21世纪

大学课程辅导丛书

线性代数与空间解析几何

典型题

（第2版）

解法·技巧·注释

龚冬保　魏战线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

21世纪
……程辅导丛书

线性代数与空间解析几何

典型题

解法·技巧·注释

（第2版）

龚冬保　魏战线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
·西安·

内容提要

本书通过对近400道线性代数和空间解析几何典型例题的分析、求解和注释，归纳总结了本课程分析处理问题的基本方法和常用的解题技巧，所选的每道题都力求有较新颖、独特的解法，以使读者能够举一反三、触类旁通，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为“线性代数与空间解析几何”课程的教学参考书，也可供报考硕士研究生的读者复习应考之用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何典型题 解法·技巧·注释(第2版)/龚冬保，魏战线编著. -西安:西安交通大学出版社，2005.9
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1255-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①龚…②魏… Ⅲ.①线性代数-高等学校-解题②立体几何:解析几何-高等学校-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第23338号

书　　名:线性代数与空间解析几何典型题 解法·技巧·注释(第2版)
编　　著:龚冬保　魏战线
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路25号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷:陕西友盛印务有限责任公司
字　　数:322千字
开　　本:787 mm×1092 mm　1/16
印　　张:13.25
版　　次:2005年9月第2版　2005年9月第1次印刷
印　　数:0 001～5 000
书　　号:ISBN 7-5605-1255-0/O·156
定　　价:16.00元

第 2 版前言

本书自出版以来，受到了广大读者的欢迎。近年来，将线性代数与解析几何相结合的教学改革受到广大师生的关注，硕士研究生入学考试中，线性代数与空间解析几何结合的综合题也已成为重要的考核内容，因此，本书越来越受到读者的重视。考虑到当前教学、考研的要求，参考了广大读者的意见，我们对本书作较大修改。主要修改方面如下。

(1) 在体系上，一是将原书第 3 章分开为两章，即将 n 维向量、线性空间与线性方程组分开。

(2) 在编写体例上，不再将客观题单独作为一节，而是按内容来编写例题，使例题安排更符合教学顺序，以便和教学同步，使读者用起来更方便。

(3) 在第 1 版的基础上增、删了约 30% 的题，主要是增加了不少更基本的典型例题。

(4) 对第 1 版中的错误作了订正。

读者的认可是对编者的勉励。我们衷心地希望能将本书越改越好，以报答读者的关爱。欢迎读者朋友多提意见和建议。

编 者

2005.7. 于西安

第 1 版前言

本书选编了近 400 道线性代数和空间解析几何的典型题为例题，力图讲清楚分析问题的方法及本课程的解题技巧。在正文中，我们的叙述较为精炼，而将一些有关的知识、方法、解题思路放在旁注之中，以启迪读者思维。因此，读者在阅读本书时，一定要边看书边自行推导，以掌握本书所讲的解题方法与技巧，并用这些方法去解更多的题，这对学好本课程必有益处。本书在每章后都有一套独立作业题，是为读者检查学习效果而设置的。

数学分析、线性代数、空间解析几何相结合，特别是代数与几何相结合，是本书的又一特点。以三维的几何空间为模型，去理解和发展一般 n 维线性空间的理论，思路较为自然；理解了一般 n 维空间的理论后，将它们用于几何空间，就能高屋建瓴，势如破竹。编者从 1990 年起，便在西安交通大学的一些班级，作了这种代数与几何相结合的教学改革试验，反映这方面试验的相应教材《线性代数与空间解析几何》将与本书同时出版。

本书可作为线性代数与空间解析几何课程的教学参考书，也可供准备参加硕士研究生入学考试的读者参考。由于不同专业的读者对本课程的要求不同，因此，本书的部分内容超出了一般专业教学的要求，凡属这些内容的题或章、节，我们都加了星号“*”，没有学过与之相关内容的读者，可以不读这些部分。

本书第 1、2、3 章由龚冬保编写，第 4、5、6、7 章由魏战线编写，最后由龚冬保统稿。限于编者水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编者

2000 年 2 月

目　录

第 1 章　矩阵与行列式

1.1　矩阵

1-1　若 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & b & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 5 \\ -1 & c_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}$ 则 $\boldsymbol{C}=$ ________.

解　由 $4+1-a=5$　得 $a=0, c_{11}=4$.

而 $-1+2b+6=-1$ 得 $b=-3$，$c_{22}=-7$.　　填：$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$

对 4 阶以下的矩阵乘法一定要熟悉.

1-2　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，若 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ ________.

解　设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}$，故 $x^2=y^2=z^2=1$，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=x^2+y^2+z^2=3$.　　填：3

$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$ 本题应当能一眼看出答案.

1-3　设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

解　$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，故 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

本题求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$ 最简单的方法是用待定系数法。设

$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　得　$a+b=0$ 及 $2b=1$，即得所求。

对求 2 阶、3 阶矩阵的逆矩阵应当特别熟悉.

填：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1-4 设 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\Delta\neq 0$，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

请将本题的结论当公式记住.

解 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 则 $A_{11}=a_{22}$，$A_{12}=-a_{21}$，$A_{21}=-a_{12}$ 及 $A_{22}=a_{11}$，故可直接填答案。

填：$\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

1-5 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{\qquad\qquad}$.

解 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}.$

得 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}=\boldsymbol{E}$

填：$\dfrac{\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}}{3}$

注意"逆"是乘法逆运算。要求 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$、$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$ 这几个题所用的方法都是想办法得到 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 的因式，它们与某矩阵的积为单位矩阵.

1-6 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 及 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\underline{\qquad\qquad}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}$

故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\dfrac{\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}}{2}=\boldsymbol{E}$

填：$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1-7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$

则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=\underline{\qquad\qquad}$.

解 于已知的等式两边左乘 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 及移项，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E},\ (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}}{2}$$

填：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

1-8 设 A、B 为同阶可逆矩阵，则( ).

(A) 存在可逆矩阵 P、Q，使 $PAQ=B$

(B) 存在可逆矩阵 P，使 $P'AP=B$

(C) 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

(D) 存在可逆矩阵 C，使 $BC=CA$

解 由于 A 可逆，故 A 等价于 E(单位矩阵)，同样 B 等价于 E，因此 A、B 等价. 故(A)成立. 选(A)

排除(B)可设 $A=E$，B 不是对称矩阵；排除(C)可设 $A=E$，$B\neq E$；(D)与(C)是同一答案.

1-9 设 A、B、$A+B$、$A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$( ).

(A) $A^{-1}+B^{-1}$　　(B) $A+B$

(C) $A(A+B)^{-1}B$　　(D) $(A+B)^{-1}$

解 本题作为选择题，可以猜测选(C)，再验证：

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+B^{-1})(A(A+B)^{-1}B)\\&=E(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B\ (\text{将 }E\text{ 写为 }B^{-1}B)\\&=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}B=E\end{aligned}$$

选(C)

本题只要令 $A=B=E$ 即可排除(A)、(B)；排除(D)可令 $A=B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=B^{-1}\neq A$，从而 $[A^{-1}+B^{-1}]^{-1}\neq(A+B)^{-1}$.

1-10 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，

$$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix},$$

$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则必有( ).

(A) $AP_1P_2=B$　　(B) $P_1P_2A=B$

(C) $AP_2P_1=B$　　(D) $P_2P_1A=B$

解 选(B). 首先，用初等矩阵右乘 A 表示 A 作行变换，故可排除(A)、(C). P_2A 表示将 A 的第 1 行加于第 3 行，$P_1(P_2A)$ 表示再将 1、2 两行互换. 选(B)

注意 P_1、P_2 是初等矩阵.

1-11 设 n 阶矩阵 A、B、C 满足关系 $ABC=E$(n 阶单位矩阵)，则必有( ).

(A) $BCA=E$　　(B) $CBA=E$

(C) $ACB=E$　　(D) $BAC=E$

解 $A(BC)=E$，说明 $BC=A^{-1}$，故 $BCA=E$. 选(A)

本题如要举反例排除(B)、(C)、(D)三选项也不难，关键是确定 C，

本题用到乘法结合律，互逆矩阵乘法有交换律，故 $BCA=ABC=E$. 一般矩阵的乘法不服从交换律，因此

使 $C=(AB)^{-1}$，且 AC 和 BC 均不可交换. 为此，设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$，可求得 $C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$. 读者可以自行验证.

(B)、(C)、(D)未必成立.

1-12 若

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算 $AB-BA$.

解 $$AB=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix},\qquad BA=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & -4 & -2\end{bmatrix}$$

应对三阶矩阵的乘法很熟悉. 本题的另一意图是说明一般 $AB\neq BA$.

1-13 计算

$$A_n=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^n$$

解 $$A_2=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=4E$$

这样 $A_3=4A_1$，$A_4=2^4E$，…

$$A_n=\begin{cases}2^nE, & n=2k\\ 2^nA_1, & n=2k+1\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots)$$

1-14 求 $A_n=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$.

解 $$A_2=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & (1+2)\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{bmatrix}$$

请读者自己完成归纳法的证明.

由归纳法知 $$A_n=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$$

1-15 设 $f(x)=x^2-2x-3$,而 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$,求 $f(A)$.

解 1 是直接计算每一项后再做加、减法;解 2 是分解因式,先算加、减法,最后算一个乘法,而且知,$(A-3E)$ 与 $(A+E)$ 相乘是可交换的.

解 1 $A^2=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $2A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$

$$f(A)=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

解 2

$$f(x)=(x-3)(x+1)$$

故

$$f(A)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

1-16 求一切与 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵.

直接用计算的方法来求与 A 可交换的矩阵 B 是很麻烦,但作为练习,却可以训练矩阵乘法的基本功;后面求 b_{ij} 之间的关系实际上是求线性方程组的通解. 由于这个方程组特殊,所以我们没有用规范的解法.

解 1(直接算) 设与 A 可交换的矩阵为 $B=(b_{ij})$,于是

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21}+2b_{31} & b_{22}+2b_{32} & b_{23}+2b_{33}\\ 3b_{11}+b_{21}+2b_{31} & 3b_{12}+b_{22}+2b_{32} & 3b_{13}+b_{23}+2b_{33}\end{bmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+3b_{13} & b_{12}+b_{13} & 2b_{12}+2b_{13}\\ b_{21}+3b_{23} & b_{22}+b_{23} & 2b_{22}+2b_{23}\\ b_{31}+3b_{33} & b_{32}+b_{33} & 2b_{32}+2b_{33}\end{bmatrix}$$

比较各元素得

$b_{12}=b_{13}=0$,

$2b_{31}=3b_{23}$, $2b_{32}=b_{23}$, $2b_{33}=2b_{22}+b_{23}$

$3b_{11}+b_{21}+2b_{31}=b_{31}+3b_{33}$, $b_{22}+2b_{32}=b_{32}+b_{33}$

$b_{23}+2b_{33}=2b_{32}+2b_{33}$

即 $b_{31}=\frac{3}{2}b_{23}$, $b_{32}=\frac{1}{2}b_{23}$, $b_{33}=b_{32}+\frac{1}{2}b_{23}$, $b_{11}=b_{22}-\frac{1}{3}b_{21}$. 所求 B 为

$$B=\begin{bmatrix} b_{22}-\frac{1}{3}b_{21} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \frac{3}{2}b_{23} & \frac{1}{2}b_{23} & b_{22}+\frac{1}{2}b_{23} \end{bmatrix}$$

其中 b_{21},b_{22},b_{23} 是任意数.

解 2 从 1-15 题的解 2 得到启发,可简化解答.

由
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因 E 可与任何矩阵交换,那么可与 A 交换的矩阵 B 就是可与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 交换的矩阵,故

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2b_{31} & 2b_{32} & 2b_{33} \\ 3b_{11}+b_{21}+b_{31} & 3b_{12}+b_{22}+b_{32} & 3b_{13}+b_{23}+b_{33} \end{bmatrix}$$

而
$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3b_{13} & b_{13} & 2b_{12}+b_{13} \\ 3b_{23} & b_{23} & 2b_{22}+b_{23} \\ 3b_{33} & b_{33} & 2b_{32}+b_{33} \end{bmatrix}$$

即得: $b_{12}=b_{13}=0$, $b_{31}=\frac{3}{2}b_{23}$, $b_{32}=\frac{1}{2}b_{23}$,

$$b_{33}=b_{22}+\frac{1}{2}b_{23},\quad b_{11}=b_{22}-\frac{1}{3}b_{21}.$$

与解 1 的结果完全相同.

解 2 是得到 1-15 题的解 2 的启发:与 A 可交换必与 $A+kE$ 可交换.这样选 k 使 $A+kE$ 更简单(本题中 $k=-1$),得到的方程组更简单,关系更好求.

1-17 设 $AB+E=A^2+B$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,求 B.

先用矩阵的性质(包括 $A-E$ 可逆)将等式化简,再求 B.

解
$$(A-E)B=A^2-E$$
又
$$A^2-E=(A-E)(A+E)$$
故
$$B=A+E=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1－18 设 A 是 n 阶可逆矩阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得矩阵 B. 求 AB^{-1}.

解 由于 $|A|=-|B|\neq 0$，故 B 也可逆. 设 E_{ij} 是由单位矩阵 E 交换 i、j 两行所得的初等矩阵，则 $B=E_{ij}A$，$B^{-1}=A^{-1}E_{ij}^{-1}$.

$$AB^{-1}=AA^{-1}E_{ij}=E_{ij}$$

要熟悉用初等矩阵与原矩阵相乘与对原矩阵作初等变换间的关系.

1－19 设 $B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$，求 A.

本题也是先化简所给的等式，直至最好计算的形式，再进行具体计算.

解 $A^{\mathrm{T}}=(2E-C^{-1}B)^{-1}C^{-1}=[C(2E-C^{-1}B)]^{-1}=(2C-B)^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}$$

求这个矩阵的逆，可用三种办法来求.

1. 用初等行变换的方法

$$\left[\begin{array}{cccccccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccccccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&-1&1&0&0\\1&1&1&0&0&-1&1&0\\1&1&1&1&0&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccccccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

2. 用分块矩阵的方法

本题的目的之一就是介绍求具体矩阵的逆矩阵的种种方法。解 1 是最基本的方法；解 2 是分块的方法，只要已知矩阵有一个二阶零矩阵的小块，对上、下三角矩阵这样做也不太繁；解 3 则是一般教材上不太讲的用解方程组求逆变换的方法来求逆矩阵，对三角形矩阵来说，这样做也相当简便.

当然，本题用求 D^* 的方法也不难，因为 $|D|=1$，故 $A=D^*$.

对这样的 4 阶矩

设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}$,其中

$$\boldsymbol{D}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_{12}=\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{D}_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}_{21}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{DA}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{D}_{22}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{D}_{22}\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}$ 是二阶单位矩阵,则 $\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}_{21}=-\boldsymbol{D}_{22}^{-1}\boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

3. 用解线性方程组(或求逆变换)的方法

令

$$\begin{cases}x_1 = y_1\\ 2x_1+x_2=y_2\\ 3x_1+2x_2+x_3=y_3\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=y_4\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}$

解得

$$\begin{aligned}x_1&=y_1\\ x_2&=-2y_1+y_2\\ x_3&=-3y_1-2(-2y_1+y_2)+y_3=y_1-2y_2+y_3\\ x_4&=-4y_1-3(-2y_1+y_2)-2(y_1-2y_2+y_3)+y_4\\ &=y_2-2y_3+y_4\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Y},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

阵求逆,可直接设 $A=$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$,便可定出 $a_{21}=-2, a_{22}=1, a_{31}=1, a_{32}=-2, a_{33}=1, a_{41}=0, a_{42}=1, a_{43}=-2, a_{44}=1$. 读者不妨一试,用分块法求逆矩阵对特殊的高阶矩阵很有效.

用解方程组求逆矩阵的方法,对求三角矩阵的逆也很有效.

本题介绍三种求逆矩阵的方法供读者参考.

1-20 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵,$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$,求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$.

解 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}$ 得 $2\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}$,$(3\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$,

$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 不仅在求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 中有用,还可通过

故$(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^{*}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^{*}|=-\frac{16}{27}$.

它来研究矩阵 $\boldsymbol{A}$.

1-21 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$. 求 $\boldsymbol{X}$.

解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}$$

请读者仿 1-19 题的方法自行求 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

1-22 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$. 求 $\boldsymbol{X}$.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

解 由 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，

得

$$(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}$$

$$|\boldsymbol{A}|=4,\qquad 4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}=2\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

1-23 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$是实矩阵，满足① $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}\,(i,j=1,2,3)$；② $a_{11}\neq 0$. 计算$|\boldsymbol{A}|$.

满足这样条件的 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

解 由 $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}$ 知 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

两端取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}|^{2}=|\boldsymbol{A}|^{3}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$$

或$|\boldsymbol{A}|=1$. 但$|\boldsymbol{A}|=a_{11}^{2}+a_{12}^{2}+a_{13}^{2}\neq 0$，故$|\boldsymbol{A}|=1$.

1-24 已知 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$.

解 $AA^*=|A|E$，故$(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$. 而

$$A=(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad |A|=\frac{1}{2}$$

故
$$(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

通过这些题总结一下伴随矩阵 A^* 与 A 的关系.

1-25 设 A 是 n 阶非奇异矩阵，α 是 n 维列向量，b 是常数，分块矩阵 P 与 Q 分别为

$$P=\begin{bmatrix}E&0\\-\alpha^TA^*&|A|\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{bmatrix}$$

(1) 求 PQ；

(2) 证明 Q 可逆的充要条件是 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

解 (1) $PQ=\begin{bmatrix}A&\alpha\\-\alpha^TA^*A+|A|\alpha^T&-\alpha^TA^*\alpha+b|A|\end{bmatrix}$

而 $A^*A=|A|E$，故 $\quad -\alpha^TA^*A+|A|\alpha^T=O$

又 $\quad -\alpha^TA^*\alpha=-\alpha^TA^{-1}\alpha|A|$

由此

$$PQ=\begin{bmatrix}A&\alpha\\0&|A|(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)\end{bmatrix}$$

(2) $\quad |PQ|=|A|^2(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)$

而 $|P|=|A|\neq0$，故 Q 可逆，即$|Q|\neq0$ 的充要条件是 $b-\alpha^TA^{-1}\alpha\neq0$，即 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

注意 α^TA^* 是 n 维行向量，P、Q 是 $n+1$ 阶矩阵，E 是 n 阶单位矩阵. $\alpha^TA^*\alpha$ 是个数. P 中 0 是 n 维列向量，而 $-\alpha^TA^*A+|A|\alpha^T=0$ 中的这个 0 是 n 维行向量.

1-26 设 $A=E-\xi\xi^T$，ξ 是 n 维非零列向量，证明：

(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi=1$；

(2) 当 $\xi^T\xi=1$ 时，A 不可逆.

证 (1) $\quad A^2=(E-\xi\xi^T)^2=E-2\xi\xi^T+\xi\xi^T\xi\xi^T$

故 $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi\xi^T-\xi\xi^T\xi\xi^T=0$，即 $(1-\xi^T\xi)(\xi\xi^T)=0$. 由 ξ 非零，得

$$1-\xi^T\xi=0$$

(2) 当 $\xi^T\xi=1$ 时，$A^2=A$，如 A 可逆，得 $A^{-1}A^2=E$，$A=E$，则 $\xi\xi^T=$

注意：$\xi^T\xi=\|\xi\|^2>0$，而 $\xi\xi^T$ 是 n 阶矩阵，其秩为 1（ξ 是非零向量）.

在运算式中，首先要分清矩阵、向量与数量及其相互