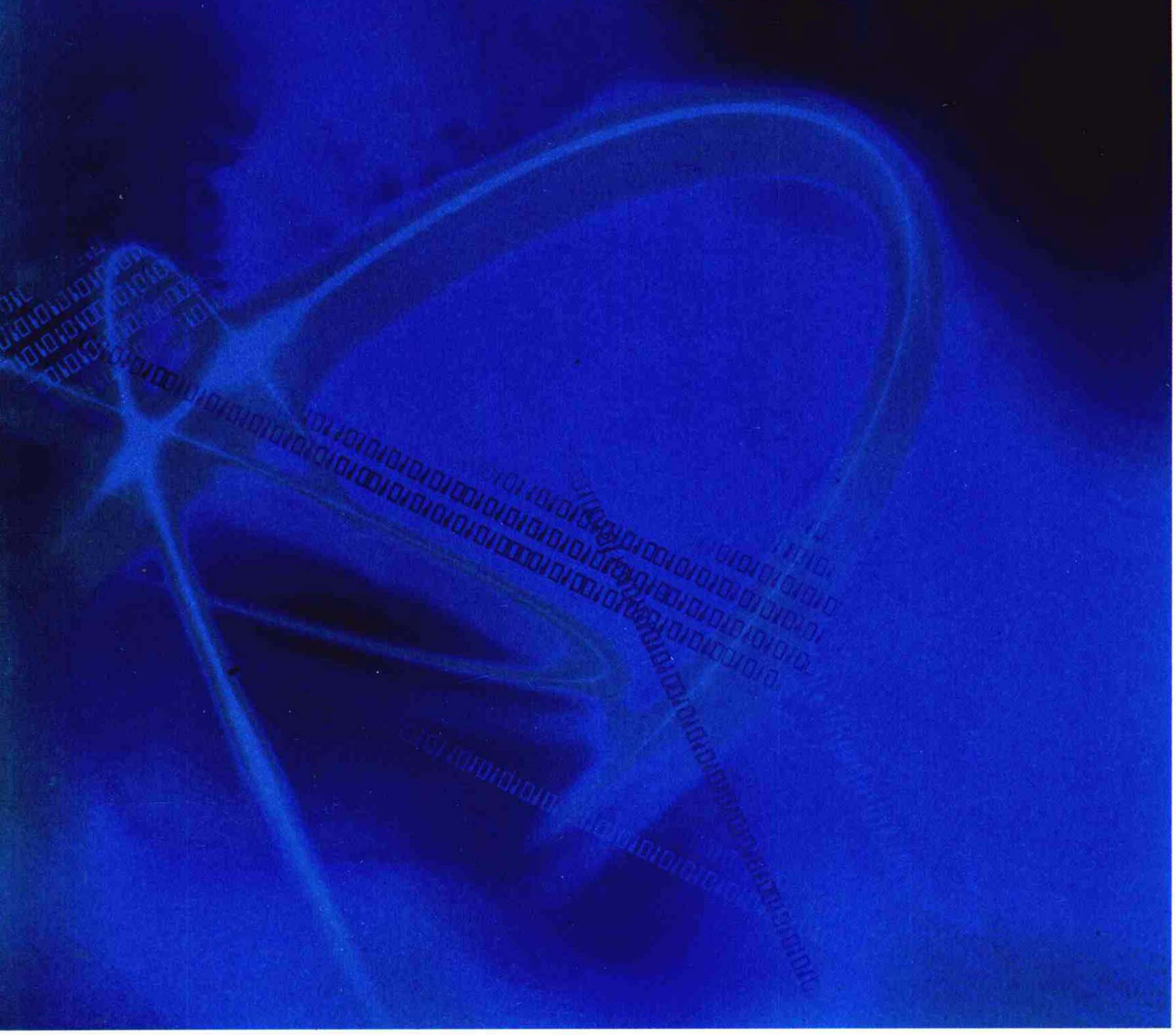
中等职业教育"十一五"规划教材

陈水林 主编

数学

SHUXUE



湖北科学技术出版社

中等职业教育“十一五”规划教材

数　　学

主　编　陈水林
副主编　李国梅　刘　迪

湖北科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学／陈水林主编. —武汉：湖北科学技术出版社，
2008.8
中等职业教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-5352-4192-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 数学课－专业学校－教材 Ⅳ.
G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第105396号

责任编辑：陈兰平　　封面设计：王　梅

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：027-87679468
地　　址：武汉市雄楚大街268号　　邮编：430070
（湖北出版文化城B座12-13层）
网　　址：http：//www.hbstp.com.cn

印　　刷：湖北开元印刷有限公司　　邮编：437100

787×1092　1/16　　印张 13.25　　296 千字
2008 年 8 月第 1 版　　2008 年 8 月第 1 次印刷
定价：28.00元

内 容 简 介

本书按照教育部最新制定的《中等职业学校数学教学大纲》,结合编者多年的教学实践编写而成,反映了当前职业教育培养高素质实用型人才数学课程设置的教学理念.

内容包括:集合与不等式、函数、三角函数、反三角函数、平面向量、复数、直线、二次曲线、数列、排列与组合、概率简介、立体几何和计算器的使用方法简介.本书每章节后都配有一定数量的习题,并在书后附有习题参考答案与提示.

本书可作为以初中毕业为起点的各类中等职业学校、五年制高职高专各专业的数学教材,也可作为成人院校的教材或参考书.

前　言

本书是按照新形势下中等职业教育数学教学改革的精神，针对中职学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写而成的. 本教材具有以下特色：

1. 依据教育部制定的《中等职业学校数学教学大纲》编写，力求突出实用性，坚持理论够用为度的原则. 在尽可能保持数学学科特点的基础上，注意到中等职业教育的特殊性，对教学内容进行了精选，淡化理论性和系统性，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，强化针对性和实用性，强化应用要落实到使学生能运用所学数学知识求解实际问题上.

2. 本教材吸取了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年我国出版的一批教材的成功经验，因此，本教材具有更强的实用性. 书中概念的引入尽可能从实际背景入手，讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，在考虑到学生实际、教学学时等实际情况的基础上，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂，不要求过分复杂的计算和证明.

3. 本教材注重基础知识、基本方法和基本技能的训练；注重对学生解决实际问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行了适当的归纳. 每节后习题的配备类型合理，深度和广度适中.

4. 本教材有一定的弹性，编入了一些选学内容，书中注有“*”号的内容可供不同专业、不同要求者选用.

5. 为培养学生使用计算工具的能力，书中编入了计算器使用的内容，书后附有计算器的使用方法简介.

本书由陈水林担任主编，由李国梅、刘迪担任副主编. 参编人员为罗浩、胡耀华. 本书由陈水林修改、统稿、定稿.

鉴于编者水平所限，书中不妥之处，恳请有关专家、同行和读者批评指正.

编者

2008 年 6 月

目　　录

第一章　集合与不等式

集合是数学中最基本的概念，它在现代数学和工程技术中都有非常重要的作用. 本章先介绍集合的一些基本概念和简单运算，然后介绍不等式的性质和解法以及简易逻辑.

第一节　集　　合

一、集合的概念

在日常生活中，我们常常看到一些对象构成的全体，例如：

(1) 某学校一年级的全体学生；

(2) 小于 10 的所有正整数；

(3) 所有的圆形；

(4) 与某个角的两边距离相等的所有点.

这里所用的"全体"、"所有"都是指具有某种特定性质的对象的全体.

一般地，我们把具有某种特定性质的对象的全体称为**集合**，简称**集**，集合中的各个对象称为该集合的**元素**，简称**元**.

例如，(1) 中，"某学校一年级的全体学生"组成一个集合，该学校一年级的每个学生都是这个集合的元素，这个集合只有有限个元素. (3) 中，"所有的圆形"组成一个集合，其中任何一个圆形都是这个集合的元素，这个集合有无限多个元素.

集合一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，集合中的元素用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，记作"$a\in A$"，读作"a 属于 A"；如果 a 不是集合 A 的元素，记作"$a\notin A$"，读作"a 不属于 A".

例如，上面的(2)中，用 A 表示"小于 10 的所有正整数"，则 $1\in A, 2\in A, -2\notin A, 11\notin A$.

由数组成的集合称为**数集**，对于一些常见的数集一般用特定的符号表示（表 1－1）.

表 1－1

数集	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记号	**N**	**Z**	**Q**	**R**

若上述数集中的元素都是正数，就在集合记号的右上角标以"＋"号；若数集中的元素都是负数，就在集合记号的右上角标以"－"号. 例如，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集，$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集.

一个集合，若它只含有限个元素，则称为**有限集**；若它含无限个元素，则称为**无限集**.

例如，上面的(1)、(2)表示的集合都是有限集，(3)、(4)表示的集合为无限集，**N**，**Z**，**Q**，**R** 也都是无限集.

只含一个元素的集合称为**单元素集**. 例如，只含一个数 0 的集合和方程 $x-1=0$ 的解组成

的集合都是单元素集. 不含任何元素的集合称为**空集**,记作$\varnothing$. 例如,方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合是空集$\varnothing$.

从上面的讨论,可以得出,集合中的元素有以下性质:

(1)**确定性** 任何一个对象或者是给定集合的元素,或者不是给定集合的元素;

(2)**互异性** 集合中任何两个元素都是不同的对象,相同的对象归入任何一个集合时,只能算为这个集合的一个元素;

(3)**无序性** 集合中元素间一般不考虑顺序.

二、集合的表示方法

集合的表示方法,常用的有列举法和描述法.

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号"{ }"内表示集合的方法称为**列举法**.

例如,小于4的自然数的集合可以表示为$\{0,1,2,3\}$,方程 $x^2-1=0$ 的解组成的集合可以表示为$\{-1,1\}$.

当集合的元素很多,不需要或不可能一一列出时,也可以只写出几个元素,其他的用省略号表示. 例如,小于1 000的自然数集合可以表示为$\{0,1,2,\cdots,999\}$,正偶数集合可以表示为$\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$.

2. 描述法

把集合中的元素所具有的特定性质描述出来,写在大括号"{ }"内表示集合的方法称为**描述法**. 一般采用的形式为

$$\{元素的一般形式 \mid 元素的特定性质\}.$$

例如,不等式 $x-2>3$ 的解组成的集合可以表示为

$$\{x \mid x-2>3\}.$$

例1 用列举法或描述法表示下列集合.

(1)中华人民共和国国歌的词曲作者;

(2)大于1小于2的所有实数;

(3)方程 $x^2-4=0$ 的根.

解 (1)用列举法表示成{田汉,聂耳}.

(2)用描述法表示成$\{x \mid 1<x<2\}$.

(3)用列举法表示成$\{-2,2\}$,也可用描述法表示成$\{x \mid x^2-4=0\}$.

有些集合的元素的特定性质不明显,难以概括,用描述法表示不便,宜用列举法表示,如例1中的(1). 有些集合中的元素不可能一一列举出来,或不便于一一列举出来,这样的集合宜用描述法表示,如例1中的(2). 有些集合既可用列举法表示,也可用描述法表示,如例1中的(3). 因此,在实际应用时,用集合的哪一种方法表示,要由具体问题来确定.

三、集合与集合的关系

1. 集合的包含关系

定义1 设 A 和 B 是两个集合,如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素,则称集合 A 为集合 B 的**子集**,记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

例如,设 $A=\{x,y\}$,$B=\{x,y,z\}$,则 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$;又如,对数集 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$,$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$.

对于一个集合 A,由于它的任何元素都属于集合 A 本身,因此 $A\subseteq A$. 也就是说任何集合都是它本身的子集. 此外还规定:空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$.

为了直观形象地表示集合之间的关系,通常用平面上的封闭曲线围成的图形表示集合,用图形中的点表示该集合的元素,这样的图形称为**文氏图**(Venn). 如图 1-1 所示,它直观形象地表示 $A\subseteq B$.

定义 2 如果集合 A 是集合 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称集合 A 为集合 B 的**真子集**,记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A(\text{也可以记作 } A\subsetneqq B \text{ 或 } B\supsetneqq A),$$

读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”.

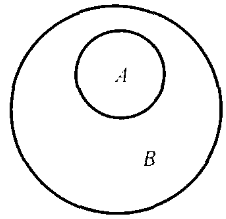


图 1-1

例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$,$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$. 显然空集 $\varnothing$ 是任何非空集合 A 的真子集,即 $\varnothing\subset A$.

2. 集合的相等

定义 3 设 A 和 B 是两个集合,如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作

$$A=B.$$

例 2 设集合 $A=\{-1,3\}$,集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$,显然集合 A 与 B 所含的元素均为 -1 和 3,从而 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,所以 $A=B$.

例 3 设集合 $A=\{a,b,c\}$,写出 A 的所有子集,并指出 A 的所有真子集.

解 集合 $A=\{a,b,c\}$ 的所有子集为

$$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}.$$

集合 A 的所有子集共 8 个,其中除 $\{a,b,c\}$ 外,均为集合 A 的真子集.

习 题 1-1

1. 指出下列各对象的全体能否组成集合:

(1)很大的实数; (2)一年的四个季节;

(3)某班级中个子高的同学; (4)中国人民解放军.

2. 用“$\in$”或“$\notin$”填空:

(1)8 ______ $\mathbf{N}$, -2 ______ $\mathbf{Z}$, π ______ $\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{R}^-$;

(2)0 ______ $\varnothing$, 0 ______ $\{0\}$, 4 ______ $\{x\mid x^3=64\}$;

(3)c ______ $\{a,b\}$,指南针 ______ {火药,指南针,造纸术,印刷术}.

3. 用列举法或描述法表示下列集合:

(1)大于 2 小于 10 的整数; (2)大于 0 小于 1 的实数;

(3)中国的直辖市; (4)直角坐标平面内第一象限内的点;

(5)能被 3 整除的自然数; (6)周长为 10cm 的三角形.

4. 用 $\in$、$\notin$、$=$、$\subset$、$\supset$ 填空:

(1)1 ______ $\{1,2\}$, $\{1\}$ ______ $\{1,2\}$, $\{1,2\}$ ______ $\{2,1\}$;

(2)$\varnothing$ ______ $\{1,2\}$, $\{0\}$ ______ $\varnothing$, $\varnothing$ ______ $\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$;

(3)$\mathbf{R}$ ______ $\mathbf{Q}$ ______ $\mathbf{Z}^+$, $\{x\mid x^2-4x+3=0\}$ ______ $\{x\mid x<5\}$.

5. 写出集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 的所有子集.

6. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$,写出集合 A 的符合下列条件的所有子集:

(1)元素都是质数; (2)元素都能被 3 整除;

(3)元素都是偶数; (4)元素中最大的数.

7. 讨论下列集合之间的包含关系:

(1)$A=\{$长方形$\}$, $B=\{$平行四边形$\}$; (2)$A=\{-1,1\}$, $B=\{x \mid |x|=1\}$;

(3)$A=\{x \mid x=4n, n\in \mathbf{N}$, 且 $n<5\}$, $B=\{0,4,12\}$.

第二节 集合的运算

一、交集

设集合 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{3,5,7\}$,$C=\{3,5\}$,容易看出,集合 C 中的每一元素既在集合 A 中,又在集合 B 中,对于这样的集合,一般地,定义如下.

定义 1 设 A 和 B 是两个集合,由所有既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B",如图 1-2 中的阴影部分.

由交集的定义,显然有

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

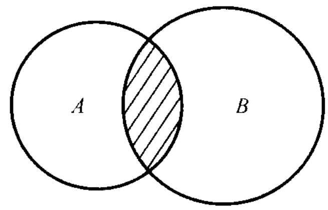


图 1-2

例 1 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{c,d,e,f\}$,求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{a,b,c\}\cap\{c,d,e,f\}=\{c\}$.

例 2 设 $A=\{$菱形$\}$,$B=\{$长方形$\}$,求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{$菱形$\}\cap\{$长方形$\}=\{$正方形$\}$.

例 3 已知 $A=\{(x,y) \mid 3x-2y=7\}$,$B=\{(x,y) \mid x+5y=8\}$,求 $A\cap B$.

解
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y) \mid 3x-2y=7\}\cap\{(x,y) \mid x+5y=8\}\\&=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}3x-2y=7,\\x+5y=8\end{cases}\right\}=\{(3,1)\}.\end{aligned}$$

例 4 设 $A=\{x \mid -1<x\leqslant 3\}$,$B=\{x \mid x>0\}$,求 $A\cap B$.

解
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x \mid -1<x\leqslant 3, \text{且 } x>0\}\\&=\{x \mid 0<x\leqslant 3\}\ (\text{图 } 1-3).\end{aligned}$$

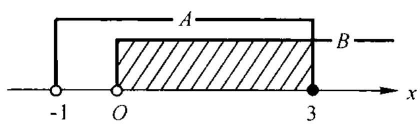


图 1-3

设 A,B 为任意集合,由交集的定义,易得出下列性质:

(1)$A\cap B=B\cap A$; (2)$A\cap A=A$;

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$; (4)$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$.

二、并集

设集合 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{3,5,7\}$,$C=\{1,3,5,7\}$,容易看出,集合 C 是由属于 A 或属于 B 的所有元素合并在一起而组成的集合,对于这样的集合,一般地,定义如下.

定义 2 设 A 和 B 是两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B",如图 1-4 中的阴影部分.

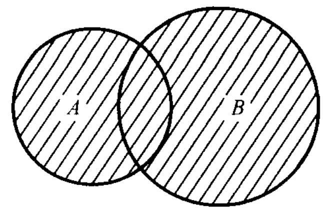


图 1-4

由并集的定义,显然有

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例 5 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,c,d\}$,$C=\{c,d,e\}$,求 $A\cup B$,$(A\cup B)\cap C$.

解 $A\cup B=\{a,b,c\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}$,

$(A\cup B)\cap C=\{a,b,c,d\}\cap\{c,d,e\}=\{c,d\}$.

例 6 设 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$,$B=\{x\mid 1<x<3\}$,求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x\mid -1\leqslant x<2 \text{ 或 } 1<x<3\}$

$=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$(图 1-5).

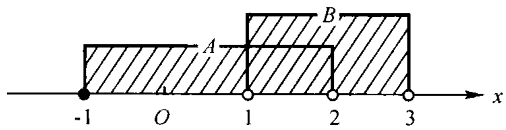


图 1-5

设 A,B 为任意集合,由并集的定义,易得出下列性质:

(1)$A\cup B=B\cup A$;　　(2)$A\cup A=A$;

(3)$A\cup\varnothing=A$;　　(4)$A\cup B\supseteq A$,$A\cup B\supseteq B$.

三、补集

定义 3 在研究集合与集合之间的关系时,这些集合常常都是某个给定集合的子集,这个给定的集合称为**全集**,记作 Ω. Ω 可用一个矩形的内部表示(图 1-6).

由全集的定义可知,全集包含了要研究的各个集合的全部元素. 例如,在求方程 $x^2-4=0$ 的实数解集时,实数集 $\mathbf{R}$ 就是一个全集,而方程的实数解集只是全集 $\mathbf{R}$ 的一个子集.

定义 4 设 Ω 为全集,A 为 Ω 的子集,则 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合称为集合 A 的**补集**,记作 $\overline{A}$(或 $\complement_{\Omega}A$),读作"A 补",如图 1-6 中的阴影部分.

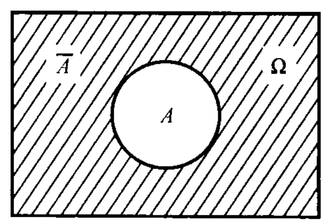


图 1-6

由补集的定义,显然有

$$\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega,\text{且 } x\notin A\}.$$

例 7 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,3,6\}$,求:$\overline{A}$,$A\cap\overline{A}$,$A\cup\overline{A}$.

解 $\overline{A}=\{2,4,5\}$,

$A\cap\overline{A}=\{1,3,6\}\cap\{2,4,5\}=\varnothing$,

$A\cup\overline{A}=\{1,3,6\}\cup\{2,4,5\}=\Omega$.

例 8 设 $\Omega=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid -2\leqslant x<1\}$,求 $\overline{A}$.

解 $\overline{A}=\{x\mid x<-2,\text{或 } x\geqslant 1\}$(图 1-7).

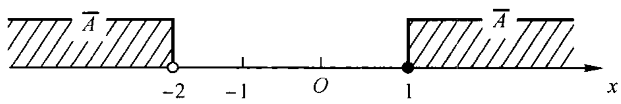


图 1－7

设 A 为任意集合，由补集的定义，易得出下列性质：

(1) $A\cap\overline{A}=\varnothing$；　　(2) $A\cup\overline{A}=\Omega$；　　(3) $\overline{\overline{A}}=A$.

习　题　1－2

1. 设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,1,2,3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.
2. 设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.
3. 设 $A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x\mid x^2-3x-4=0\}$，求 $A\cup B$.
4. 由下列已知集合 A 与 B，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

(1) $A=\{x\mid -2<x\leqslant 5\}$，　$B=\{x\mid 0\leqslant x<6\}$；

(2) $A=\{x\mid x<-3\}$，　$B=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$.

5. 设全集 $\Omega=\{a,b,c,d,e\}$，　$A=\{a,c\}$，　$B=\{a,d,e\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$.
6. 设 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$，　$B=\{2y,-4,x+4\}$，　$C=\{-1,7\}$，且 $A\cap B=C$，求 x，y.
7. 设全集 $\Omega=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，　$M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，　$\overline{N}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，求 N，$M\cup N$.
8. 设甲商店和乙商店分别经销 280 种商品和 200 种商品，其中有 100 种商品相同，求甲、乙两商店共有多少种商品.

第三节　不等式与区间

一、不等式的性质

不等式有下列性质：

性质 1（传递性）　如果 $a>b$，且 $b>c$，则 $a>c$.

性质 2（加法性质）　如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

性质 3（乘法性质）　如果 $a>b$ 且 $c>0$，则 $ac>bc$；如果 $a>b$ 且 $c<0$，则 $ac<bc$.

由性质 2 可得如下推论：

推论 1　如果 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

由性质 3 可得如下推论：

推论 2　如果 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$.

例 1　设 $a>0$，$b<0$，$x>y$，比较下列各式的大小.

(1) $x+3$ 与 $y+3$；　　(2) $x-2$ 与 $y-3$；

(3) ax 与 ay；　　(4) $\dfrac{x}{b}$ 与 $\dfrac{y}{b}$.

解　由不等式的性质易知

(1) $x+3>y+3$，　　(2) $x-2>y-3$，

(3) $ax>ay$，　　(4) $\dfrac{x}{b}<\dfrac{y}{b}$.

二、区间

介于两个实数之间的所有实数的集合称为**区间**. 这两个实数称为**区间的端点**.

设 a,b 为任意两个实数,且 $a<b$,规定:

(1)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b);

(2)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$;

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为**左开右闭区间**,记作 $(a,b]$;

(4)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 称为**左闭右开区间**,记作 $[a,b)$.

左开右闭区间与左闭右开区间统称为**半开半闭区间**.

上述这些区间都可以在数轴上表示出来(图 1-8).

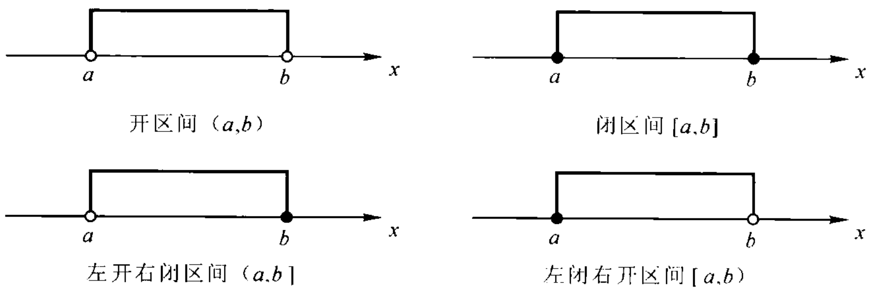


图 1-8

区间两端点间的距离称为**区间长**,区间长为有限的区间称为**有限区间**. 区间长为无限的区间称为**无限区间**. 关于无限区间,有如下规定:

(1)满足不等式 $x\geqslant a$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid x\geqslant a\}$,记作 $[a,+\infty)$;

(2)满足不等式 $x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid x\leqslant b\}$,记作 $(-\infty,b]$;

(3)满足不等式 $x>a$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid x>a\}$,记作 $(a,+\infty)$;

(4)满足不等式 $x<b$ 的所有实数 x 的集合 $\{x \mid x<b\}$,记作 $(-\infty,b)$;

(5)实数集 $\mathbf{R}$ 记作 $(-\infty,+\infty)$.

“∞”读作“无穷大”,“$-\infty$”读作“负无穷大”,“$+\infty$”读作“正无穷大”. 它们不是一个具体的数,只是一个记号.

上述无限区间也可以在数轴上表示出来(图 1-9).

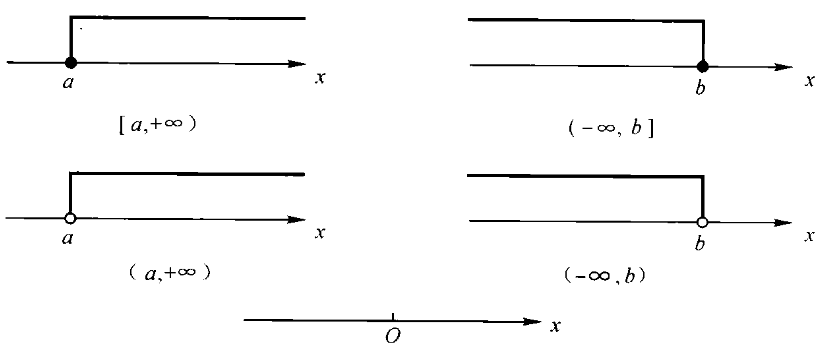


图 1-9

例 2 用区间表示下列集合：

(1) $\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$； (2) $\left\{x \middle| \begin{cases} 2x+3>1, \\ 5x-4 \leqslant 6 \end{cases}\right\}$；

(3) $\{x \mid x<2\}$； (4) $\{x \mid x \geqslant -5\}$.

解 (1) $\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$ 表示为 $[3,5]$.

(2) $\left\{x \middle| \begin{cases} 2x+3>1, \\ 5x-4 \leqslant 6 \end{cases}\right\} = \left\{x \middle| \begin{cases} x>-1, \\ x \leqslant 2 \end{cases}\right\} = \{x \mid -1<x \leqslant 2\}$ 表示为 $(-1,2]$.

(3) $\{x \mid x<2\}$ 表示为 $(-\infty,2)$.

(4) $\{x \mid x \geqslant -5\}$ 表示为 $[-5,+\infty)$.

习　题　1-3

1. 填空题(用“ > ”或“ < ”符号)：

(1) 如果 $a>b$，则 $a-b$ ________ 0，$b-3$ ________ $a-1$；

(2) 如果 $a>b$，则 $2a$ ________ $2b$，$\sqrt{3}-a$ ________ $\sqrt{3}-b$；

(3) 如果 $a>b, c+1<0$，则 ac ________ bc，ac^2 ________ bc^2；

(4) 如果 $a<b<0$，则 $|a|$ ________ $|b|$，b^2 ________ ab.

2. 用区间表示下列集合：

(1) $\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$； (2) $\{x \mid -5<x \leqslant -2\}$； (3) $\{x \mid -6 \leqslant x<0\}$；

(4) $\{x \mid x \geqslant 4\}$； (5) $\{x \mid x<-1\}$； (6) $\{x \mid x \neq 2, x \in \mathbf{R}\}$.

3. 解下列不等式或不等式组，其解集用区间表示：

(1) $2x+5<-1$； (2) $-3x+11 \leqslant 2$；

(3) $\begin{cases} x+4>0, \\ x<1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x+1 \leqslant 6, \\ 2-3x>-4. \end{cases}$

第四节　三种常见的不等式的解法

一、一元二次不等式

含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的不等式称为**一元二次不等式**.

任何一个一元二次不等式都可化为

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0 \quad (a>0)$$

的形式(不等式中的“ > ”或“ < ”也可换成“ ≥ ”或“ ≤ ”). 因此，在讨论一元二次不等式的解法时，我们只讨论 $a>0$ 的这类不等式就可以了. 下面来讨论一元二次不等式的解法.

1. 因式分解法

(1) 若不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 能写成 $a(x-x_1)(x-x_2)>0$，则可由

$$\begin{cases} x-x_1>0, \\ x-x_2>0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x-x_1<0, \\ x-x_2<0, \end{cases}$$

求出一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集.

(2) 若不等式 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 能写成 $a(x-x_1)(x-x_2)<0$，则可由

$$\begin{cases} x-x_1>0, \\ x-x_2<0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x-x_1<0, \\ x-x_2>0, \end{cases}$$

求出一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集.

例 1 解下列一元二次不等式:

(1) $x^2-6x+5>0$; (2) $2x^2+5x<3$.

解 (1) $x^2-6x+5>0$ 可变为 $(x-1)(x-5)>0$,从而

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x-1>0,\\x-5>0,\end{cases}\text{或}(\mathrm{II})\begin{cases}x-1<0,\\x-5<0.\end{cases}$$

解不等式组(Ⅰ),得 $x>5$,解不等式组(Ⅱ),得 $x<1$. 所以 $x^2-6x+5>0$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

(2)原不等式可化为 $2x^2+5x-3<0$,而 $2x^2+5x-3<0$ 可变为 $(2x-1)(x+3)<0$,从而

$$(\mathrm{I})\begin{cases}2x-1>0,\\x+3<0,\end{cases}\text{或}(\mathrm{II})\begin{cases}2x-1<0,\\x+3>0.\end{cases}$$

不等式组(Ⅰ)无解,解不等式组(Ⅱ)得 $-3<x<\frac{1}{2}$. 所以 $2x^2+5x<3$ 的解集为 $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$.

由例 1 的解题过程可知,若不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 的左边能因式分解成形式 $a(x-x_1)(x-x_2)$,则可考虑用因式分解法解不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$.

2. 图像法

先看下面例子.

例 2 解下列一元二次不等式:

(1) $x^2-2x-3>0$; (2) $x^2-2x-3<0$.

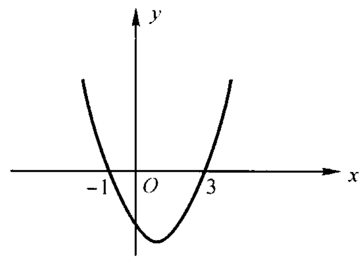
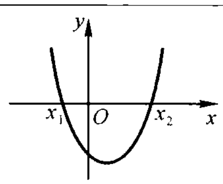
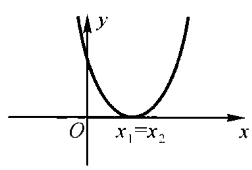
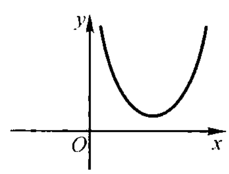


图 1-10

解 先作出 $y=x^2-2x-3$ 的图像(图 1-10),它是一条开口向上的抛物线,它与 x 轴的两个交点的横坐标是 $x_1=-1$,$x_2=3$. 从图 1-10 可看出,当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时,图像在 x 轴的上方,因此 $x^2-2x-3>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $x>3$,即其解集为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$. 类似地,由图 1-10 可得,$x^2-2x-3<0$ 的解为 $-1<x<3$,其解集为 $(-1,3)$.

一般地,一元二次不等式可根据二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像来求解,具体见表 1-2.

表 1-2

判别式 $\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像				
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根		有两个不相等的实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$	实数集 **R**
	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	(x_1,x_2)	空集 $\varnothing$	空集 $\varnothing$

例 3 解下列一元二次不等式：

(1) $2x^2-3x-2>0$； (2) $-x^2+2x+8\geqslant 0$；

(3) $x^2-2x+1>0$； (4) $x^2-x+3<0$.

解 (1)因为 $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times(-2)=25>0$，易求得方程 $2x^2-3x-2=0$ 的两实根为 $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=2$.

又因为 $a=2>0$，故抛物线 $y=2x^2-3x-2$ 的开口向上，作出该抛物线的草图（图 1－11(a)）. 由草图知，当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $x>2$ 时，$y>0$，所以原不等式的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

(2)先将原不等式化为 $x^2-2x-8\leqslant 0$.

因为 $\Delta=(-2)^2-4\times(-8)=36>0$，易求得方程 $x^2-2x-8=0$ 的两实根为 $x_1=-2, x_2=4$.

又因为 $a=1>0$，故抛物线 $y=x^2-2x-8$ 的开口向上，作出该抛物线的草图（图 1－11(b)）. 由草图知，当 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y\leqslant 0$，所以不等式 $x^2-2x-8\leqslant 0$ 的解集为 $[-2,4]$，从而得到原不等式 $-x^2+2x+8\geqslant 0$ 的解集亦为 $[-2,4]$.

(3)因为 $\Delta=(-2)^2-4\times 1=0$，易求得方程 $x^2-2x+1=0$ 的两相等实根为 $x_1=x_2=1$.

又因为 $a=1>0$，故抛物线 $y=x^2-2x+1$ 的开口向上，作出该抛物线的草图（图 1－11(c)）. 由草图知，当 $x\neq 1$ 时，$y>0$，所以原不等式 $x^2-2x+1>0$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(4)因为 $\Delta=(-1)^2-4\times 3=-11<0$，故方程 $x^2-x+3=0$ 无实数根.

又因为 $a=1>0$，故抛物线 $y=x^2-x+3$ 的开口向上，作出该抛物线的草图（图 1－11(d)）. 由草图知，对一切实数 x，该抛物线全在 x 轴的上方，所以原不等式 $x^2-x+3<0$ 的解集为空集 $\varnothing$.

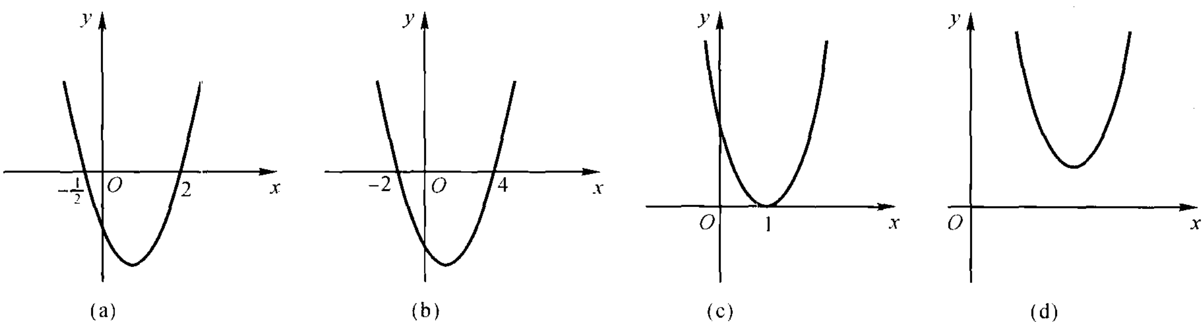


图 1－11

二、分式不等式

分母中含有未知数的不等式称为**分式不等式**.

下面举例说明形如 $\dfrac{ax+b}{cx+d}>0$ 或 $\dfrac{ax+b}{cx+d}<0\,(c\neq 0)$ 的分式不等式的解法.

例 4 解下列分式不等式：

(1) $\dfrac{x+2}{x-3}>0$； (2) $\dfrac{2x-1}{5-3x}>1$.