

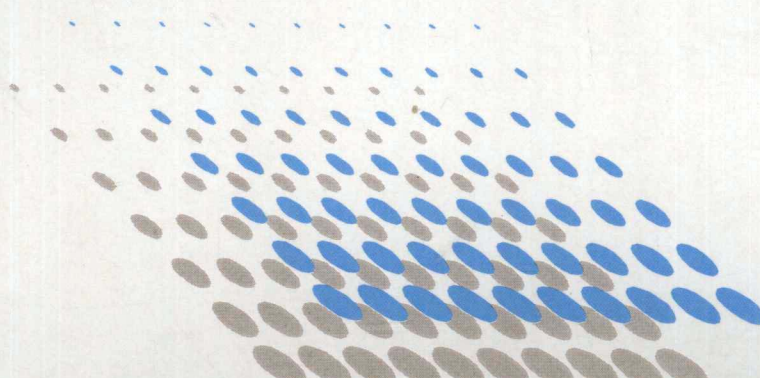


新编21世纪高职高专公共课系列规划教材

应用数学基础

(上册)

北京希望电子出版社 总策划
段 锋 主 编
谭仕炯 吴贤初 副主编





新编21世纪高职高专公共课系列规划教材

029
D921

应用数学基础

(上册)

北京希望电子出版社 总策划
段 锋 主 编
谭仕炯 吴贤初 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

《应用数学基础》是三年制中专和五年制高职各专业必修的一门公共课程。本书包括上下两册，上册是三年制中专和五年制高职的公用教材，下册是高职各不同专业的选修内容。上册的内容包括：直角坐标系，集合与不等式，函数，指数函数与对数函数，三角函数与反三角函数，直线与圆，数列，空间图形，排列组合与随机事件的概率；下册的内容包括：统计初步，复数，极限，导数及其应用，微积分初步。为方便学生对所学内容进行自测和检验，每一章都配有大量习题。

本书充分考虑了学生的年龄特点和接受能力，尽量做到由浅入深，循序渐进，简化理论，突出技能，通俗直观，难易适中。

本书可作为三年制中专和五年制高职的公共课教材，也可作为各高职高专学校相关专业的教材，还可供数学爱好者参考。

需要本书或技术支持的读者，请与北京清河6号信箱（邮编：100085）发行部联系，电话：010-82702660 010-82702658 010-62978181 转 103，传真：010-82702698，E-mail: tbd@bhp.com.cn。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础（上册）/段锋主编. —北京：科学出版社，
2005.8
新编21世纪高职高专公共课系列规划教材
ISBN 7-03-005506-3

I. 应... II. 段... III. 高等学校：技术学校—教材

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第038436号

责任编辑：王超辉 / 责任校对：孙 红
责任印刷：朝 阳 / 封面设计：刘孝琼

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京市朝阳印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2005年8月第一次印刷 印张：14 3/4
印数：1-3000册 字数：336 000

总定价：39.00元（本册24.00元）

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材编委会

主 任： 沈复兴 全国高等师范学校计算机教育研究会副理事长

北京师范大学信息科学学院院长

副主任： 唐汝元 湖南张家界航空职业技术学院副院长

刘小芹 湖北武汉职业技术学院副院长

刘南平 天津职业大学电子信息工程学院副院长

陆卫民 中国科学出版集团北京希望电子出版社社长

委 员： （按姓氏笔画为序）

邓泽银	田健龙	刘晓魁	向长喜	朱国军	吴贤初	周承华
欧阳广	罗文华	罗立红	胡红宇	胡远萍	赵征桥	徐刚强
郭国强	彭 勇	彭晓兰	曾凡秩	曾庆柏	蔡朝曦	魏道德

秘 书： 李节阳

总 序

一本好书,是人生前进的阶梯;一套好教材,就是教学成功的保证。为满足培养应用型人才的需要,我们成立了本编委会。在明确高职高专应用型人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系的框架下,我们组织编写了本套规划教材。

为了使本套教材能够达成目标,编委会做了大量的前期调研工作,在广泛了解各高职高专的教学现状、学生水平、培养目标的情况下,认真探讨了课程设置,研究了课程体系。为了编写出符合教学需求的好教材,我们除了聘请一批有关方面的知名专家、教授作为本套教材的主审和编委外,还组织了一批具备较高的学术水平、丰富的教学经验、较强的管理实践能力的学术带头人和骨干教师来承担具体编写工作,从而编写出特色鲜明、适用性强的教材,以真正满足目前高职高专应用型人才培养的需要。教材编写采用整体规划、分步实施、在实践中检验提高的方式,分期分批地启动编写计划。编写大纲以及教材编写方式的确定均经过编委会多次认真讨论,以确保该套教材的高质量和实用性。

本套规划教材的主要特点是:

(1) 以服务教学为最高宗旨,认真做好教学内容的取舍、教学方法的选取、教学成果的检验工作。本套教材在教学过程中的有益反馈,都将及时体现在后续版本。

(2) 充分考虑高职高专的人才培养目标,充分吸取已有教材的优点,并注意有所创新。在阐述好基本理论的基础上,突出务实;努力做到内容新颖,科学规范,结构严谨,理论联系实践。

(3) 教材中注意结合当前的具体问题做出分析,使学生能比较熟练地应用所学知识解决实际问题;从而努力做到既注重培养学生分析问题的能力,更注重培养学生解决问题的能力。

(4) 教材在内容编排上,力求由浅入深,循序渐进;举一反三,突出重点;语言简练,通俗易懂。采用模块化结构,兼顾不同层次的需求,在具体授课时可根据具体教学计划适当取舍内容。

(5) 大部分教材配有电子教案,从而更好地服务教学。

为编写本套教材,作者们付出了艰辛的劳动,编委会的各位专家进行了悉心的指导和认真的审定。丛书中参考、借鉴了国内外同类的优秀教材和专著,在此一并表示感谢。

我们衷心希望更多的优秀教师参与到教材建设中来,真诚希望广大教师、学生与读者朋友在使用本丛书过程中提出宝贵意见和建议。

若有投稿或建议,请发电子邮件到 textbook@bhp.com.cn。谢谢!

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材编委会

前 言

《应用数学基础》是三年制中专和五年制高职各专业必修的一门公共课程,是学生提高文化素质和学习专业知识的重要基础。

本书是为适应新形势下职业教育的特点而编写的。本书的编写以职业教育的培养目标为根本依据,遵循“突出重点,兼顾完备,强化技能,立足实用”的原则。我们认为,职业教育下的数学课程的开设目的,并不是要培养学生较高的数学素养,而应该把重点放在培养与各专业相适应的数学技能上,如图像分析、数形结合、简单的逻辑推理、图形计算、空间想象等等,因此,我们对这本书的内容的处理,在保证体系完备的前提下,对有的理论性较强或实用性不强的内容采取了简介、注释等不同的方式予以介绍,而对于各知识点的处理,也尽量体现理论为次、原理简单、突出应用的原则,即在使学生理解基本原理的基础上,会计算,会画图,会分析,会推理。本书的内容与九年制义务教育三年制初中数学相衔接。内容的编写充分注意了学生的年龄特点和接受能力,尽量做到由浅入深,循序渐进,简化理论,突出技能,通俗直观,难易适中。

本书包括上下两册,上册是三年制中专和五年制高职的公用教材,下册是高职各不同专业的选修内容。全书内容总授课时数为288节(包括习题课),三年制中专按4节/周开设两个学期,五年制高职按4节/周开设四个学期。上册的内容包括直角坐标系,集合与不等式,函数,指数函数与对数函数,三角函数与反三角函数,直线与圆,数列,空间图形,排列组合与随机事件的概率;下册的内容包括统计初步,复数,极限,导数及其应用,微积分初步。

书中的每一节,一般都在主要知识点后或这一节后配有“练习题”供课堂练习使用,每一节后配有“习题”,供课后作业使用。每一章后面都配有自测题,以供学生对本章所学内容进行自测和检验使用。

每一章后都有本章内容小结,包括本章的主要内容和应注意的问题,供复习本章时选用。

本书主编为段锋同志,副主编为谭仕炯和吴贤初同志。全书由段锋统稿。本套书第1、2章由杨芬同志编写,第3、4章由魏玉明同志编写,第5章由孙擎同志编写,第6章由余雪桂同志编写,第7章和第12章由段锋同志编写,第8章由郑文娟同志编写,第9章由袁秀玉同志编写,第10章由范良君同志编写,第11章由张兰同志编写,第13章由邓泽银同志编写,第14章由谭仕炯同志编

写。本书在编写过程中得到了有关领导和同志的大力支持，在这里向所有支持我们编写工作的领导和同志表示衷心的感谢。

由于经验不足，加之水平有限，同时我们希望在該套书的编写中体现出我们对职业教育下数学教学目的的理解，而这种理解当然是不成熟的和缺乏实践检验的，因此书中难免有错误和不足的地方，还有很多编写方法和处理方式值得商榷。真诚希望广大读者和同行提出宝贵意见，以便我们对该书的改进，我们将期待着广大读者和同行毫不吝惜的意见和建议，批评与指正。

编 者

目 录

第1章 平面直角坐标系	1
1.1 平面直角坐标系	1
1.2 一次函数与二次函数	3
1.2.1 一次函数及其图像	3
1.2.2 二次函数及其图像	4
本章小结	7
自测题1	9
第2章 集合与不等式(组)	10
2.1 集合	10
2.1.1 集合的概念	10
2.1.2 单元素集和空集	11
2.1.3 集合的表示法	11
2.2 子集、全集、补集	13
2.2.1 子集与真子集	13
2.2.2 全集与补集	14
2.3 交集与并集	16
2.3.1 交集	16
2.3.2 并集	17
2.4 区间	19
2.5 不等式	20
2.5.1 不等式的性质	20
2.5.2 一元一次不等式组	21
2.5.3 含绝对值符号的不等式	22
2.5.4 一元二次不等式	23
2.5.5 不等式 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ (或 < 0)	
的解法 ($c \neq 0$)	25
本章小结	26
自测题2	27
第3章 函数	29
3.1 函数概述	29
3.1.1 函数简介	29
3.1.2 函数的图像	32
3.1.3 函数的表示法	34
3.2 函数的单调性和奇偶性	36
3.2.1 函数的单调性	36

3.2.2 函数的奇偶性	38
3.3 反函数	40
3.3.1 反函数的概念	40
3.3.2 互为反函数的函数图像间的关系	42
本章小结	43
自测题3	45
第4章 指数函数与对数函数	47
4.1 根式与分数指数幂	47
4.1.1 根式	47
4.1.2 分数指数幂	48
4.2 指数函数	50
4.2.1 指数函数的定义	50
4.2.2 指数函数的图像及性质	50
4.3 对数	54
4.3.1 对数的定义	54
4.3.2 积商幂的对数	56
4.3.3 常用对数	58
4.3.4 自然对数	58
4.3.5 换底公式	59
4.4 对数函数	61
4.4.1 对数函数的定义	61
4.4.2 对数函数的图像和性质	62
4.5 函数的应用举例	65
本章小结	67
自测题4	69
第5章 三角函数与反三角函数	71
5.1 角的概念的推广与弧度制	71
5.1.1 角的概念的推广	71
5.1.2 弧度制	73
5.2 任意角的三角函数	76
5.2.1 任意角三角函数的定义	76
5.2.2 终边相同的角的三角函数的关系	77
5.2.3 象限角的三角函数值的符号	77
5.3 同角三角函数的关系	79
5.4 三角函数简化公式	82
5.4.1 $-\alpha$ 角和 $2\pi - \alpha$ 角的	

三角函数.....	82
5.4.2 $\pi + \alpha$ 角和 $\pi - \alpha$ 角的三角函数.....	83
5.5 正弦、余弦的加法定理.....	85
5.6 正弦函数.....	87
5.6.1 正弦函数的定义.....	87
5.6.2 正弦函数的图像.....	87
5.6.3 正弦函数的性质.....	88
5.7 正弦型函数.....	91
5.7.1 $y = A \sin x$ ($A > 0$) 的图像.....	91
5.7.2 $y = \sin \omega x$ ($\omega > 0$ 且 $\omega \neq 1$) 的图像.....	92
5.7.3 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图像.....	93
5.7.4 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, ($A > 0, \omega > 0$) 的图像.....	94
5.8 反三角函数.....	97
5.8.1 反正弦函数.....	97
5.8.2 反余弦函数.....	97
5.8.3 反正切函数.....	98
5.9 解斜三角形.....	100
5.9.1 正弦定理.....	100
5.9.2 余弦定理.....	101
本章小结.....	103
自测题 5.....	105
第 6 章 直线与圆.....	108
6.1 直线方程的概念.....	108
6.1.1 直线方程.....	108
6.1.2 直线的倾斜角和斜率.....	108
6.2 直线方程的几种常见的形式.....	111
6.2.1 点斜式方程.....	111
6.2.2 斜截式方程.....	112
6.2.3 一般式方程.....	113
6.3 两直线的位置关系.....	114
6.3.1 两直线平行和垂直.....	114
6.3.2 两直线的交点.....	116
6.4 线性规划简介.....	118
6.4.1 用关于 x, y 的一次不等式(组)表示平面区域.....	118
6.4.2 简单的线性规划问题.....	120
6.5 曲线方程与圆.....	123

6.5.1 曲线方程的概念.....	123
6.5.2 圆的方程.....	124
6.5.3 其他常见的曲线及其方程简介.....	125
本章小结.....	127
自测题 6.....	129
第 7 章 数列.....	130
7.1 数列简介.....	130
7.1.1 数列的概念.....	130
7.1.2 数列的通项公式.....	130
7.1.3 数列的分类.....	132
7.2 等差数列.....	133
7.2.1 等差数列的定义.....	133
7.2.2 等差数列的通项公式.....	133
7.2.3 等差中项.....	134
7.2.4 等差数列的求和公式.....	135
7.3 等比数列.....	136
7.3.1 等比数列的定义.....	136
7.3.2 等比数列的通项公式.....	137
7.3.3 等比中项.....	138
7.3.4 等比数列的求和公式.....	139
7.4 数列问题举例.....	140
本章小结.....	143
自测题 7.....	144
第 8 章 立体几何初步.....	145
8.1 平面的基本性质.....	145
8.1.1 平面及其表示法.....	145
8.1.2 水平放置的平面图形直观图的画法.....	146
8.1.3 平面的基本性质.....	146
8.2 空间两条直线的位置关系.....	149
8.2.1 两条直线的位置关系.....	149
8.2.2 两直线平行.....	150
8.2.3 两条异面直线所成的角.....	151
8.3 空间直线和平面的位置关系.....	154
8.3.1 直线和平面的位置关系.....	154
8.3.2 直线和平面平行.....	154
8.3.3 直线和平面垂直.....	155
8.3.4 直线和平面斜交.....	156
8.3.5 三垂线定理.....	157
8.4 平面和平面的位置关系.....	159

8.4.1 位置关系简介	159	9.3.3 组合问题举例	187
8.4.2 平面与平面平行	159	9.4 事件的概率	189
8.4.3 二面角	160	9.4.1 随机事件及其概率	189
8.4.4 平面和平面垂直	161	9.4.2 等可能性事件的概率	191
8.5 简单的空间几何体	163	9.5 互斥事件及其概率	196
8.5.1 多面体的概念	163	9.6 相互独立事件及其概率	199
8.5.2 多面体直观图的画法	164	9.6.1 相互独立事件同时发生的概率	199
8.5.3 旋转体及旋转体计算举例	165	9.6.2 独立重复试验	202
8.5.4 空间几何体的三视图	166	本章小结	205
本章小结	170	自测题 9	207
自测题 8	171	附录 习题参考答案	209
第 9 章 排列、组合和概率	174	第 1 章	209
9.1 分类计数原理与分步计数原理	174	第 2 章	209
9.1.1 分类计数原理	174	第 3 章	211
9.1.2 分步计数原理	174	第 4 章	212
9.2 排列	177	第 5 章	214
9.2.1 排列的定义及排列数公式	177	第 6 章	217
9.2.2 排列问题举例	180	第 7 章	218
9.3 组合	183	第 8 章	219
9.3.1 组合的定义及组合数公式	183	第 9 章	221
9.3.2 组合数的两个性质	186		

第 1 章 平面直角坐标系

数与形的结合便产生了平面解析几何, 17 世纪初, 著名数学家笛卡尔在平面内引入一个全新的研究工具——平面直角坐标系, 使平面内的点与有序数对建立了一一对应的关系, 从而实现了数与形的完美结合, 为现代数学的发展奠定了坚实的基础.

1.1 平面直角坐标系

图 1-1 是一条数轴, 数轴上的点与实数是一一对应的, 数轴上每个点都对应一个实数; 反过来, 任何一个实数都可用数轴上的一个点来表示. 这个实数叫做这个点在数轴上的坐标, 例如: 点 A 在数轴上的坐标是 3, 点 B 在数轴上的坐标是 -2, 如果我们知道了一个点的坐标, 那么这个点的位置便确定了.

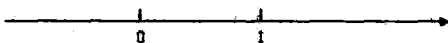


图 1-1

在教室里确定某个同学的座位时, 我们常说他在第几组第几排, 这便启示我们, 平面内点的位置可以用一对实数表示.

为了用一对实数表示平面内的点, 我们在平面内作出两条互相垂直单位长度一致且有公共原点的数轴组成平面直角坐标系 (图 1-2). 水平的数轴叫 x 轴, 也叫做横轴, 取向右为正方向; 铅直的数轴叫做 y 轴, 也叫做纵轴, 取向上为正方向. 两轴的公共原点 o 叫做坐标原点, x 轴和 y 轴称坐标轴, 建立了直角坐标系的平面叫做 (直角) 坐标平面. x 轴和 y 轴把坐标平面分成四个象限. 按逆时针方向依次叫做第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限 (如图 1-2 所示), 坐标轴上的点, 即 x 轴和 y 轴上的点, 不属于任何象限.

看图 1-2 中的直角坐标系, 假如 A 为平面内任意一点, 由点 A 向 x 轴作垂线, 垂足 M 在 x 轴上的坐标 a 叫做 A 点的横坐标; 由点 A 向 y 轴作垂线, 垂足 N 在 y 轴上的坐标 b 叫做点 A 的纵坐标. 横坐标写在前, 纵坐标写在后的有序数对 (a, b) 叫做 A 点的 (直角) 坐标.

例 1 写出如图 1-3 中 A 、 B 、 C 各点的坐标.

解 A 、 B 、 C 三点的坐标分别为 $A(2, 3)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 2)$.

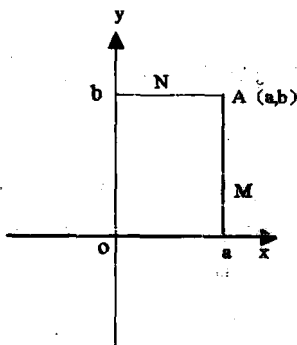


图 1-2

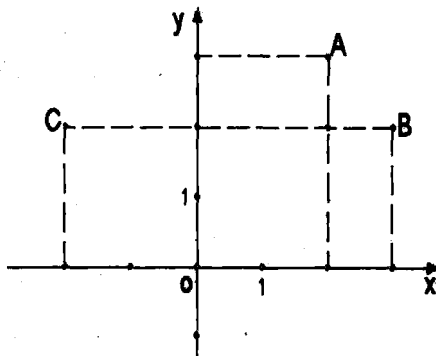


图 1-3

由于直角坐标平面内的点与有序实数对（即该点坐标）具有一一对应关系，因此以后我们常以点的坐标来直接表示坐标平面内的点，如点 $(1,2)$ 等。

练习

1. 在直角坐标系中，描出下列各点：
 $A(4,3)$, $B(1,-2)$, $C(-1,2)$, $D(3,2)$, $E(-3,0)$, $F(0,1)$
2. 观察一下各象限内的点以及坐标轴上的点，它们的横坐标与纵坐标各有哪些特点？
3. 点 $P(x,y)$ 在第 3 象限内， x 是正数还是负数， y 是正数还是负数？

习题 1-1

1. 指出下列各点所在象限或坐标轴：
 $A(3,-5)$, $B(-6,7)$, $C(0,6)$, $D(-3,5)$, $E(-2,0)$.
2. 填空
 - (1) 点 $P(5,3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是_____.
 - (2) 点 $P(3,5)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是_____.
 - (3) 点 $P(-2,-3)$ 关于原点对称的点的坐标是_____.
3. 根据下列条件，求正方形 $ABCD$ 的顶点 D 的坐标.
 - (1) $A(-4,0)$, $B(0,0)$, $C(0,4)$;
 - (2) $A(-1,-2)$, $B(4,-2)$, $C(4,3)$.
4. 以原点 O 为圆心，以 2 为半径画一圆，写出圆与坐标轴交点的坐标.
5. 各写出 3 个满足下列条件的点，并在坐标系中描出它们.
 - (1) 横坐标与纵坐标相等；
 - (2) 横坐标与纵坐标互为相反数；
 - (3) 横坐标与纵坐标的和是 6.

观察每一组点的位置，看看它们是否在同一条直线上。

1.2 一次函数与二次函数

1.2.1 一次函数及其图像

1. 一次函数的定义

我们在初中学过函数的概念. 在某一变化过程中有两变量 x 与 y , 如果对于 x 的每一个值, y 都有惟一的值与它对应, 那么就说变量 y 是 x 的函数, x 叫做这个函数的自变量.

在实际生活中, 我们随时都会遇到函数问题. 如, 在商店买杯子, 假设杯子的单价为 5 元. 购买 x 个杯子所付金额 $y=5x$, y 随 x 变化而变化, y 由 x 惟一确定, 当函数 y 可用自变量 x 的一次式表示时. 我们称这样的函数为一次函数.

定义 形如 $y=kx+b$ (k 、 b 是常数, 且 $k \neq 0$) 的函数叫做 x 的一次函数.

特别地, 当 $b=0$ 时, 一次函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 又叫做正比例函数.

例 2 一辆汽车起动时, 油箱内有油 100 升. 如果每小时耗油 6 升, 求油箱内的剩余油量 Q (升) 与行驶时间 t (小时) 的函数关系式.

解 t 小时耗油 $6t$ 升, 从原有油量 100 升减去 $6t$, 就是余油量 Q .

所以

$$Q=100-6t$$

2. 一次函数的图像

例 2 作出函数 $y=x$ 的图像.

解 给 x 一组值, 算出对应的 y 值, 列表如下

表 1-1

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

由上表中给出的有序实数对, 在直角坐标系中描出相应的点, 如图 1-4 所示. 给出的有序数对越多, 在坐标平面内所描的点也就越多. 函数 $y=x$ 中 x 可以取任意实数, 当 x 取遍所有实数时, 在坐标平面内, 可以描出无数多个点, 并且这无数个点组成如图 1-4 的一条直线.

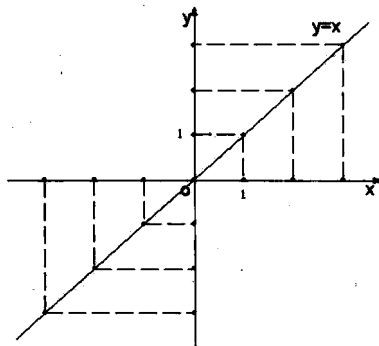


图 1-4

一般地, 直角坐标平面内, 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0, k, b$ 均为常数) 的图像都是直线.

因为两点确定一条直线, 所以画一次函数的图像时, 只要先描出两点, 再连成一条直线就可以了, 即给出 x 的两个值, 分别算出对应的 y 值, 再在直角坐标平面内描出这两对 x 和 y 的值为坐标的点, 再经过这两点画一条直线就可以了.

由我们对一次函数图像的描绘过程可以看到, 一次函数 $y=kx+b$ 的图像上所有点的坐标都是满足这个一次函数关系式的, 即把这条直线上点的坐标代入这个一次函数关系式, 能使这个函数关系式的左右两边相等.

例 3 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(3,5)$, $B(-2,-5)$, 求 k 和 b .

解 将 A, B 两点坐标分别代入函数关系式, 联立方程组, 得

$$\begin{cases} 3k+b=5 \\ -2k+b=-5 \end{cases}$$

解得

$$k=2, b=-1.$$

练习

1. 画出下列一次函数的图像:

(1) $y=x-1$;

(2) $y=3-2x$;

(3) $y=3x$.

2. 已知一次函数 $y=kx+3$ 的图像经过 $(5,6)$ 点, 求 k .

1.2.2 二次函数及其图像

1. 二次函数的定义

先看下面的例子:

周长为 60cm 的铁丝围成一个矩形方框 (如图 1-5 所示), 方框内面积 S (cm^2) 与矩形一边边长 l (cm) 的函数关系是:

$$\begin{aligned} S &= l(30-l) \\ &= -l^2+30l \quad (0 \leq l \leq 30) \end{aligned}$$

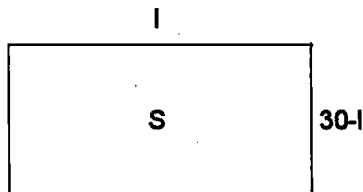


图 1-5

在这个例子中函数 S 是用自变量 l 的二次多项式表示的, 像这样的函数, 我们就称之为二次函数.

定义 形如 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 均是常数, 且 $a \neq 0$) 的函数叫二次函数.

如果对函数关系式 $y=ax^2+bx+c$ 右边配方, 还可以把二次函数的关系式写成:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

2. 二次函数的图像

例4 画出函数 $y=x^2$ 的图像.

解 给出 x 的一组值, 计算出对应的 y 值, 列表如表 1-2 所示:

表 1-2

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y=x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...

在坐标平面内描出相应的点, 再用光滑曲线将它们依次连接起来, 就得到了函数 $y=x^2$ 的图像 (如图 1-6 所示).

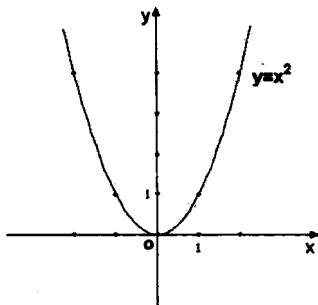


图 1-6

由所画图像可以看到: 函数 $y=x^2$ 的图像是一条开口向上且关于 y 轴对称的曲线, 我们称这种曲线为抛物线. 抛物线与它的对称轴的交点叫抛物线的顶点. 图 1-6 中的抛物线的顶点是坐标原点.

一般地, 当 $a>0$ 时, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 开口向上; 当 $a<0$ 时, 抛物线开口向下. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.

例5 指出下列抛物线的对称轴和顶点:

(1) $y=2(x+3)^2-5$;

(2) $y=-(x-1)^2-2$;

(3) $y=-x^2+2x$.

解 (1) 对称轴: 直线 $x=-3$, 顶点: $(-3, -5)$.

(2) 对称轴: 直线 $x=1$, 顶点: $(1, -2)$.

(3) 对称轴: 直线 $x=1$, 顶点: $(1, 1)$

例6 画出函数 $y=x^2+2x+3$ 的图像.

解 $a=1, b=2, c=3$

对称轴: 直线 $x=-\frac{b}{2a}$, 即 $x=-1$,

顶点坐标: $(-1, 2)$

开口方向: $a=1>0$, 开口向上.

以顶点横坐标为中心, 选取关于对称轴对称的 x 的值, 计算出对应的 y 值, 见表 1-3.

表 1-3

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	11	6	3	2	3	6	11	...

在直角坐标平面内描出对应点, 再用光滑曲线将它们依次连接就得到了函数 $y=x^2+2x+3$ 的图像 (见图 1-7).

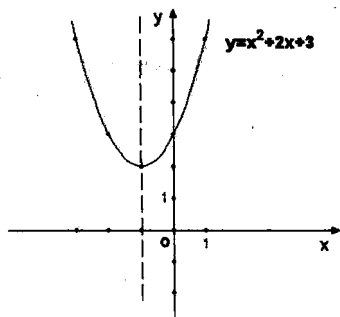


图 1-7

例 7 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴的交点坐标.

解 由于 x 轴上的点的纵坐标均等于 0, 所以抛物线与 x 轴的交点, 即抛物线上纵坐标等于 0 的点.

在 $y=x^2-4x+3$ 中, 令 $y=0$, 得

$$x^2-4x+3=0$$

解得

$$x_1=1, x_2=3$$

所以抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$ 点和 $(3, 0)$ 点.

一般地, 如果 $\Delta=b^2-4ac>0$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点; 如果 $\Delta=0$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个交点, 即抛物线的顶点; 如果 $\Delta<0$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点.

如图 1-8, 画出了两种不同情况下的抛物线与 x 轴的位置关系. 想一想, 当 $a<0$, $\Delta>0$ 时, 抛物线与 x 轴的位置关系是怎样的? 当 $a<0$, $\Delta<0$ 时又是怎么样的呢?

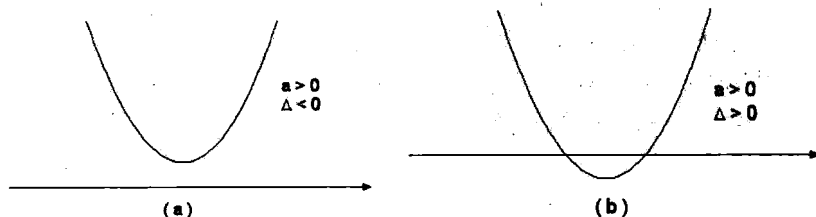


图 1-8

练习

1. 分别指出下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标:

(1) $y=4(x-3)^2+7$;

(2) $y=-5(x+2)^2-6$;

(3) $y=2x^2-4x+5$.

2. 画出函数 $y=x^2+1$ 的图像.

3. 求抛物线 $y=2x^2-3x-2$ 与 x 轴的交点.

习题 1-2

1. 画出函数 $y=3x+12$ 的图像, 并求:

(1) 当 $x=-2$ 、 -1 、 $\frac{1}{2}$ 时 y 的值;

(2) 当 $y=3$ 、 9 、 -3 时对应的 x 值;

(3) 方程 $3x+12=0$ 的解.

2. 已知直线 $y=kx+b$ 经过点 $(-4,9)$ 和点 $(6,3)$, 求 k 和 b , 并画出这条直线.

3. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标, 再描点画图.

(1) $y=-3(x-2)^2+9$;

(2) $y=4(x-3)^2-10$;

(3) $y=-2x^2+8x-6$;

(4) $y=2x^2-3x+4$.

4. 根据二次函数的图像上 3 个点的坐标, 确定函数的解析式:

(1) $(-1,3)$, $(1,3)$, $(2,6)$;

(2) $(-1,0)$, $(3,0)$, $(1,-5)$;

(3) $(-1,-22)$, $(0,-8)$, $(2,8)$.

本章小结

一、主要内容

1. 本章主要内容为平面直角坐标系, 一次函数和二次函数

2. 平面直角坐标系

(1) 平面直角坐标系的概念

在平面内取两条互相垂直, 单位长度一致且有公共原点的数轴, 规定水平的数轴叫 x 轴, 也叫横轴, 取向右为正方向, 铅直的数轴叫 y 轴, 也叫纵轴, 取向上为正方向. 这样的两条数轴就构成了直角坐标系. x 轴和 y 轴统称为直角坐标系的坐标轴, 两轴的公共原点 O 叫做坐标原点. x 轴和 y 轴统称为坐标轴. 建立了直角坐标系的平面叫做直角坐标平面. 直角坐标系的两条坐标轴把直角坐标平面分成 4 个部分, 每个部分都叫做一个象限, 按逆时针方向, 分别叫做第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限. 坐标轴上点的不属于任何象限.