○高等学校教材

概率论与数理统计

（第四版）简明本

□浙江大学 盛 骤 谢式千 潘承毅 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计
（第四版）简明本

浙江大学　盛骤　谢式千　潘承毅　编

高等教育出版社

内容提要

浙江大学盛骤等编《概率论与数理统计(第四版)》(以下简称第四版)是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，本书是第四版的简明本。本书内容包括概率论与数理统计两部分。与第四版比较，未列入"随机过程"和"选做习题"，并对第七章、第八章的内容和习题略加调整。

本书可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)各专业的教材；书中涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的所有知识点，可作为研究生入学考试的参考书；也可供工程技术人员、科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（第4版）简明体 / 盛骤，谢式千，潘承毅编. —北京：高等教育出版社，2009.8
ISBN 978-7-04-027491-2

Ⅰ.概... Ⅱ.①盛...②谢...③潘... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材② 数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 120369 号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 李 蕊 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 余 杨 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京七色印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年8月第1版
印　　张	21.25	印　　次	2009年8月第1次印刷
字　　数	400 000	定　　价	20.80 元

物料号　27491－00

前　言

《概率论与数理统计》(浙江大学盛骤等编)自1979年初版至今,已发行三十年。历经多年教学实践的检验,得到了国内广大院校和任课教师的认可。

《概率论与数理统计(第四版)》是普通高等教育"十一五"国家级规划教材。选用这一教材的院校类别较为广泛,专业各不相同,学时数多少不等,教学要求不相同。为了适应不同情况,我们编写了这一教材的另一个版本,称为《概率论与数理统计(第四版)简明本》。这一版本与前者比较未列入"随机过程"与"选做习题"两部分内容,并对第七章、第八章的内容和习题略加调整。与《概率论与数理统计(第四版)》配套的《概率论与数理统计附册　学习辅导与习题选解(浙大·第四版)》和《概率论与数理统计习题全解指南(浙大·第四版)》仍可使用。

诚恳地希望读者批评、指正。

盛　骤　谢式千　潘承毅

2009年5月

附：

第四版前言

本书自1979年3月初版至今，已发行近三十年。历经多年教学实践的检验，得到了国内广大院校和任课教师的认可，发行量为国内同类教材中最多的。

第四版是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，在第三版的基础上修订编写而成。在编写之前，高等教育出版社在全国有关高校作过相当广泛的调查，本版的编写吸取了相关的意见。

教材应该力求与时俱进。本版新增加了以下内容。

(1) 介绍了bootstrap方法的基本思想和方法，介绍了用bootstrap方法求参数点估计和区间估计的具体做法。bootstrap方法是近代统计中的一种用于数据处理的重要的实用方法。

(2) 新增了在数理统计中应用Excel软件一章。介绍了Excel软件及其在数理统计中的应用，举例介绍了应用VBA语言编写“宏”求解具体的数理统计问题。

(3) 新增了假设检验问题的p值检验法。新增了箱线图，箱线图能大致描述随机变量分布的一些重要性质，还能检测疑似异常点。

(4) 对第三版原有的例题和习题作了一些调整，增加了有关加强基本概念、基本运算的习题，在例题和习题的选择上扩大了涉及的范围，例如，农业、保险业、医学、商业、管理学、体育等等。

选用本教材的院校类别较为广泛，专业不一，学生程度不一。我们认为，教材内容要比教学大纲多一些，要比教师在课堂讲授的多一些，这样能照顾到各类学校各个专业的需要，能满足不同程度的学生的学习需要。

我们在目录中打上了一些*号，在学时限制下，有*号的内容可以不学。这些内容是相对独立的，删去不学不影响全书的讲授。在概率论与数理统计部分中打*号的内容有：基于截尾样本的最大似然估计；置信区间与假设检验之间的关系；样本容量的选取；秩和检验。此外还有偏度、峰度检验，以及这一版新增的部分或全部内容。随机过程部分视教学计划中有无这一门课决定取舍。

本次修订也包括配套辅助书，它们将与教材同时出版。

本书中新增的有关在数理统计中应用Excel软件的内容由浙江大学于渤教授编写。

本书由浙江大学范大茵教授审阅，对此我们表示衷心的感谢。

高等教育出版社蒋青、李蕊、兰莹莹同志为本版教材做了很多认真、细致的工作，对此，我们表示诚挚的感谢。

诚恳地希望读者批评、指正。

盛　骤　谢式千　潘承毅

2008年4月

目　录

第一章　概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的. 有一类现象,在一定条件下必然发生,例如,向上抛一石子必然下落,同性电荷必相互排斥,等等. 这类现象称为**确定性现象**. 在自然界和社会上存在着另一类现象,例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么;用同一门炮向同一目标射击,各次弹着点不尽相同,在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置. 这类现象,在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而在试验或观察之前不能预知确切的结果. 但人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性. 例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半,同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布,等等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,就是我们以后所说的**统计规律性**.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,我们称之为**随机现象**. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

§1　随机试验

我们遇到过各种试验. 在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语. 它包括各种各样的科学实验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 下面举一些试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察出现正面的次数.

E_4:抛一颗骰子,观察出现的点数.

E_5:记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

E_6:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_7:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

上面举出了七个试验的例子,它们有着共同的特点. 例如,试验 E_1 有两种可能结果,出现 H 或者出现 T,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T,这

个试验可以在相同的条件下重复地进行. 又如试验 E_6，我们知道灯泡的寿命(h) $t\geqslant 0$，但在测试之前不能确定它的寿命有多长. 这一试验也可以在相同的条件下重复地进行. 概括起来，这些试验具有以下的特点：

1° 可以在相同的条件下重复地进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**.

本书中以后提到的试验都是指随机试验.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

§ 2 样本空间、随机事件

(一) 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**.

下面写出 § 1 中试验 $E_k(k=1,2,\cdots,7)$ 的样本空间 S_k：

S_1：$\{H,T\}$；

S_2：$\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$；

S_3：$\{0,1,2,3\}$；

S_4：$\{1,2,3,4,5,6\}$；

S_5：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

S_6：$\{t\mid t\geqslant 0\}$；

S_7：$\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度(℃)，y 表示最高温度(℃). 并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

(二) 随机事件

在实际中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定某种灯泡的寿命(h)小于 500 为次品，则在 E_6 中我们关心灯泡的寿命是否有 $t\geqslant 500$. 满足这一条件的样本点组成 S_6 的一个子集：$A=\{t\mid t\geqslant 500\}$. 我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t\geqslant 500$.

一般，我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**[①]. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

特别，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 有两个基本事件$\{H\}$和$\{T\}$；试验 E_4 有 6 个基本事件$\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，S 称为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$称为**不可能事件**.

下面举几个事件的例子.

例 1 在 E_2 中事件 A_1："第一次出现的是 H"，即

$$A_1=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}.$$

事件 A_2："三次出现同一面"，即

$$A_2=\{HHH,TTT\}.$$

在 E_6 中，事件 A_3："寿命小于 1 000 h"，即

$$A_3=\{t\mid 0\leqslant t<1\,000\}.$$

在 E_7 中，事件 A_4："最高温度与最低温度相差 10℃"，即

$$A_4=\{(x,y)\mid y-x=10,T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}.$$ □

（三）事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法. 并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是 S 的子集.

1° 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B **相等**.

2° 事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当 A,B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

3° 事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅

① 严格地说，事件是指 S 中的满足某些条件的子集. 当 S 是由有限个元素或由可列无限个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 若 S 是由不可列无限个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后，每当我们讲到一个事件时都是假定它是容许考虑的那种子集. 读者如有兴趣可参考较详细的教材.

当 A,B 同时发生时,事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB.

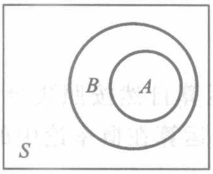
类似地,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件;称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

4° 事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**.当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

5° 若 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是**互不相容的,或互斥的**.这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生.基本事件是两两互不相容的.

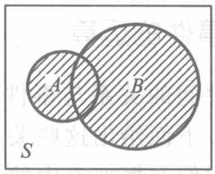
6° 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**.又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**.这指的是对每次试验而言,事件 A,B 中必有一个发生,且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=S-A$.

用图 1-1～图 1-6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算.例如,在图 1-1 中长方形表示样本空间 S,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,事件 B 包含事件 A.又如在图 1-2 中长方形表示样本空间 S,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,而阴影部分表示和事件 $A\cup B$.



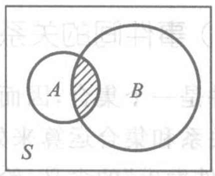
$A\subset B$

图 1-1



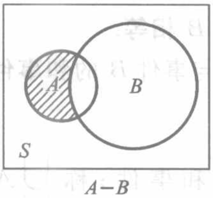
$A\cup B$

图 1-2



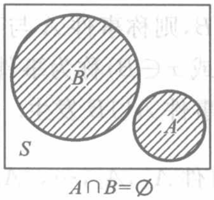
$A\cap B$

图 1-3



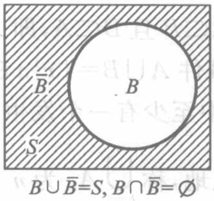
$A-B$

图 1-4



$A\cap B=\varnothing$

图 1-5



$B\cup\overline{B}=S,\ B\cap\overline{B}=\varnothing$

图 1-6

在进行事件运算时,经常要用到下述定律.设 A,B,C 为事件,则有

交换律: $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$\qquad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 2　在例 1 中有

$A_1\cup A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,TTT\}$，

$A_1\cap A_2=\{HHH\}$，

$A_2-A_1=\{TTT\}$，

$\overline{A_1\cup A_2}=\{THT,TTH,THH\}$. □

例 3　如图 1—7 所示的电路中，以 A 表示"信号灯亮"这一事件，以 B,C,D 分别表示事件：继电器接点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合，那么容易知道 $BC\subset A$，$BD\subset A$，$BC\cup BD=A$，而$\overline{B}A=\varnothing$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容. 又$\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}$.（左边表示事件"Ⅰ，Ⅱ至少有一个闭合"的逆事件，也就是Ⅰ，Ⅱ都不闭合，即 $\overline{B}$，$\overline{C}$ 同时发生.）□

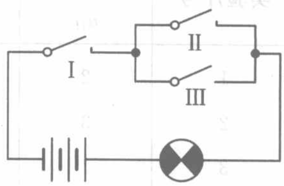


图 1—7

§3　频率与概率

对于一个事件（除必然事件和不可能事件外）来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小. 我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

(一) 频率

定义　在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，并记成 $f_n(A)$.

由定义，易见频率具有下述基本性质：

1° $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

2° $f_n(S)=1$；

3° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发

生的频繁程度. 频率大,事件 A 发生就频繁,这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大. 反之亦然. 因而,直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但是否可行,先看下面的例子.

例 1　考虑"抛硬币"这个试验,我们将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次,各做 10 遍. 得到数据如表 1－1 所示(其中 n_H 表示 H 发生的频数,$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率).

表 1－1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

这种试验历史上有人做过,得到如表 1－2 所示的数据.

表 1－2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出:抛硬币次数 n 较小时,频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大,但随着 n 增大,频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5. □

例 2　考察英语中特定字母出现的频率. 当观察字母的个数 n(试验的次

数)较小时,频率有较大幅度的随机波动.但当 n 增大时,频率呈现出稳定性.表1—3就是一份英文字母频率的统计表[①]:

表 1—3

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

大量试验证实,当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性,逐渐稳定于某个常数.这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性.我们让试验重复大量次数,计算频率 $f_n(A)$,以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的.

但是,在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,然后求得事件的频率,用以表征事件发生可能性的大小.同时,为了理论研究的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义.

(二)概率

定义 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间.对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的**概率**,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1° **非负性**: 对于每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

2° **规范性**: 对于必然事件 S,有 $P(S)=1$;

3° **可列可加性**: 设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件,即对于 $A_iA_j=\varnothing$,$i\neq j,i,j=1,2,\cdots$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{3.1}$$

① 这是由 Dewey G,统计了约 438 023 个字母得到的.引自 Relative Frequency of English Spellings (Teachers College Press,Columbia University,New York,1970).

在第五章中将证明，当 $n\to\infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由将概率 $P(A)$ 用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质.

性质 i　$P(\varnothing)=0$.

证　令 $A_n=\varnothing\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$. 由概率的可列可加性(3.1)得

$$P(\varnothing)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$. □

性质 ii（有限可加性）　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{3.2}$$

(3.2) 式称为概率的**有限可加性**.

证　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$. 由 (3.1) 式得

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

(3.2)式得证. □

性质 iii　设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A); \tag{3.3}$$

$$P(B)\geqslant P(A). \tag{3.4}$$

证　由 $A\subset B$ 知 $B=A\cup(B-A)$（参见图 1－1），且 $A(B-A)=\varnothing$，再由概率的有限可加性(3.2)，得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

(3.3)得证；又由概率的非负性 1°，$P(B-A)\geqslant 0$ 知

$$P(B)\geqslant P(A).$$ □

性质 iv　对于任一事件 A，

$$P(A)\leqslant 1.$$

证　因 $A\subset S$，由性质 iii 得

$$P(A)\leqslant P(S)=1.$$ □

性质 v（逆事件的概率）　对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证 因 $A\cup\overline{A}=S$,且 $A\overline{A}=\varnothing$,由 (3.2) 式,得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

性质 v 得证. □

性质 vi(加法公式) 对于任意两事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{3.5}$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ (参见图 1—2),且 $A(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,故由(3.2)式及(3.3)式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$ □

(3.5) 式还能推广到多个事件的情况. 例如,设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned} \tag{3.6}$$

一般,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用归纳法证得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned} \tag{3.7}$$

§4 等可能概型(古典概型)

§1 中所说的试验 E_1,E_4,它们具有两个共同的特点:

1° 试验的样本空间只包含有限个元素;

2° 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验是大量存在的. 这种试验称为**等可能概型**. 它在概率论发展初期曾是主要的研究对象,所以也称为**古典概型**. 等可能概型的一些概念具有直观、容易理解的特点,有着广泛的应用.

下面我们来讨论等可能概型中事件概率的计算公式.

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 由于在试验中每个基本事件发生的可能性相同,即有

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又由于基本事件是两两互不相容的. 于是

$$1=P(S)=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})$$