HIT

数学・统计学系列

Shuxue Aolinpike Budengshi Yanjiu

# 数学奥林匹克不等式研究

杨学枝 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS


数学·统计学系列

# 数学奥林匹克不等式研究

Shuxue Aolinpike Budengshi Yanjiu

杨学枝 著

HITP

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容提要

本书介绍了初等不等式的证明通法和各种技巧。书中收集了大量国内外初等不等式的典型问题,还有大量作者自创的题目,内容新颖,富有启发性。本书对难度较大的不等式的证明过程叙述比较详细,证法初等。因此,本书完全适合高中以上文化程度的学生、教师、不等式爱好者以及不等式研究方面的有关专家参考使用。同时本书也是一本数学奥林匹克的有价值的参考教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

数学奥林匹克不等式研究/杨学枝著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-5603-2926-0

Ⅰ.数…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.初等代数-不等式-研究
Ⅳ.0122.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 131771 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 30.75　字数 600 千字
版　　次　2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2926-0
印　　数　1～3 000 册
定　　价　68.00 元

# 作者简介

杨学枝先生，男，1947年11月生，1974年7月加入中国共产党。福建省闽侯县人，毕业于武汉大学数学系，数学特级教师，任中学副校长25年。任福州市校际教研员，福州市数学学科中级职称评审委员会主任、高级职称评审委员会主任，福州市中学数学骨干教师培训班授课教师、导师，福州市新课改数学科指导老师。中国初等数学研究会第二届理事会理事长（原全国初等数学研究工作协调组成员），《中国初等数学研究》杂志主编，原中国不等式研究小组组长，现中国不等式研究会顾问，原《不等式研究通讯》主编，《中国初等数学研究》主编。湖北省《中学数学》等多家杂志编委。福建省数学学会初等数学分会理事长，福建省数学学会理事，福建省教育学会数学教育委员会理事，福州市数学学会副理事长。数学奥林匹克高级教练员，最早参与培训福建省进入国家冬令营的数学尖子生。2004、2005、2006、2007年暑期曾应邀到广东省深圳中学、华南师大附中、中山纪念中学、全国高中数学奥林匹克协作体学校第七届夏令营以及福州市、厦门市、漳州市等学校和地区为数学奥赛尖子生培训讲座，深受师生欢迎，深圳中学王烜同学于2006年第48届IMO中荣获金牌，杨学枝先生是培训讲师之一。

杨学枝先生长期从事初等数学教育、教学和学术研究工作，最早发起并参加筹备首届全国初等数学研究学术交流会。1996年8月曾在福州市组织召开了第三届全国初等数学研究学术交流会。1991年筹建了福建省数学学会初等数学分会，并连续主持召开了七届年会，组织并主持召开了三届全国不等式研究学术会议。多次参加在国内召开的国际、国内数学学术会议，并在大会上作学术报告及论文交流。在全国各级CN刊物、国外数学刊物及大学学报发表了300余篇有价值的教育、教学及初数研究论文，主编出版了《福建省初等数学研究文集》（17万字，由福建省教育出版社1993年7月出版）、《不等式研究》（50万字，由西藏人民出版社2005年5月出版）、《数学奥林匹克不等式研究》（60万字，由哈尔滨工业大学出版社2009年8月出版），参加多部数学专著及数学教学参考书籍的编写工作。“关于四面体的一个三角不等式及其应用”、“关于角平分线的一组不等式”等多篇论文获全国一等奖。杨学枝先生曾被作为封面人物刊登在《中学数学》（湖北）2003年第2期上。杨学枝先生在初等不等式研究方面取得了许多新成果，他自创的一个不等式在《不等式 理论 方法》书中列为“杨学枝不等式”条目，他用非常简捷的方法解决了曾困惑过国内外数学

家的一个几何不等式问题(见《数学奥林匹克不等式研究》一书中第六章例1)。

杨学校先生从事高中数学教学近40年,其中在高三教学20余年,在38年的中学数学教学生涯中,教书育人,积极开展教科研活动。1997年提出并主持了"数学问题创新教学法"课题研究,被立项为省级重点课题。2005年12月通过了省级专家评估验收。在杨学校先生的带领下,他所在的福州第二十四中学数学组曾被《中国数学教育》(中国教育学会中学数学教学专业委员会会刊)于2007年第6期在封面、封底作过介绍,刊出了名校风采——福州第二十四中学数学组。2003年10月受福州市人民政府指派,杨学校先生赴宁夏讲学。在福建省、福州市为中学数学作数学教育教学培训二百多场。杨学校先生在福建省福州市(含八县市)和厦门市等地市为教师岗位培训讲座达百余场次。杨学校先生为教育事业作出了应有的贡献。

# ◎ 序

杨学校先生这本书，堪称初等不等式研究领域的一部巨著。这主要不是指它洋洋洒洒60万言的篇幅，而是指其内容和意义。不同于我们熟知的匡继昌先生的大百科全书式的工具性专著《常用不等式》，杨学校先生这本是通过大量典型和非典型问题的例解来系统阐述初等不等式证明的多种方法和技巧的专著。过去国内学者出版过一些讨论初等不等式的小册子，但其力度和覆盖面都不能和本书相比。尤其是，我感觉本书有一个鲜明的特色，对各章节问题的解力求简洁精妙往往另辟蹊径，全书凝结着作者的经验、智慧、灵感和巧思。本书不仅可作为奥数参考书籍，更可以作为初等不等式研究的重要文献。

譬如第十一章包括的十多篇精彩的文章，由于篇幅限制在期刊中只发表过部分内容，在本书中才得以一窥全貌。其中包含了不少富于启发性的确有参考价值的材料。

我原本不知道杨学校先生。1983 年我和张景中先生在北京马甸参加第四届双微会议期间，在某次分组会上，来自美国的知名数学家 M. Shub 提到一个几何不等式："在三角形 $ABC$ 三边上各取一点 $P$, $Q$, $R$ 使得它们恰好三等分三角形 $ABC$ 的周界。求证三角形 $PQR$ 的周界不小于三角形 $ABC$ 的周界之半"。他说这是一个许多人知道但不会证明的难题。若干年之后可能是单墫教授告诉了我杨学校先生对该不等式的独具匠心的精巧

证明，留下了极其深刻的印象。虽然后来我在加拿大一个级别较高的期刊上看到了一个相当冗繁的证明，相比之下，轩轾立见。俗话说：行家一出手，就知有没有。不到炉火纯青，不可能有这样的身手。那以后我开始关注杨学枝先生的工作。特别是通过“不等式研究小组”，“不等式研究网站”和两次不等式学术会议同他有了较多的接触和联系。20世纪90年代中期以后我的研究兴趣集中于“计算实代数几何”，即不等式的机器与自动发现。如何将不等式的证明和发现的传统的和现代的思想、方法和技巧纳入机械化和自动化的框架并在计算机上有效地实现，这是我十几年来一直关注的课题。这期间我对学枝先生在不等式研究领域的精深造诣和丰厚积累有了更多的了解，更由衷钦佩先生数十年如一日锲而不舍地献身于一个毫无功利可图的科学目标。我相信，这部凝结了学枝先生数十年心血的宝贵专著，不仅有益于奥数研究，且必将对整个初等不等式研究领域产生重要影响。

杨　路

2009年6月10日于丽娃河畔

# 前言

不等式证明是国内外数学竞赛的一个重要课题，也是中学数学教学的重要内容之一. 不等式证明，其内容较为广泛，综合性较强，证法灵活性较大，难度较高，因此，它更是数学奥赛的热门课题，常受命题者青睐. 另外，在不等式证明过程中，往往要综合应用数学各方面知识和多种数学思维方法，无固定证明模式，因此，不等式的证明过程是对数学思维的很好训练. 正因为如此，长期以来，不等式证明在高中数学教学和数学竞赛中都备受人们的高度重视.

不等式的证明没有绝对的套路和统一的证法模式，常因题而异. 有时，同一道不等式证明题，会有许多种证法，有的证明还需多种方法并用，方可奏效. 对于同一道不等式，由于证法不同，其效果与作用也往往不同. 有的证法繁杂，有的证法简捷，有的可用通法证明，有的需用到某些技巧证明. 一般来说，简捷的初等的证法是比较好的证法，但也不乏有的较繁些的证法，它可有效地用到其推广后的不等式的证明，或由之牵出或拓广相关不等式. 在不等式证明中，有的证法带有共性，有的证法具有个性，还有的证法妙趣横生，它可以揭示某些不等式的本质，拓展其内涵，可挖掘出许多新颖且有价值的内容. 因此，在不等式证明中，探究其证法显得尤其重要.

证明不等式虽然没有定规定法，即没有“灵丹妙药”，但这并不等于说不等式的证明就无规可循，无法可依.掌握不等式的基本规律和一些基本证法（通法）是不等式证明的基本功.有了基本功，再进一步了解和掌握一些技巧证法，那么，对不等式的证明就更有把握了.

从不等式的证明思想来看，不等式证明总的说可以划分为两大类，一是用等价变换法证明不等式，二是用非等价变换法证明不等式.通常情况下，在不等式证明中，如用恒等变换法（含配方法）、求差比较法、变量代换法、数形结合法等，属于等价变换的证法范畴；用放缩法、应用基本（重要）不等式法、微积分法、调整法、数学归纳法、设参法、利用函数单调性等，属于非等价变换的证法范畴.在本书中，我们将着重举例介绍不等式证明中几种行之有效（尤其在证明难度较大的不等式时）的常用的证法及其灵活应用.本书在所收集的例题与练习中，注意到尽可能囊括不等式的各种证法（通法与技巧）.书中多数例题与练习的解答是笔者独立给出的，但也许有的解答人家早已给出，而笔者还不知道.当然，笔者不能保证所有证法都是最佳的，也可能是最笨的证法，但求能起到抛砖引玉之用.

本书初稿写于2004年2月，后经多次修改，完稿时间为2009年5月.本书中整理了笔者多年来的数学竞赛讲座稿和几十年来不等式研究的部分成果.其中问题一部分来源于国内外数学竞赛题或训练题，一部分来源于有关网站上提出的问题，凡明确来源的均作了说明.还有相当一部分是笔者的自创题（有的也许别人就已发现，而笔者却不知晓）或改造题，这些题，均注明了在刊物上发表的时间或创作时间.在选题时，注意到了代表性、新颖性、深刻性及挑战性，因此，本书中的不等式及其证明较有参考价值，但由于笔者水平有限，难免有许多疏漏或不尽如人意之处，望读者提出批评意见.

本书得以出版，笔者要感谢我的导师杨路教授在百忙中抽出时间为本书写序，特别要感谢导师杨路教授以及我的好友周春荔教授、杨世明老师、吴康副教授等长期以来对我的初等数学研究，尤其在不等式研究方面所给予的极大的鼓励、关心、支持和帮助，才使笔者在初等数学研究和不等式研究中有所收获.刘培杰老师为本书的出版付出了很多心血，哈尔滨工业大学出版社的编辑们为之付出了辛勤的劳动，还有我的儿子杨文花费了大量时间打印了本书的初稿，在此一并表示深切地感谢！

**杨学枝**

**二〇〇九年五月一日**

# 本书中常用的符号

(1) $\sum$——循环和. 如对于 $x,y,z$, $\sum x = x + y + z$, $\sum yz = yz + zx + xy$, $\sum x^2y = x^2y + y^2z + z^2x$ 等.

(2) $\prod$——循环积. 如对于 $x,y,z$, $\prod (y + z) = (y + z)(z + x)(x + y)$, $\prod (x^2 + y) = (x^2 + y)(y^2 + z)(z^2 + x)$ 等.

(3) $\Leftrightarrow$——等价于. 如 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geqslant 0$.

(4) $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$——在 $x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 中,每两个乘积之和. 如对于 $x_1,x_2,x_3,x_4$,有

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

(5) 在无特殊说明情况下, $\triangle ABC$ 的三边长为 $BC = a, CA = b, AB = c$,外接圆半径为 $R$,内切圆半径为 $r$,半周长为 $s$,与 $BC,CA,AB$ 边相切的旁切圆半径分别为 $r_a,r_b,r_c$.

# 目录

## 等价变换法证明不等式

# 第一章

等价变换法证明不等式是指我们在证明不等式时，对其条件或者结论作等价变换，或对整个命题作等价变换，或对其中某些元素或式子作换元代换等，将原命题经过多次等价变换，化归为我们所熟知的，易于证明的命题，这就达到了我们的证明目的. 等价变换是化归思想的具体体现.

**例1** 设 $x_i, y_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \geqslant 0$，$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j \geqslant 0$，$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_iy_j \geqslant 0$，$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)y_i \geqslant 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j} \cdot \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_iy_j} \tag{1}$$

当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ 时，式(1)取等号.

**证**

原式 $\Leftrightarrow x\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i \geqslant 2\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j} \cdot \sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_iy_j} \Leftrightarrow$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2\geqslant$$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j})^2\Leftrightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n}x_iy_j)(\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j)\geqslant$$

$$(\sum x_iy_i+2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j})^2$$

最后一式易由柯西不等式得到.

**注** 本例经等价变换,转化为易由柯西不等式证明的命题,思路源于

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

在式(1)中,当 $n=3$ 时,被人们称之为"母不等式",即以下命题.

**命题1** 设 $x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3\in\mathbf{R}$,且 $\sum x_1\geqslant 0,\sum y_1\geqslant 0,\sum x_1x_2\geqslant 0,\sum y_1y_1\geqslant 0$,则

$$\sum(x_2+x_3)y_1\geqslant 2\sqrt{\sum x_1x_2}\cdot\sqrt{\sum y_1y_2}\tag{2}$$

当且仅当 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$ 时,式(2)取等号.

命题1应用如下:

1.(匹多不等式)$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 边长分别为 $a,b,c$ 和 $a',b',c'$,面积分别为 $\Delta$ 与 $\Delta'$,则

$$\sum(-a^2+b^2+c^2)a'^2\geqslant 16\Delta\Delta'\tag{3}$$

当且仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 时,式(3)取等号.

提示:取 $x=-a^2+b^2+c^2,x'=-a'^2+b'^2+c'^2$,等,并应用三角形面积公式.

2.(程灵提出)若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 边长分别为 $a,b,c$ 和 $a',b',c'$,面积分别为 $\Delta$ 与 $\Delta'$,则

$$\sum(-a+b+c)a'\geqslant 4\sqrt{3\Delta\Delta'}\tag{4}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 均为正三角形时,式(4)取等号.

提示:在式(2)中取 $x_1=-a'+b'+c',y_1=-a+b+c$,等,并应用到

$$2\sum bc-\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$$

3.(安振平提出)若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 边长分别为 $a,b,c$ 和 $a',b',c'$,面积分别为 $\Delta$ 与 $\Delta'$,则

$$\sum (a-b+c)(a+b-c)a'^2 \geqslant 16\Delta\Delta' \tag{5}$$

当且仅当$\dfrac{a'^2}{a(-a+b+c)}=\dfrac{b'^2}{b(a-b+c)}=\dfrac{c'^2}{c(a+b-c)}$时,式(5)取等号.

提示:在式(2)中取$x_1=-a'^2+b'^2+c'^2, y_1=(a-b+c)(a+b-c)$等.

4.(自创题,1983.05.07)若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$边长分别为$a,b,c$和$a',b',c'$,面积分别为$\Delta$与$\Delta'$,则

$$\sum a(-a+b+c)(a'-b'+c')(a'+b'-c') \geqslant 16\Delta\Delta' \tag{6}$$

当且仅当$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$时,式(6)取等号.

提示:在式(2)中取$x_1=(a-b+c)(a+b-c), y_1=(a'-b'+c')(a'+b'-c')$等. 以上式(3)与式(6)有相同的取等号条件,试讨论他们左边式子的大小.

我们还可以由式(2)得到或证明更多关于三角形的一些不等式(如后面练习2,3).

**例2** (自创题,1990,12,23)设$x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbf{R}^+$,则

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_4}{x_1+x_2} \geqslant \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

当且仅当$x_1=x_3, x_2=x_4$时,式(7)取等号.

**证一** 记原式左边式子为$u$,右边式子为$v$,则

$$\begin{aligned}2u+4 &= \frac{2x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3}+\frac{2x_2+x_3+x_4}{x_3+x_4}+\frac{2x_3+x_4+x_1}{x_4+x_1}+\frac{2x_4+x_1+x_2}{x_1+x_2}= \\ &\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)+\left(\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_3+x_1}{x_4+x_1}\right)+ \\ &\left(\frac{x_2+x_4}{x_3+x_4}+\frac{x_4+x_2}{x_1+x_2}\right)= \\ &v+(x_1+x_2+x_3+x_4)\left[\frac{x_1+x_3}{(x_2+x_3)(x_4+x_1)}+\frac{x_2+x_4}{(x_3+x_1)(x_1+x_2)}\right] \geqslant \\ &v+\left(\sum x_1\right)\left[\frac{4(x_1+x_3)}{(\sum x_1)^2}+\frac{4(x_2+x_4)}{(\sum x_1)^2}\right]= \\ &v+4\end{aligned}$$

所以$u \geqslant \dfrac{1}{2}v$,即为式(7).

**证二** 式(7)$\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2+x_3}+\dfrac{x_2}{x_3+x_4}+\dfrac{x_3}{x_4+x_1}+\dfrac{x_4}{x_1+x_2} \geqslant$

$$\frac{x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_1}{x_1+x_2}=$$
$$4-\frac{x_3}{x_2+x_3}-\frac{x_4}{x_2+x_4}-\frac{x_1}{x_4+x_1}-\frac{x_2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_4}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_1}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_2}{x_1+x_2}\geqslant 4$$

此式在证法一中已证过.

**注** 1. 此例证明中进行了整体等价变换,切不可盲目用去分母方法证明.

2. 本例解答可参见《福建中学教学》,1991年第2期,杨学枝文:"循环不等式的证明及推广".

**例3** (自创题,1988,04,20)设$x,y,z,w,\lambda\in\mathbf{R}$,且$xy>0,zw>0,|\lambda|\leqslant 2$,则

$$\sqrt{x^2+y^2+\lambda xy}+\sqrt{z^2+w^2-\lambda zw}\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}} \tag{8}$$

当且仅当$\frac{\sqrt{x^2+y^2+\lambda xy}}{xy}=\frac{\sqrt{z^2+w^2-\lambda zw}}{zw}$时,式(8)取等号.

**证** 设$u=\sqrt{x^2+y^2+\lambda xy}, v=\sqrt{z^2+w^2-\lambda zw}$,则

$$\frac{u^2-x^2-y^2}{xy}+\frac{v^2-z^2-w^2}{zw}=0$$

即
$$\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}=\frac{(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}$$

再应用柯西不等式,有

$$(xy+zw)\left(\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\right)\geqslant(u+v)^2$$

即得式(8).

**注** 式(8)可参阅由吴康主编的《奥赛金牌之路》(高中数学)"第一章§6三角不等式"(P81~90),本节系杨学枝所写.

利用同上证法可得以下命题(自创题):

设$x,y,z,w\in\mathbf{R}^+,\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,则

$$|x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+w\sin\theta|\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}} \tag{9}$$

当且仅当$x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=w\cos\theta$时取等号.

式(9)为笔者首创,可参见同上吴康主编的《奥赛金牌之路》(高中数学)P82.

本命题在《中等数学》杂志社组织的数学竞赛命题评奖中,获一等奖. 本命题也可参见《中等数学》,1989 年第 2 期,杨学枝文:"对一个三角不等式的再探讨".

**例 4** (2000 年 IMO 41 届题 2)$a,b,c$ 是正实数,且满足 $abc=1$,求证

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1 \tag{10}$$

**证** 由 $abc=1$,可设 $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}(x,y,z\in\mathbf{R}^{+})$,此时式(10)便化为我们所熟知的不等式

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz$$

其中,$x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^{-}}$.

**例 5** (2001 年 IMO 42 届题 2)对所有正实数 $a,b,c$,证明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1 \tag{11}$$

**证一** 由已知可设 $x=\frac{bc}{a^2},y=\frac{ca}{b^2},z=\frac{ab}{c^2}$,则 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $xyz=1$,原式可化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}\geqslant 1$$

将上式两边平方,并注意到 $\sum\sqrt{1+8x}\geqslant 9,\prod\sqrt{1+8x}\geqslant 27$,$\sum x\geqslant 3$,即可得证.

**证二** 化为局部不等式.

因为
$$8bc\leqslant 4a^{\frac{2}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}}+\frac{4(bc)^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$$

所以
$$a^2+8bc\leqslant\left[a+\frac{2(bc)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right]^2$$

所以
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+2(bc)^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sum a^{\frac{4}{3}}}$$

类似还有二式,将所得三式左右两边分别相加,即得式(11).

**注** 这两例告诉我们,对于 $abc=1$,有时可设 $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}$;或 $x=\frac{bc}{a^2},y=\frac{ca}{b^2},z=\frac{ab}{c^2}$;或 $x=\frac{a^2}{bc},y=\frac{b^2}{ca},z=\frac{c^2}{ab}$ 等,化为齐次式证明.

**例 6** (自创题,1988,10,13)设同一平面上两个凸四边形的边长分别为 $a,b,c,d$ 和 $a',b',c',d'$,面积分别为 $\Delta$ 和 $\Delta'$,那么