·高于教学——MM 方式演绎》一书，是《教学·研究·发现——MM 方式演绎》（科学出版社，2003 年 3 月）的姊妹篇，其中收录了全国各实验点 70 余位老师的专题论文、研究报告、教学设计和教学实录。他们之中有著名学者，大学教授、副教授、讲师和初出茅庐的博士、硕士；有中、小学的特级教师、高级教师；有享受国家和地方政府特殊津贴的专家，全国模范教师、先进教师和科技拔尖人才。

《合情推理趣引》、《数学——直觉与逻辑的交响乐》、《数学和谐美》等著作，揭示和展现了数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律。数学和文学、数学和艺术都是相通的。

数学是研究抽象事物的，它的抽象性保证了其应用的广泛性。如何教育学生从具体事物中抽象出数学问题？《学会抽象与建模》一书的许多数学模型都是从日常生活中以及我们身边的例子提炼（抽象）出来的，有一部分是中学数学课堂教学的实例，还有一部分是由中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品，颇具特色，也有一定的应用价值。学会抽象与建模应该成为学习数学的一种技能。

数学教育是人类的一件大事。古往今来，许许多多数学家、教

育家、教师和数学教育工作者，一直在“摸着石头过河”。怎样摸得更好？怎样避免陷入泥潭？记得一位伟人说过：“人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。”那么，《数学·教学·哲学》和《世纪婚约——哲学与数学教育联姻的实践与思考》这两部著作将给我们带来深刻的启迪与思考。它将帮助我们回答数学的本质是什么，数学教育和数学教学的本质又是什么，在数学教学中怎样提高学生的一般科学素养，增进社会文化修养，形成和发展数学品质，从而全面提高学生的素质。

一个好的数学教师，他的任务是帮助学生了解数学文化、喜爱数学文化、陶醉于数学文化，进而让学生学会用数学家的思维方式思考问题、解决问题。正如波利亚所说，让处于性格极易改变的青少年时期的学生，养成善思的好习惯，从而改变他们一生的命运。《从喜欢到入迷——学好数学的秘密》一书的作者将以自己的亲身经历说明如何用以上思想来教育学生，让学生从害怕数学、讨厌数学的困境中解脱出来，从而热爱数学，迷恋数学。从一二十分到全年级前三名，一些看来是神话般的例子，确实是现实的，关键是要真正地了解数学及其教学方法。

《数学思想赏析》一书内容丰富、内涵深刻，作者居高临下，又深入浅出，可供非数学专业的读者领略和赏析数学美，学到一定的数学常识、数学知识、典型的数学思想与方法；也可供爱好数学和数学专业的读者在茶余饭后分享与品味作者精心设计与制作的数学实例。它会引起具有较好数学基础和具备较高数学素养的读者的共鸣。

总之，本套丛书是具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教

材性的数学专题科普著作。同时,她又沟通了文理科学,内容丰富,事例翔实,起点有高有低,读者可各取所需,适合于广大数学爱好者阅读。

“数学方法论应用传播丛书”的宗旨是:走进数学,理解数学,养成数学思维,欣赏数学的美;品味数学,启迪心智,增强数学修养,弘扬数学文化。我们要提倡、鼓励和采取有效机制让学习和从事文科的人们读一点自然科学的科普读物;学习和从事理科(含数学)的人们阅读和鉴赏一些文学、艺术名著。开阔思路,从事跨学科的研究工作,把各自的思维活动发挥得淋漓尽致,不断地实现科学研究中的发明和发现。

林夏水

2009年2月15日

前 言

走近数学、
理解数学、
养成数学思维、
欣赏数学的美；
品味数学、
启迪心智、
增强数学修养、
弘扬数学文化。

这就是本书的宗旨。

数学，最终说来还是工具，但我们不能作为工具来学。从工具的技术动机去学数学是非优的。

当今是定量分析的时代，数学，特别是数学思维对哪个专业都是重要的，也包括哲学与文学。

数学美，数学中蕴藏着丰富的美，但我们需要学会去欣赏这种美。

数学属于人类文化，它是全人类共有的一种通有文化。

客观世界本来没有数,人们的生活却离不开数,更离不开数学.也许这就是人从本质上区别于不懂得“朝三暮四与朝四暮三”关系的猴类之处吧.人类社会愈发展将愈离不开数学,社会愈进步愈需要高深的数学.怎么办?首要的问题是要让数学思想,而不只是一堆堆数学公式,去武装起她的每一个建设者.

数学,学的是公式,用的是思想.

数学,思想重于公式.不要为其符号语言的形式引偏了我们的注意力.

如何才能树立起数学思维呢?可以从有意识和无意识两个方面去递进.前者靠的是理性,是思考,是刻苦努力;后者靠的是悟性,是灵感,是潜移默化.

数学崇尚修养、修炼、感悟和领悟.

学了高等数学只是开启了今后工作生涯中继续学习的路子.本书则是为着这一路子或者沿着这一路子作出一点欣赏性的思考.

本书一大宗旨是想与读者一起,通过对一些数学思想的品味来体会数学与社会生活的关系,感受数学与人类文化,也是为了增进数学文化,并以此来促进我们数学思维习惯的形成,以便更好地掌握数学思想,驾驭数学公式,更好地运用数学,驰骋数学世界.

本书属于大学生的课外读物,但内容起点比较低,具有一般高等数学水平的读者都能读懂.不过对于大学生来说,其思想高度和看问题的角度也许是较为新颖的,同时也是具有启发性的.毕竟虽然我们的主要目标是大学生甚至部分中学生,但也只是其中学有余力者和数学爱好者.

前 言

感谢著名数学家、教育家、大连理工大学徐利治先生和北京航空航天大学李心灿先生的指导与帮助。

作 者

2009 年 8 月

目 录

赏析一 加、乘数学与客观世界	1
1.1 人类社会的启蒙与数的加、乘发生	2
1.2 谈谈数学结构	5
1.3 加、乘运算:数学的一桩砧木	12
1.4 代数学及其加、乘运算	16
1.5 加、乘概念的应用性推广	21
1.6 算术:加、乘运算的一个深化途径	25
1.7 数学自算术往函数发展的前期准备	29
1.8 函数:分类及各类的加、乘运算实质	36
1.9 客观世界中加、乘实质	45
1.10 一个应用实例:经济社会中的“除法”	52
赏析二 公理数学与公理文化	69
2.1 引子:几个相关概念	70
2.2 公理化方法的创生故事	78
2.3 非欧几何的诞生:公理意识的升华	82
2.4 公理学的诞生	87
2.5 集合论悖论:公理学进入第四阶段	91

2.6 数学的寻根热与公理学的继续发展	100
2.7 简论无穷	104
2.8 数学哲学:公理学进入第五阶段	109
2.9 公理文化与公理哲学	115
赏析三 周期及其数学欣赏	125
3.1 周期感叹	125
3.2 周期概念初步	127
3.3 周期数学 I:周期的函数认识	131
3.4 周期概念回到实践	138
3.5 周期的机理探讨(I)	144
3.6 周期的机理探讨(II)	148
3.7 周期的力学简谈	155
赏析四 高等数学中若干基本问题赏析	163
4.1 什么是高等数学	164
4.2 关于极限定义的进一步认识	166
4.3 在极限运算中何时可作等价替换	173
4.4 关于洛必塔法则的必充性	176
4.5 一元函数泰勒公式一个证明赏析	182
4.6 关于“折线逼近”问题:一个折线悖论	186
4.7 重积分换元法中 J 式的一个简明推导	190
4.8 Stokes 公式的一个新推导	192
4.9 关于参数方程几何作图问题	196
4.10 关于高维空间几何作图问题	198

4.11 关于线性代数方程组解空间的理解	200
赏析五 哲学数学	205
5.1 谈谈数学美	205
5.2 “=”的欣赏	220
5.3 数学文化欣赏	229
5.4 数学中的心理学	237
赏析六 数学的“自嘲”	256
6.1 所谓数学的精确	257
6.2 数学高塔尚待建地基	265
6.3 也说数学是猜出来的	269
6.4 数学教育的困惑	276
6.5 也谈数学家的聪明	280
6.6 请为数学解嘲	285