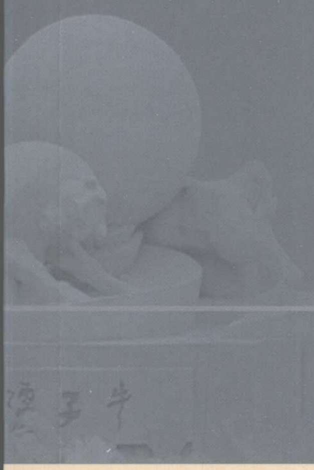
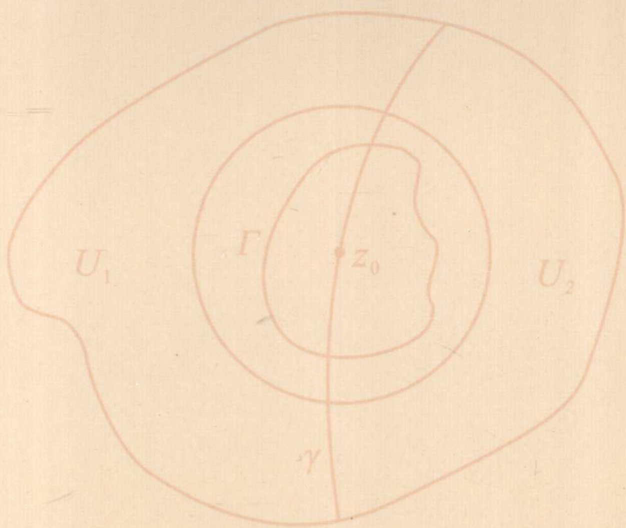
"十一五"国家重点图书 中国科学技术大学精品教材



简明复分析

第2版

龚 昇 编著



中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学精品教材

简明复分析

JIANMING FU FENXI

第 2 版

龚 昇 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书较系统地讲述了复变函数论的基本理论和方法.全书共分6章,内容包括:微积分,Cauchy积分定理与Cauchy积分公式,Weierstrass级数理论,Riemann映射定理,微分几何与Picard定理,多复变数函数浅引等.每章配有适量习题,供读者选用.本书试图用近代数学的观点和方法处理复变函数内容,并强调数学的统一性.例如,用微分几何的初步知识,对Picard大、小定理给出简洁的证明;强调变换群的概念,利用Pompeiu公式给出一维$\bar{\partial}$-问题的解,并用此来证明Mittag-Leffler定理与插值定理等,利用简单区域上的全纯自同构群证明Poincaré定理;对多复变数函数做了简明的介绍.

本书内容精练,深入浅出,逻辑严谨,注意复分析内容与近代数学的衔接,使传统内容以新的面貌出现.

本书可作为大学数学系、应用数学系本科生复变函数基础课教材,以及相关专业系科研究生、教师的教学参考书,也可供从事复分析、实分析研究及相关专业的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

简明复分析/龚昇编著.—2版.—合肥:中国科学技术大学出版社,2009.5
(中国科学技术大学精品教材)
"十一五"国家重点图书
ISBN 978-7-312-02169-5

Ⅰ.简… Ⅱ.龚… Ⅲ.复分析—高等学校—教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第041458号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
印刷 中国科学技术大学印刷厂
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 11
插页 2
字数 215千
版次 1996年5月第1版 2009年5月第2版
印次 2009年5月第3次印刷
定价 20.00元

总　序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年。为了反映五十年来办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下，共组织选题281种，经过多轮、严格的评审，最后确定50种入选精品教材系列。

1958年学校成立之时，教员大部分都来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又做研究的传统。同时，根据“全院办校，所系结合”的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中。五十年来，外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才。

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一。当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中做出重大贡献。建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养了一届又一届优秀学生。这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材，其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步

深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校。在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材。五十年来，进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术。

这次入选的 50 种精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校五十年教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。该系列精品教材的出版，既是向学校五十周年校庆的献礼，也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念。

侯建国

2008 年 8 月

第 2 版前言

本书写于 1992 年，当时我在美国加州大学圣地亚哥校区教书. 本书于 1996 年 5 月由北京大学出版社出版，印了 3000 册，不久就售罄. 1999 年 9 月重印了 7000 册. 我利用重印的机会，对全书进行了修订，更为重要的是写了一个很长的重印说明，用来说明写作本书的指导思想.

本书的英文版于 2001 年由 World Scientific Publishing Co. 出版，且成为 Best Selling 的书之一. 今年此书英文版又出了修订版，除了对原有章节进行仔细校订外，又加了两章：一章是椭圆函数，一章是 Riemann ζ 函数与素数基本定理.

现在印了 1 万册的中文版的书也早已卖完，于是在中国科学技术大学出版社出此书的第 2 版，作为对我工作了近一辈子的中国科学技术大学建校 50 周年的献礼.

本书的写作意图在第 1 版的前言及重印说明中已经说得很清楚了. 第 2 版依然坚持我在 15 年前的想法. 因此，在第 2 版中只做了部分的修改，以保持此书原有的风格. 由于此书是作为一学期的复分析课程的教材，现有的内容已经不易全部教完，所以在第 2 版中不再增加新的章节了.

由于本书与复分析传统教材的写法有些不同，以致此书引起了一些同行的兴趣. 也正因为与传统的写法有些不同，以致用此书作为教材进行教学要多费些功夫. 本书曾在中国科学技术大学、北京师范大学、香港中文大学、美国 Georgetown University 等国内外多所大学当做教材，同时也会有国内外众多的大学以此书作为复分析课程的教学参考书.

我深信，随着时间的推延，我对复分析这门课程的看法，会愈来愈多地被人们接受，以此书作为教材的大学也会增多，用这种看法来写复分析的教材也会愈来愈多.

最后，我深切感谢北京师范大学郑学安教授，本书第 2 版如何修改，他出力

最多.我也深切感谢中国科学技术大学出版社为本书第 2 版的出版所做的努力.

对本书中的缺点与毛病,祈读者不吝赐教,不胜企盼.

龚　昇

2008 年 10 月于北京

重印说明

在国内外，我都教过复变函数这门基础课，拟写一本这门课的教材的想法酝酿已久. 经过长时间的思索与考虑，直到 1992 年 9 月在美国教书时才写成这本很薄的小书，并于 1996 年 5 月由北京大学出版社出版. 出版前后，此书曾在中国科学技术大学、清华大学等几所大学做过教材，在教学过程中发现了一些问题. 如：习题配得不够，有些地方写得太简单，需要补上证明或多说几句话. 在这次重印出版时，对这些缺点做了些修改，而这是较易做到的. 但对本书最要修补的是：对本书写作的意图，并未做应有的足够的说明，原有的前言写得太简单了. 这就使我想起 1966 年我写的另一本大学基础课教材《简明微积分》. 这是我教了八年书之后（这八年中主要是教微积分），经过了很长时间考虑之后才写成的. 但写那本书的想法很长时间以来从未系统地叙述过，只是在 1966 年《自然辩证法研究通讯》上写了一篇短文，做了十分简要的说明. 这当然不可能引起人们的注意，直到 30 年后，我在中国科学技术大学以及其他一些大学，在一些会议上系统地讲述了我的想法，才引起人们的注意. 后来在这些讲话的基础上写了一本小册子《话说微积分》（中国科学技术大学出版社，1998 年 5 月出版），受到国内外数学界以及教与学微积分师生们较为广泛的欢迎. 因此，将写作本书的意图写出来，一方面可以使应用本书进行教学的师生们更好地理解本书的内容，另一方面也可以尽早地得到大家的指教.

复变函数论是一门历史悠久的学科，出版的教科书不计其数，其中不少是写得很好的. 为何我还要来再写一本教科书？写这本书的指导思想是什么？与传统的教材有哪些不同？如果没有明确的指导思想，写出来的教材难免是将他人写的教材修修补补，排列组合，人云亦云.

数学教材要现代化已是大势所趋. 但如何现代化，要不断探讨与尝试，才能逐步摸索出一条正确的途径. 将一些近代数学不断地放到基础课中去，使基础课教材愈写愈厚，这可能不是一种十分正确的途径. 基础课教材终究应该以讲基础的内容为主，本书试图将一些传统基础的内容尽可能用近代的观点与语言

来叙述与证明.由于数学的发展,一些较为近代的概念现在似乎应属于基础的范畴.基础的内涵当然是在不断地推陈出新的.无可置疑,这种尝试,必然会引起各种争议,但只有争议才能得到进步与发展.

强调数学的统一性,也为数学界中愈来愈多的人所倡导.这就是强调数学各分支之间的相互影响、相互渗透.也就是数学各分支之间你中有我、我中有你,数学本身是一个统一体.数学发展到了今天,将各分支的基础课相互割裂,强调"纯",这种时代似乎也应该过去了.

在这本不到200页的小书中,大部分内容的写法仍然是传统的,但同时在本书的部分内容中力图做到上述两点,这可体现在以下与传统教材有哪些不同的说明中.

1. 复分析是指复数域上的分析,更确切一些,是指复流形上的分析.作为大学基础课教材,由于历史的原因,复分析往往称为复变函数论或解析函数论,而现在出版的教材,往往称为复分析,因为这种说法更确切.例如,在本书中强调引入代数与几何等到教材中,所涉及的不仅仅是在论函数.

什么是大学教材的复分析?就是讨论复数域上的微积分.这是撰写本书的第一个观点.在这个观点下,大学复分析的内容应分为两个部分:一个部分是可以没有多大困难地由实数域上的微积分,这里指的是大学普通微积分,直接推广得到的.另一个部分是在原有实数域上的微积分所没有的,不能直接推广得到的.前一部分当然重要,但更为重要的是后一部分.本书的第1章,讲述的是前一部分.由于这些结果可以没有多大困难地直接推广得到,所以有的就述而不证.普通微积分的内容很多,人们当然没有必要及可能来将这些内容一一加以验证,是否可以推广到复数域上,只能抓住主要内容.什么是微积分中的主要内容?我在写《简明微积分》时已十分明确地提出,即微积分由微分、积分以及指出微分与积分是一对矛盾这三个部分所组成.而第三部分必须用外微分形式才能说清楚,后来在拙作《话说微积分》中对此做了详细的阐述.本书第1章就是按这种观点对微积分的一个十分简略的回顾,并讲了这些结果在复数域上的推广.其中复平面上的微积分基本定理就是复形式的 Green 定理(1.4 节定理 2),这为第2章建立 Pompeiu 公式做了准备.

2. 传统的复变函数论由三个部分组成,它们都是在实数域上的微积分,即大学微积分中所没有的,而是在复数域上所特有的.这三部分是:Cauchy 积分理论、Weierstrass 级数理论与 Riemann 几何理论.作为一本大学本科的教材,理应包含这三部分内容,这就是本书的第2章、第3章与第4章.本科教学大纲

所规定的内容在这 3 章中不但都有了，而且还多. 但如前所述，本书对这些传统内容的一些部分给予了现代化的处理，与传统教材有所不同.

从复变函数论是复数域上的微积分这个观点出发，微积分基本定理在复数域中成为复形式的 Green 定理. 由此立即导出 Cauchy-Green 公式，即 Pompeiu 定理(第 2 章 2.1 节定理 1). 这时候函数的实部与虚部属于 C^1，并不要求函数是全纯的，而 Cauchy 积分定理与公式成为它的简单推论. 为什么要先引入 Pompeiu 公式而不先引入 Cauchy 积分定理与公式？这是因为：(1) 从复变函数论是复数域上的微积分这个观点出发，这是顺理成章的. 从复形式的 Green 定理出发，不加任何条件，得出来的应是 Pompeiu 公式，而不是 Cauchy 积分公式. (2) 用 Pompeiu 公式可以得到一维 $\bar{\partial}$-问题的解(第 2 章 2.1 节定理 4)，这是由 Cauchy 积分公式所得不到的. 众所周知，$\bar{\partial}$-问题是近代偏微分方程理论中十分重要的部分，是近代数学中一个强有力的工具. 本书这样处理，还为了使读者能及早接触到近代数学的一点气息. 不仅如此，在本书的第 3 章中用 $\bar{\partial}$-问题的解证明了一系列定理，尤其是 Mittag-Leffler 定理(第 3 章3.4节定理 6). 一方面使定理的证明十分简单，另一方面显示了 $\bar{\partial}$-问题的威力. 传统的教材往往几乎只讨论解析函数，以致有些教科书的书名就叫做解析函数论. 但数学发展到今天，人们愈来愈认识到只讨论解析函数已是不够的了，用解析函数论做书名似乎也已过时，$\bar{\partial}$-问题的产生与应用就是支持上述看法的一个例子.

Pompeiu 定理及一维 $\bar{\partial}$-问题的解也许是第一次出现在国内的大学复分析的教材中. 用 $\bar{\partial}$-问题的解来证明 Mittag-Leffler 定理是我给出的，是第一次出现在大学教材中，作为用近代数学的观点来处理经典结果的一个例子. 在同一节中，另一个例子是用 $\bar{\partial}$-问题的解来证明插值定理(第 3 章 3.4 节定理 7). 这也许也是第一次出现在国内的大学教材中，由于这种证明十分简单明了，相信会被更多的作者采用. 例如，由史济怀、刘太顺编著的《复变函数》(中国科学技术大学出版社，1998 年出版)就将这两条定理及证明写入书中，而且这两条定理以及 Pompeiu 公式与 $\bar{\partial}$-问题的解作为书中两个特别要提到的内容之一而写在书的前言的开头. 此外，在本书中，作为 Pompeiu 定理的另一个应用，还给出了全纯函数的各阶导数在紧集上的一致估计(第 2 章 2.3 节定理 6 的(2)). 这在传统教材中，一般来说是不会写进去的. 但这是一条很深刻的定理，不用 Pompeiu 公式是难以证明的. 在第 2 章中写进这条定理，是因为一方面这条定理有不少应用，另一方面也让读者看看 Pompeiu 定理的威力，牛刀小试，就能得到如此深刻的定理.

3. 复分析中的基本定理之一是 Poincaré-Koebe 单值化定理. 这是一条纲领性的定理. 定理说:任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一:单位圆,复平面 $\boldsymbol{C}$,扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$. 这条定理是复分析中最重要和最美好的定理之一. 它与 Abel 定理、Riemann-Roch 定理成为经典 Riemann曲面的三条最重要的定理. 这样的定理在数学中并不多见. Poincaré-Koebe定理的证明已超出了大学基础课的范围,不能给出,但定理本身必须在大学教科书中叙述,并强调它的意义. 本书第 3 章 3.3 节中就叙述了这条定理. 这条定理有很多的应用,但在一本大学基础课教材中,最重要的意义是:这条定理确立了单位圆、复平面 $\boldsymbol{C}$ 及扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$ 在复分析中的重要地位. 对这三种区域进行探讨成为复分析中极为重要的组成部分,所以我们说这是一条纲领性的定理.

在本书中,给出了这三种区域的全纯自同构群. 在第 2 章 2.5 节中给出了单位圆的全纯自同构群,在第 3 章 3.3 节中给出了 $\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{C}^*$ 的全纯自同构群. 一个区域的全纯自同构群是十分重要的,这是因为全纯自同构群在很大程度上决定了区域上的一些分析的性质. 在本书中就是用单位圆的全纯自同构群定出 Poisson 核作为这方面的例子. 在本书中突出这三个全纯自同构群的另一个目的是:这三个群是最为简单又是十分重要的李群. 当然,在这本大学基础课教材中完全没有必要引入严格的李群的概念,但突出这三个简单的李群并给出它们的应用,等到读者接触到严格的李群的定义时,就会有"似曾相识"的感觉,且有一些简单的具体的李群在胸,对李群的抽象定义就易于了解与掌握了. 为了同一个目的,在本书的第 6 章中,给出了 $\boldsymbol{C}^2$ 中单位球与双圆柱上的全纯自同构群,并用它们证明了多复变中经典的 Poincaré 定理. 这样可以让读者在胸中又多了两个简单的具体的李群的例子.

如果说在本书第 2 章和第 3 章中给出这三个区域的全纯自同构群是指出了复分析与代数的关系,那么在本书的第 5 章中给出的复几何是指出了复分析与几何的关系.

Poincaré-Koebe 定理可以更确切地说成:

(1) 任一单连通的双曲型的开 Riemann 曲面都可以共形映射到单位圆;

(2) 任一单连通的抛物型的开 Riemann 曲面都可以共形映射到复平面 $\boldsymbol{C}$;

(3) 任一单连通的闭 Riemann 曲面都可以共形映射到扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$.

在第 5 章中,对这三个区域分别建立起它们的几何. 在单位圆上引入双曲

度量,即 Poincaré 度量;在 C 上引入抛物度量,即欧氏度量;在 C^* 上引入椭圆度量,即球度量.并对这三种复几何进行了简单的讨论,而这些内容现在应属于基础的部分了.

4. 上一段的讨论是涉及复分析与几何、代数的相互关系的一个例子,是说明数学的统一性的一个很好的事例.这里所说的几何不是初等几何,而是指微分几何、复几何.初等几何可以用来证明复平面上的一些初等的定理,但这属于中学教学的内容,当然不应该在本书中涉及.

用一个个事例来说明数学的统一性,不失为一种好的办法.尤其是在大学的基础课教材中,希望通过这些事例,让读者初步建立起这种看法.除了以上的例子外,本书中还有其他的一些事例.

在本书第 2 章 2.5 节中,给出了 Schwarz-Pick 引理,这使得经典的 Schwarz 引理有了微分几何的意义.这条引理说:将单位圆映到单位圆内的全纯映射,使两点之间的 Poincaré 度量不增.这是一个初等、自然而漂亮的对经典的 Schwarz 引理的几何解释.这是复分析与微分几何相互关联的一个很好的例子.

在第 5 章中用几何的方法来证明著名的 Picard 定理又是一个说明数学的统一性的很好事例.这种写法在国内或许也是首次出现在复分析的教材中.1938 年,Ahlfors 建立了著名的 Ahlfors-Schwarz 引理.这条引理是作为近代微分几何进入复分析的标志而载入史册的,这是一条有历史意义的重要的引理.在本书第 5 章中,由此引理出发证明了重要的 Picard 定理.在传统的教材中,Picard 定理是不讲的,原因是这条定理原有的证明较难,要涉及椭圆模函数,讲起来较麻烦.但是 Picard 定理在分析中实在太重要了,而用微分几何的方法使证明变得较为简单,易于为大学生所了解与接受,所以在本书第 5 章中证明了这条定理.一方面让读者学到了重要的 Picard 定理,另一方面也让读者看到应用近代数学的微分几何的威力是何等之大,更重要的是使读者再一次体会到数学的统一性,各个分支之间的确是我中有你、你中有我啊!

在本书第 2 章 2.6 节中的 Poisson 积分公式是体现数学的统一性的又一事例.在上一段中已经说到:Poisson 积分公式是由单位圆的全纯自同构群得来的,本书之所以不用传统的分析的方法来给出这个公式,而用全纯自同构群来给出,是让读者能够看到群尤其是李群的威力.用了这样简单的群的概念,就十分利索地得到了重要的 Poisson 公式.而 Poisson 公式从复分析的角度来看,这是一种积分表示;从偏微分方程的角度来看,这是 Laplace 方程的 Dirichlet 问

题的解;从调和分析的角度来看,这是函数的 Fourier 级数的 Abel 求和. 同一件事,从不同的数学分支的角度来看,成了不同的事物. 这种观点十分重要,这正体现了数学各分支之间的相互渗透,这也体现了数学的统一性. 这种观点,常常导致从一个分支的结果产生出另一个分支的结果. 分支之间的成果相互启发,相互促进. 当然,Poisson 积分公式不过是体现这种思想的一个很简单的例子. 在大学教材中也只能举些简单的例子来体现这种思想. 在数学中,这种例子是很多的,有的是十分重要的. 典型的例子如 Riemann 曲面,从复分析的观点来看,Riemann 曲面是一维复流形,更确切些,是一维 Kähler 流形;从代数几何的观点来看,Riemann 曲面是一条代数曲线;从代数数论的观点来看,Riemann 曲面是一个一元代数函数域. 各种不同分支的交叉点又往往是数学中富有强大生命力、且极为重要的部分.

5. 本书的最后一章——第 6 章讲了一点多复变数. 这在传统教材中是不讲的,但数学发展到了今天,讲一点多复变数,既有必要又有可能. 在本书中讲一点多复变数的主要目的不是为了向读者初步地介绍多复变数的基本知识,因为如果要这样做,必须费很多的篇幅,作为一本大学基础课教材,当然无此必要. 本书之所以要讲一点多复变数的真正目的,是为了让读者更深刻地认识单复变数. 因为本书终究是一本大学单复变数的教材呀! 为此目的,当然要选择能使读者更深刻认识单复变数的有关多复变数的定理. 本书只选了如下的两条:一条是 Poincaré 定理;一条是 Hartogs 定理. 之所以选择这两条定理,是因为这两条定理的证明都不难,但又是很深刻的基本定理,而且能使人们更深刻地认识单复变数. Poincaré 定理说:$\boldsymbol{C}^2$ 中的超球与双圆柱不能全纯等价.(对 $\boldsymbol{C}^n$ 也一样成立,为叙述方便计,讨论 $\boldsymbol{C}^2$ 已足够,对 $\boldsymbol{C}^n$ 中定理的证明与 $\boldsymbol{C}^2$ 的情形无任何本质的区别.)这条定理告诉我们:Riemann 映射定理(拓扑等价导出全纯等价)只在单复变数中成立. 在这之前,在普通微积分中不可能有此定理;在这之后,在多复变数中也不可能有此定理. Riemann 映射定理只是单复变数中所特有的. 因此,这是一条十分深刻的定理. 作为复分析中三个组成部分之一的几何理论,同样也是单复变数中所特有的. 企图推广单复变数的几何理论到高维,必须另辟蹊径. 本书中介绍的另一条多复变数的定理是 Hartogs 定理. 这条定理说:若 $\Omega \subseteq \boldsymbol{C}^n$ $(n \geqslant 2)$ 为域,K 为 Ω 中的紧致子集,且 $\Omega \backslash K$ 连通. 若 f 在 $\Omega \backslash K$ 上全纯,则 f 可以全纯开拓到 Ω. 这条定理告诉我们:作为复分析中三个组成部分之一的 Weierstrass 级数理论,其核心部分的 Laurent 级数理论,在多复变数的情形一般是不可能存在的. 因此,用级数来刻画奇性,如何

定义亚纯函数等，在多复变数的情形，必须得另行考虑.因此，Weierstrass 级数中的核心部分，即 Laurent 级数是单复变数中所特有的.在其前，在普通微积分中不可能有；在其后，在多复变数中也不可能有；只有在单复变数中有.因此，这是十分深刻的理论.也就是说，作为单复变数三个组成部分中的两个组成部分的出发点，Riemann 映射定理与 Laurent 级数是前无古人，后无来者的！本书是一本基础课教材，讲这样两条多复变数的定理已经足够了，再多讲就会偏离主题了.

在大学复变函数论中写一点多复变数的做法，在国内也许是首次出现在本书中，这种做法会被更多一些教材的编写者所采用.如前面提到的史济怀、刘太顺写的书，在该书的最后一章，也是讲一点多复变数，主要讲的也是 Poincaré 定理与 Hartogs 定理.他们将把多复变数写入教材中作为他们编著的书的两个特别要提到的内容的另一个而写在书的前言中.

6. 在本书重印版中，增加了三个附录.直接目的是为了弥补第 1 次印刷中的一些不足之处，但更主要的是：这三个附录中讲的都是近代数学中最为基本与重要的内容，而这在传统的复变函数论的教材中往往是不讲的.

第 2 章的附录是单位分解定理，这在证明本章 2.3 节定理 6 的(2)时要用到.如果不标出单位分解定理而直接写出一个函数来替代也可以过去，但单位分解定理在近代数学中太重要了，而且以后还会不断地用到，因此，宁肯花点篇幅写下这条定理与证明.

第 4 章的附录是 Riemann 曲面，给出了 Riemann 曲面的严格定义，这是为了与本章 4.5 节相呼应的.作为一本大学基础课教材，不可能花很多篇幅去深入探讨 Riemann 曲面的理论.但是 Riemann 曲面在近代数学中实在太重要了，它是一维复流形，不涉及流形恐怕很难涉及近代数学.写上这个附录，让读者能对 Riemann 曲面、复流形多一点认识，这也是好的.

第 5 章的附录是曲率，直接的目的是为了说明 5.1 节中(1.2)式定义的 K 为何是曲率.众所周知，曲率是微分几何中的核心部分，它在近代数学中扮演着极为重要的角色.因此，即使在大学微分几何课中学习了曲率的概念，也仍然值得花些篇幅来将这个重要的概念再说一遍.

这三个附录，如教学时间允许，则讲之；如教学时间不够，则略之.

不言而喻，加上这三个附录的另一个目的，是为了再次体现数学的统一性.

以上说了些本书与传统教材的不同之处，但我应重说一遍，这终究是一本大学基础课教材，本书的大部分写法仍然是传统的，与传统教材的不同之处只

是很有限的.在这不到 200 页的小书中,这些有限的不同之处却是撰写中最费心思的部分.我衷心盼望广大师生在用本书进行教学时充分注意到本书试图体现数学教学现代化以及数学统一性的愿望.

本书的写作意图曾在一些国内的学术会议上做过简要的介绍,反映较为热烈.本书出版后受到国内外广大同行的关注,不少年长的同行给了很多鼓励,更令人兴奋的是一大批年轻数学家对此书表现出较大的热情.不少大学用作教材或主要教学参考书,国外有的年轻的留学生看了此书后说:“如回国教复变,就用这本书,不要自己再写教材了.”本书对这门基础课教材的影响正在显现,例如,史济怀、刘太顺两位先生用本书作为教材进行教学后,在他们编著的教材中就有十分明显的反映.他们书中的亮点,大多可在本书中找到其相似或相同之处.相信会有更多的学校将采用本书作为教材或教学参考书.第 1 次印刷的 3000 册书已售罄,这些都促使我在重印本书时进行修订.为了保持本书原有的风格,只对本书的内容做了一些小的修改,为了使大家更好地使用本书,就唠唠叨叨地写下了这篇较长的重印说明.一些曾用此书作为教材进行教学的老师,将在教学过程中发现的问题与意见告诉了我,在此,向他们表示感谢.无可置疑,在重印的本书中,依然有很多缺点与毛病,还望广大师生及行家指正.

龚 昇

1999 年 9 月于北京

前　言

这是一本大学数学系本科基础课复变函数论的教材，与目前国内通行的传统教材相差不是太多.

复变函数论已有两百多年的历史，是数学中既古老又成熟的一门学科.到目前为止，不知已出版了多少本内容精彩的教材，这些书各领风骚数十年.由于数学不断地前进，人们不断地用一些新的观点来重新认识与发展这门学科中原有的概念与理论，以致用各种不同观点撰写的新的教材不断涌现，以推陈出新.

这些年来，常有机会在美国的一些大学数学系教书，耳濡目染，接触到一些用各种观点所撰写的复变函数论教材，从而产生写一本中文的、与国内传统的复变函数论教材稍有一点不同的、有一点近代观点的教材的想法.这个想法由来已久，所以当 1991 年 4 月我准备回国时，就向中国科学技术大学数学系提出了这个想法，希望教一次这门基础课.回国后教学的实践是:来听课的学生愈来愈多，二、三、四、五年级都有，最后竟有四十多人.在教学效果上似乎皆大欢喜，不同年级的学生都感到各有收获.我很感谢这些来听课的学生，他们以及中国科大数学系一些同事的鼓励，促使我将讲稿出版.我也顾不得自己学问的浅薄，就按照讲课时的讲稿，略加修改补充，写成此书，这就是此书的来源.

这是一本基础课教材，有关领导部门规定的教学大纲中要求的内容大致上全有了，但这也是多少反映我对这门基础课的一些看法的教材，难免与国内传统的教材略有一点不同之处，好在允许每个人可以有不同的学术观点.如此书能抛砖引玉，则属喜出望外了.

复变函数论是复数域上的微积分，一些可以由实数域没有多大困难地推广到复数域上去的微积分的概念与结论，在本书中往往简略地叙述，或述而不证(见第 1 章).本书着重探讨一些在实数域上所没有，而在复数域上特有的那些性质与结果.

微分几何、微分方程、多复变数函数论以及其他一些近代数学的飞速发展，对单复变函数论的重新认识与发展影响较大.用各种观点来重新认识及撰写复