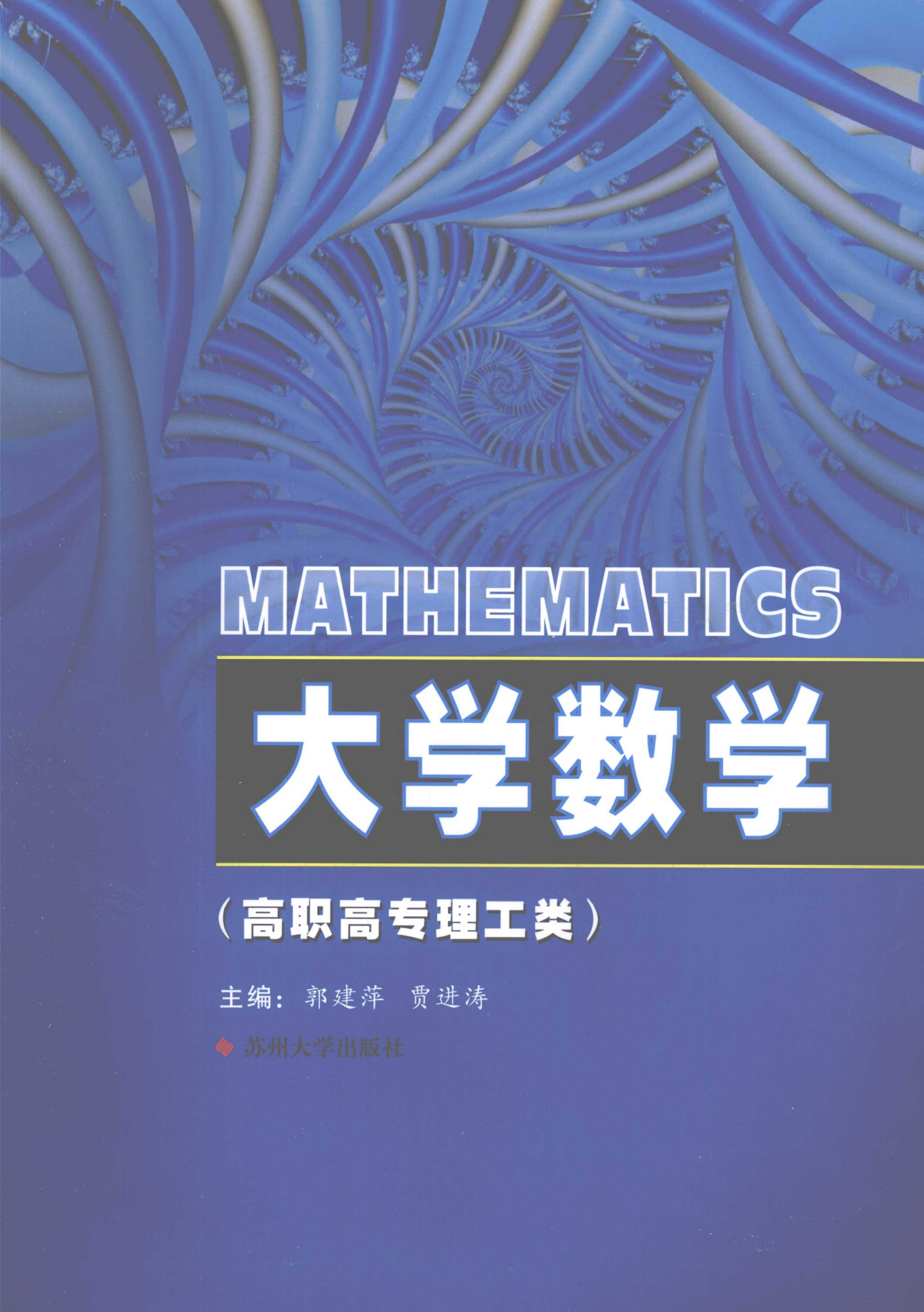




MATHEMATICS

大学数学

(高职高专理工类)

主编：郭建萍 贾进涛

◆ 苏州大学出版社

大学数学

(高职高专理工类)

主 编 郭建萍 贾进涛

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学: 高职高专理工类/郭建萍, 贾进涛主编.
苏州: 苏州大学出版社, 2009. 7
ISBN 978-7-81137-270-0

I. 大… II. ①郭…②贾… III. 高等数学—高等学校—
教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 128658 号

内 容 简 介

全书内容共分六篇十五章, 分别是: 函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学基础、常微分方程、无穷级数初步、概率论初步、数理统计基础、行列式、矩阵与线性方程组、线性代数应用举例. 书后附有九个附录: 初等数学中的常用公式、几种常用的曲线($a > 0$)、积分表、泊松分布表、标准正态分布表、 χ^2 分布表、 T 分布表、 F 分布表、概率论与数理统计基础预备知识.

本书说理浅显, 便于自学, 可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育工科类各专业教材, 也可作为工程技术人员的参考书.

大 学 数 学

(高职高专理工类)

郭建萍 贾进涛 主编

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址: 苏州市干将东路 200 号 邮编: 215021)

宜兴文化印刷厂印装

(地址: 宜兴市南漕镇 邮编: 214217)

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 26 字数 648 千

2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-270-0 定价: 39.50 元

苏州大学版图书若有印装错误, 本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话: 0512-67258835

苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前 言

本书是高职高专理工类数学教材. 该教材是编者根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》, 在认真总结近年来高职高专数学教改的基础上, 结合并参考国内同类教材的发展趋势编写而成的.

本书力求依据“以应用为目的, 以必需够用为度”的原则, 在保证数学体系基本完整的前提下, 注重讲清概念、减少数理论证, 注重培养学生基本运算能力、分析能力和解决实际问题的能力, 注重理论联系实际. 编者结合目前我国高职高专生源特点及多年参与指导学生参加全国大学生数学建模竞赛的经验和体会, 在书中有机地渗透了简单的数学模型. 本书突出了培养学生数学应用意识的特点, 为学生专业课的学习奠定了坚实的基础.

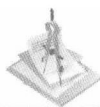
本书每节后配有习题, 每章后配有复习题, 书末附有习题参考答案、初等数学常用公式表、常用的曲线、积分表、常用的概率分布表等.

本书共设六篇十五章, 主要包括: 一元函数微积分学、多元函数微积分学、常微分方程、无穷级数初步、概率论与数理统计基础和线性代数初步. 对于标有 * 号的内容可根据专业需要选取. 本书由郭建萍、贾进涛主编, 参加编写的人还有杜玉贞、陶华、任丽萍、吕杰、王德才、夏明汉、徐惠益、封心拥、郭健、尹自永、吕福祥、韩成标、顾晓叶、刘志平、刘选民、周辰、路聚福、武荣权、解恒凯、闫照粉.

由于编者水平有限, 书中难免存在不当之处, 恳请同行和读者批评指正.

编 者

2009 年 7 月



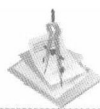
目 录

第一篇 一元函数微积分学

第一章 函数的极限与连续	1
第一节 函数	1
习题 1-1	6
第二节 函数的极限	7
习题 1-2	10
第三节 无穷小与无穷大	11
习题 1-3	12
第四节 极限的运算法则	12
习题 1-4	14
第五节 两个重要极限	15
习题 1-5	18
第六节 无穷小的比较	19
习题 1-6	20
第七节 函数的连续性	20
习题 1-7	26
复习题一	27
第二章 导数与微分	30
第一节 导数的概念	30
习题 2-1	34
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	35
习题 2-2	37
第三节 反函数和复合函数的导数	37
习题 2-3	41
第四节 初等函数的求导	41
习题 2-4	43



第五节 隐函数和参数式函数的导数	43
习题 2-5	45
第六节 高阶导数	46
习题 2-6	49
第七节 微分及其应用	49
习题 2-7	54
复习题二	54
第三章 导数的应用	57
第一节 拉格朗日中值定理与函数单调性判定法	57
习题 3-1	61
第二节 函数的极值及判定	62
习题 3-2	64
第三节 函数的最大值和最小值问题	65
习题 3-3	67
第四节 曲线的凹凸、拐点与函数的分析作图法	68
习题 3-4	73
第五节 罗必塔法则	74
习题 3-5	77
复习题三	77
第四章 一元函数积分学	80
第一节 不定积分的概念与性质	80
习题 4-1	84
第二节 不定积分的积分法	84
习题 4-2	92
第三节 定积分的概念和性质	93
习题 4-3	98
第四节 微积分基本公式	98
习题 4-4	102
第五节 定积分的换元积分法与分部积分法	102
习题 4-5	107
*第六节 广义积分	108
习题 4-6	110
复习题四	110



第五章 定积分的应用	112
第一节 定积分的微元法.....	112
第二节 定积分在几何中的应用.....	113
习题 5-2	118
第三节 定积分在物理学中的应用.....	119
习题 5-3	122
复习题五.....	122

第二篇 多元函数微积分学

第六章 空间解析几何简介	123
第一节 空间直角坐标系.....	123
习题 6-1	127
第二节 几种常用的二次曲面与空间曲线.....	127
习题 6-2	132
复习题六.....	132
第七章 多元函数微分学	133
第一节 多元函数的概念.....	133
习题 7-1	136
第二节 偏导数.....	137
习题 7-2	140
第三节 全微分.....	140
习题 7-3	142
第四节 复合函数与隐函数微分法.....	143
习题 7-4	146
第五节 多元函数的极值.....	147
习题 7-5	151
*第六节 方向导数与梯度.....	151
习题 7-6	154
*第七节 最小二乘法.....	154
习题 7-7	156
复习题七.....	156
第八章 多元函数积分学基础	157
第一节 二重积分的概念与性质.....	157
习题 8-1	161
第二节 二重积分的计算.....	162



习题 8-2	167
第三节 二重积分的应用	168
习题 8-3	171
复习题八	171

第三篇 常微分方程

第九章 常微分方程	173
第一节 常微分方程的基本概念	173
习题 9-1	175
第二节 一阶微分方程	176
习题 9-2	180
第三节 可降阶的高阶微分方程	181
习题 9-3	183
* 第四节 二阶常系数线性微分方程	183
习题 9-4	186
* 第五节 微分方程应用举例	186
习题 9-5	189
复习题九	190

第四篇 无穷级数初步

第十章 无穷级数初步	191
第一节 数项级数	191
习题 10-1	194
第二节 数项级数的敛散性	195
习题 10-2	199
第三节 幂级数	200
习题 10-3	204
第四节 函数展开成幂级数	204
习题 10-4	208
复习题十	208

第五篇 概率论与数理统计基础

第十一章 概率论初步	210
第一节 随机事件	210
习题 11-1	213



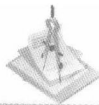
第二节 事件的概率	214
习题 11-2	217
第三节 条件概率与乘法公式	218
习题 11-3	222
第四节 事件的相互独立性及重复独立试验	223
习题 11-4	226
第五节 随机变量及其分布	227
习题 11-5	241
第六节 随机变量的数字特征	243
习题 11-6	252
复习题十一	253
第十二章 数理统计基础	255
第一节 简单随机样本	255
习题 12-1	260
第二节 参数估计	261
习题 12-2	270
第三节 假设检验	271
习题 12-3	275
复习题十二	275

第六篇 线性代数初步

第十三章 行列式	278
第一节 二阶、三阶行列式	278
习题 13-1	283
第二节 n 阶行列式	284
习题 13-2	293
第三节 克莱姆法则	294
习题 13-3	299
复习题十三	300
第十四章 矩阵与线性方程组	302
第一节 矩阵的概念及运算	302
习题 14-1	318
第二节 逆矩阵	319
习题 14-2	325
第三节 矩阵的初等变换与秩	325



习题 14-3	332
第四节 线性方程组的矩阵求解	333
习题 14-4	346
复习题十四	347
第十五章 线性代数应用举例	349
习题参考答案	356
附录 I 初等数学中的常用公式	387
附录 II 几种常用的曲线($a>0$)	390
附录 III 积分表	391
附录 IV 泊松分布表	397
附录 V 标准正态分布表	398
附录 VI χ^2 分布表	399
附录 VII T 分布表	400
附录 VIII F 分布表	401
附录 IX 概率论与数理统计基础预备知识	404
参考文献	406



第一篇 一元函数微积分学

第一章

函数的极限与连续

数学是研究现实世界中空间形式与数量关系的学科. 初等数学研究的对象基本上是不变量, 而高等数学则是研究变量的一门课程. 变量与变量之间相互依赖的函数关系及其属性是高等数学的主要研究对象, 极限概念及其运算法则是研究函数的主要工具, 高等数学中的许多概念及运算法则都是在研究极限的基础上建立起来的.

本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、集合

讨论变量之间的数量关系时, 必须明确变量的取值范围. 本书用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 如果没有特别声明, 以后提到的数都是实数.

1. 常用数集

常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$ 、整数集 $\mathbf{Z}$ 、有理数集 $\mathbf{Q}$ 、实数集 $\mathbf{R}$ 外, 还有各种类型的区间. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$, 则

开区间 $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$;

闭区间 $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$;

左半开区间 $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$;

右半开区间 $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$;

无穷区间 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a < x\}$;

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\}$;

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} | x < b\}$;

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} | x \leq b\}$.



2. 邻域

定义 1 设 $a, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 数集 $\{x \mid x - a < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体, 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $N(a, \delta)$, 点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径. 有时用 $N(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域. 数集 $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的空心 δ 邻域, 记作 $N(\hat{a}, \delta)$.

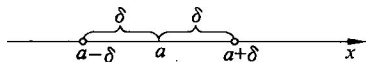


图 1-1

显然, $N(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, $N(\hat{a}, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

几何上, 点 a 的 δ 邻域是以 a 为中心, δ 为半径的开区间. 如图 1-1 所示.

二、函数的概念

定义 2 设 x 和 y 是两个变量, D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 任意 $x \in D$, 变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应, 记作 $y = f(x)$, 则称 f 是定义在 D 上的函数. x 称为自变量, y 称为因变量. D 称为函数 f 的定义域. 数集 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

由于常常通过函数值讨论函数, 因此习惯上把自变量为 x , 因变量为 y 的函数 f 记成 $y = f(x)$.

由上述定义可知, 对应关系与定义域是构成函数的两个要素. 如果两个函数具有相同的对应关系和定义域, 那么这两个函数是相同的. 由于函数 $y = |x|$ 与 $y = x$ 的对应关系不同, 因此它们是两个不同的函数; 由于函数 $y = 2\ln x$ 与 $y = \ln(x^2)$ 的定义域不同, 因此它们也是两个不同的函数; 而函数 $y = |x|$ 和 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域与对应关系均相同, 因此, 它们是同一个函数.

例 1 某地 2000 年 5 月 15 日—19 日每日最高气温如下表:

日 期	5 月 15 日	5 月 16 日	5 月 17 日	5 月 18 日	5 月 19 日
最高气温/ $^{\circ}\text{C}$	24	25	27	28	28

这个表格确实表达了温度是日期的函数, 这里不存在任何计算温度的公式 (否则就不需要气象局了), 但是每天都会产生一个唯一的最高气温, 对每个日期 t , 都有一个与 t 相应的唯一的最高气温 N .

例 2 李先生外出郊游, 他匀速前进, 离家不久, 他发现一骑车人的车坏了, 他帮助这个人把车修好, 随后以同样的速度继续赶路. 请把李先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来 (见图 1-2).

例 3 函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

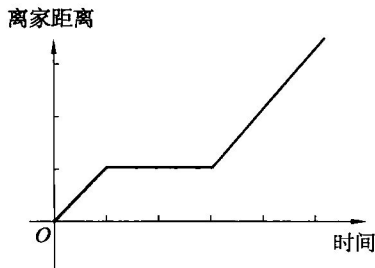
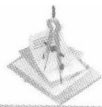


图 1-2

称为符号函数. 它的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 它的图形如图 1-3 所示. 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$



例如, $\operatorname{sgn}(-3) \times |-3| = (-1) \times 3 = -3$.

例 4 数学式

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

表明变量 y 是 x 的函数, 它的图形如图 1-4 所示.

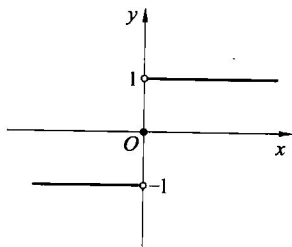


图 1-3

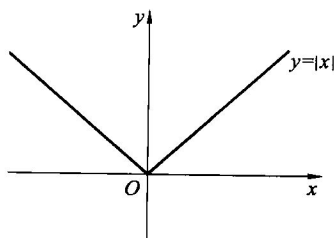


图 1-4

例 5 数学式

$$y=f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1, \\ -x-1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

也表明变量 y 是 x 的函数.

对于表示实际问题的函数关系, 其定义域应由所研究问题的实际意义来确定. 例如, 研究物体的自由落体运动, 用 T 表示物体做自由落体运动所用的时间, 则自由落体运动中物体下落的距离与所用时间的函数关系式 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是区间 $[0, T]$. 对于抽象地用公式表示的函数, 其定义域是自变量所能取的使公式有意义的一切值. 例如, 例 3 与例 4 中函数的定义域为 $D = \mathbf{R}$, 而例 5 中的函数, 其自变量的取值范围在函数表达式中已经给定了, 它的定义域为 $D = [-1, 1)$.

例 6 确定函数 $y = \arcsin \frac{x-3}{2} + \ln(x-1)$ 的定义域.

解 要使 y 有确定的值, 必须

$$\begin{cases} \left| \frac{x-3}{2} \right| \leq 1, \\ x-1 > 0. \end{cases}$$

解得 $-2 \leq x-3 \leq 2$ 且 $x > 1$, 即 $1 \leq x \leq 5$ 且 $x > 1$, 于是定义域为 $(1, 5]$.

三、函数的表示法

表示函数的常用方法有三种, 分别是公式法、表格法和图示法.

1. 公式法

如果变量 x 和变量 y 之间的函数对应关系能用某些已知的运算(或指定的特定运算符号)表示出来, 我们就得到一个包含 x 和 y 的关系式. 这种用关系式给出函数的方法叫做公式法, 如例 4、例 5 及例 6 中的函数都是用公式法表示的.

2. 图示法

用坐标系上的曲线把函数表示出来的方法叫做图示法. 它的最大优点是直观, 从图中曲



线可以很方便地看出两个变量之间的关系,因此常常要把用公式给出的函数的图形作出来以弥补公式法的不足,如例 2、例 3 与例 4.

3. 表格法

把函数的自变量所取的值和其对应的函数值列成表格,这种表示函数的方法叫做表格法.不需要计算就能知道函数值是函数表格法的优点.

例 6 中的函数,与定义域中任意一个 x 相对应的 y 都用同一个式子表示,而例 3、例 4 与例 5 中的函数,函数的定义域中不同部分的 x 相对应的 y 的表达式不相同.这种对定义域中的不同部分,对应关系用不同的式子表示的函数,称为**分段函数**.例 3、例 4 与例 5 中的函数都是分段函数,不过例 4 中的分段函数可以等价变形为 $y = \sqrt{x^2}$,即对应关系可以化成一个式子.分段函数是几个式子表示一个(不是几个)函数.

公式法中还有一种隐函数的形式.

若变量 x, y 之间的函数关系是由一个含 x, y 的方程 $F(x, y) = 0$ 给出的,则称 y 是 x 的**隐函数**.相应地,把直接由自变量的式子表示的函数称为**显函数**.例如, $x^2 + y^2 = 2$, $3x + 5y + 2 = 0$, $e^{3x} + y + x + e^y = 0$ (e 是一个大于 1 的常数)确定的函数都是隐函数;而 $y = 2x + 1$ 与 $y = \cos x$ 都是显函数.由方程 $3x + 5y = 2$ 可以解得 $y = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}x$,即由方程 $3x + 5y = 2$ 确定的隐函数可化为显函数,这个过程称为隐函数的显化.但不是每个隐函数都可以显化,如方程 $e^{3x} + y + x + e^y = 0$ 确定的隐函数是无法显化的,因此隐函数是表达函数的一种必不可少的形式.

若变量 x, y 之间的函数关系是通过参数方程给出的,这样的函数称为由参数方程确定的函数,简称**参数式函数**, t 称为**参数**,如下式:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in T).$$

例如,椭圆的参数方程可以写为

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

四、函数的几种特性

设函数的定义域为 D .

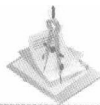
1. 有界性

设数集 $X \subset D$,若存在正常数 M ,对任意 $x \in X$,相应的函数值都满足 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.若不存在这样的正常数 M ,则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

若 $f(x)$ 在 D 上有界,则称 $f(x)$ 为有界函数.例如,函数 $\cos x$ 是有界函数,而函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界的,因为不存在正数 M ,使得对于区间 $(0, 1)$ 内一切 x 都有

$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq M \text{ 成立.但是 } f(x) = \frac{1}{x} \text{ 在区间 } [1, 2] \text{ 内是有界的,因为对于区间 } [1, 2] \text{ 上的一切 } x, \text{ 都有}$$

$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ 成立,这里 } M=1.$$



2. 单调性

设区间 $I \subset D$, 若对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 若对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

在区间 I 上单调增加和单调减少的函数统称为区间 I 上的单调函数.

3. 奇偶性

设 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数; 若对任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称.

4. 周期性

设存在一个不为零的常数 T , 若对任意 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 当周期函数存在最小正周期时, 通常所说的周期指的是最小正周期.

周期函数若以 $T (T > 0)$ 为周期, 则在每个长度为 T 的区间 $[nT, (n+1)T] (n \in \mathbf{Z})$ 上函数的图象是相同的. 例如, 函数 $\cos x, \sin x$ 以 2π 为周期, 而 $A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$ 以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期.

五、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

先举一个例子, 设 $y = \sqrt{u}$, 而 $u = 1 - x^2$, 以 $1 - x^2$ 代替 $y = \sqrt{u}$ 中的 u , 得 $y = \sqrt{1 - x^2}$. 称这个函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = 1 - x^2$ 复合而成的复合函数. 必须注意, 并不是任意两个函数都可以复合, 如 $y = \arcsin u$ 和 $u = x^2 + 2$ 在实数范围内就不能复合.

定义 3 如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 通过 u 将 y 表示成 x 的函数, 即 $y = f[\varphi(x)]$, 那么 y 就叫做 x 的复合函数, 其中 u 叫做中间变量. 但要注意, 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域应该与函数 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空.

例如, 函数 $y = \arctan(x^2)$ 可看作由 $y = \arctan u$ 及 $u = x^2$ 复合而成. 这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它也是 $u = x^2$ 的定义域.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如, 设 $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$, 则得复合函数 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, 这里 u 及 v 都是中间变量.

例 7 设 $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 4^x$,

$g[f(x)] = g(x^2) = 2^{(x^2)} = 2^{x^2}$.

例 8 分析下列函数的复合过程:

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = e^{\sin \sqrt{x^2 + 1}}$.



解 (1) $y = \sin^2 x$ 由 $y = u^2, u = \sin x$ 复合而成.

(2) $y = e^{\sin \sqrt{x^2+1}}$ 由 $y = e^u, u = \sin v, v = \sqrt{t}, t = x^2 + 1$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 4 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合构成的, 可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

例如, $y = 2x^2 + 1, y = \sin \frac{1}{x}, y = |x| = \sqrt{x^2}$ 都是初等函数. 高等数学中讨论的函数许多都是初等函数.

习 题 1-1

1. 用区间表示下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$; (2) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; (3) $y = \arcsin(x-3)$;

(4) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$; (5) $y = \ln(x+1)$; (6) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, 求下列函数值:

$f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0+h).$

3. 设 $f(x) = \arcsin x$, 求下列函数值:

$f(0), f(-1), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1).$

4. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$ 的值.

5. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}, g(x) = \sin x$.

6. 确定下列函数的奇偶性:

(1) $y = \frac{\sin x}{x}$; (2) $y = \sin x + \cos x$; (3) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; (4) $y = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$.

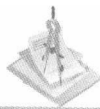
7. 已知 $f(x) = x^3 - x, \varphi(x) = \sin 2x$, 求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

8. 指出下列函数的复合过程:

(1) $y = \sin 3x$; (2) $y = e^{\frac{1}{x}}$; (3) $y = \cos^3 x$; (4) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x+1}}$.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = x^2, (-1, 0)$; (2) $y = \lg x, (0, +\infty)$.



10. 北京到某地的行李费收费标准为: 当行李不超过 50kg 时, 按基本运费 0.30 元/kg 收费; 当行李超过 50kg 时, 超过部分按 0.45 元/kg 收费, 不超过部分仍按 0.30 元/kg 收费. 试求北京到该地的行李费 y (元) 与行李重量 x (kg) 之间的函数关系, 并作图.

第二节 函数的极限

从研究常量到研究变量, 从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体, 是人类对自然界认识的一大飞跃, 是数学发展中的一个转折点. 在上述两个阶段中, 不但研究的对象不同, 而且研究的方法也不同. 初等数学主要采用形式逻辑的方法, 静止地、孤立地研究问题, 而高等数学则不然, 它是以运动的、变化的观点去研究问题, 这种不同首先体现在对函数极限的研究中.

中学数学里已讨论过数列的极限, 无穷数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 可以看作自变量为正整数 n 的函数 $f(n)$, 其中 $f(n) = x_n$. 因此数列的极限是一类特殊函数的极限. 下面对数列的极限作简要的复习与补充, 并进而讨论函数的极限.

一、数列的极限

定义 1 数列 $\{x_n\}$ 当项数 n 无限增大时, 数列的相应项 x_n 无限逼近常数 A , 则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, 并称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的. 若数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 随自变量 n 的变化而变化. 由于 n 只能取正整数, 所以研究数列的极限, 只需要考虑自变量 $n \rightarrow +\infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限. 一般地, 在研究数列极限时, 把记号 $n \rightarrow +\infty$ 简记为 $n \rightarrow \infty$.

数列 $\{x_n\}$ 的极限是 A , 是指数列的项数无限增大时, 通项的值的变化趋势——无限逼近常数 A , 或者换个说法, 即通项 x_n 与 A 的距离 $|x_n - A|$ 无限逼近零.

例 1 观察下列数列的极限:

$$(1) x_n = \frac{n}{n+1};$$

$$(2) x_n = \frac{1}{2^n};$$

$$(3) x_n = 2n+1;$$

$$(4) x_n = (-1)^{n+1}.$$

解 先列出所给的数列:

$$(1) \text{ 即为 } \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$(2) \text{ 即为 } \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$(3) \text{ 即为 } 3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots;$$

$$(4) \text{ 即为 } 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots.$$

观察如上 4 个数列在 $n \rightarrow \infty$ 时的发展趋势, 得 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)$ 不存在; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ 不存在.