

框架理论及应用

Frames Theory and Applications



National Defense Industry Press

框架理论及应用

Frames Theory and Applications

曲长文 何友 刘卫华 李楠 编著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

框架理论及应用/曲长文等编著. —北京:国防工业出版社,2009.7

ISBN 978-7-118-06258-8

I. 框... II. 曲... III. 空间-理论 IV. 0177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 037904 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 21¼ 字数 498 千字

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 45.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

众所周知,所有十进制数是由 $0, 1, \dots, 9$ 这10个数码与数位的位权的乘积之和来表示的;生物是由细胞组成的;物质是由原子(分子、离子)构成的;把函数分解成一系列简单函数的表示,无论是在理论上,还是实际应用中都有重要意义。在信号处理中,一个信号可以表示成不同频率成分的和。在赋范线性空间或内积空间中,每一个元素可以由基来唯一地表示。同样,赋范线性空间或内积空间的每一个元素可以由框架表示,但表示不一定是唯一的。这是框架和基的最基本的特征。框架是某种过完全的基。框架和基一样,均是 Hilbert 空间和 Banach 空间的一族向量,而且是反映空间结构的基本向量。拓扑结构和代数结构反映了空间的宏观结构,框架和基反映了空间的微观结构。框架和基就相当于是空间的一套微观分析工具,通过它们,可以将空间中的任意元素进行分解,分析其构成成份,获得其结构特点。通过对它们线性组合,可以构造符合要求的具有一定结构的元素。也就是说,可以利用框架和基,对空间中的每一个元素进行分解和合成。在信号处理领域,可以利用框架和基,对信号进行分析与处理。

一族向量必须具备要求比较严格的条件,才能够成为基;构造基是相当困难的,并且对基稍作变化就会破坏其特性。一族向量成为框架所需满足的条件相对较松,构造框架也相对容易,框架的使用也相对灵活。框架具有与基相似的特点,有些学者将它看作是广义基。

框架理论是一个新的研究方向,是泛函分析、算子理论、非线性逼近论、信息理论相结合的产物,已经成为一些领域研究与发展的重要课题,推动了泛函分析和算子理论的深入研究,同时也推动了非线性逼近论的发展。特别是在信号处理、图像处理、数据压缩、抽样理论、抽象数学、地震勘探、地球物理、雷达及通信等方面均具有突出的作用,具有十分广阔的应用前景。

本书主要讨论框架理论的基本思想、基本分析方法及框架设计方法。除此之外,本书包括学习和研究框架理论所需的泛函分析的基本知识,并讨论框架在信号处理及图像处理中的应用。本书自成体系,方便读者的学习和使用。

本书的内容划分为6个部分。第1章为第一部分,对框架理论的发展历程、主要应用及发展现状作概括的介绍。第2章~第6章为第二部分,主要包括泛函分析基础知识,是研究框架理论的基础。第7章和第8章为第三部分,主要讨论 Banach 空间

IV

和 Hilbert 空间的基。第 9 章和第 10 章为第四部分,主要研究 Hilbert 空间和 Banach 空间的框架理论。第 11 章为第五部分,讨论框架设计的主要方法。第 12 章~第 14 章为第六部分,介绍典型框架,并讨论框架在信号处理及图像处理中的应用。

框架理论作为一个新的研究方向,在众多领域中逐渐显示其基础性作用,因而近些年来对框架理论的探索成为了众多学者关注的热点,但由于框架理论与泛函分析结合紧密,相对抽象,理解起来困难,深入研究进展缓慢。无论理论研究还是应用研究,仍有许多问题亟待解决。希望本书对框架理论及应用感兴趣的数学和信号处理等研究领域的工作者起到抛砖引玉的作用。

编著者

2009 年 4 月

烟台海军航空工程学院

内 容 简 介

框架理论是继小波理论之后发展起来的一个新研究方向,是泛函分析、算子理论、非线性逼近论、信息理论相结合的产物,广泛应用于信号处理、图像处理、生物医学、应用数学、物理科学和地球科学等众多领域。框架理论的发展具有重大的理论和应用的双重意义。

全书共 14 章,主要包括概述、集合与空间、度量空间、线性空间、赋范线性空间、内积空间、Banach 空间的基、Hilbert 空间的基、Hilbert 空间的框架、Banach 空间的框架、框架设计、信号处理的典型框架、框架在信号处理中的应用及框架在图像处理中的应用。从内容上来划分,本书分为 6 个部分。第一部分也就是第 1 章,概述框架理论的发展历程、主要应用及发展现状。第二部分是第 2 章~第 6 章,主要包括泛函分析基础知识,是研究框架理论的基础。第三部是第 7 章和第 8 章,主要包括 Banach 空间和 Hilbert 空间的基理论。第四部分是第 9 章和第 10 章,主要包括 Hilbert 空间和 Banach 空间的框架理论。第五部分是第 11 章,讨论框架设计的主要方法。第六部分是第 12 章~第 14 章,主要讨论框架在信号处理及图像处理中的应用。

本书可作为高等院校通信类、信息类、电子类和数学类等专业的研究生或高年级本科生的专业教材,也可作为相关科研人员的参考用书。

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 框架理论的发展历程	1
1.2 框架理论的主要应用	5
1.3 框架理论需要进一步研究的问题	6
第 2 章 集合与空间	8
2.1 集合的概念	8
2.2 集合的运算	10
2.3 集合序列的极限	12
2.4 映射	14
2.5 对等与基数	16
2.6 可列集与不可列集	18
2.7 空间	20
第 3 章 度量空间	23
3.1 度量空间的概念	23
3.2 度量空间的拓扑性质	26
3.2.1 开集	26
3.2.2 闭集	27
3.2.3 拓扑空间的基	28
3.3 度量空间的极限	30
3.4 度量空间之间的映射	32
3.5 度量空间的完备性	34
3.5.1 完备的度量空间	34
3.5.2 闭球套定理	38
3.5.3 压缩映照原理	39
3.6 度量空间的可分性	40
3.7 度量空间中的紧性	41

3.7.1	相对紧集	42
3.7.2	完全有界集	42
3.7.3	列紧集与紧集	44
第4章	线性空间	46
4.1	线性空间的概念	46
4.2	线性空间的基	48
4.3	线性算子	50
第5章	赋范线性空间	54
5.1	赋范线性空间与 Banach 空间	54
5.2	赋范线性空间的基本性质	58
5.3	Banach 空间的级数	60
5.4	有界线性算子	62
5.5	有界线性算子空间	66
5.6	有界线性泛函	67
5.7	对偶空间	69
5.8	赋范空间和 Banach 空间中的基本定理	74
5.9	伴随算子及二次对偶空间	76
5.10	赋范线性空间中的几种收敛概念	78
第6章	内积空间	80
6.1	内积空间的基本概念	80
6.2	正交性与投影定理	84
6.3	Hilbert 空间的伴随算子	86
6.3.1	连续线性泛函的表示	86
6.3.2	对偶空间	87
6.4	Hilbert 空间中的伴随算子	88
6.5	Hilbert 空间上的重要线性算子	90
6.5.1	有界自伴算子	90
6.5.2	酉算子	91
6.5.3	正规算子	93
6.5.4	正交投影算子	93
第7章	Banach 空间的基	96
7.1	Banach 空间的基的概念	96

7.2	Banach 空间中序列的线性无关	102
7.3	Banach 空间的绝对收敛基	104
7.4	Banach 空间的双正交系	105
7.5	Banach 空间的对偶基	108
7.6	Banach 空间的无条件基	109
7.7	Banach 空间的弱基和弱*基	111
第 8 章 Hilbert 空间的基		116
8.1	Hilbert 空间的 Bessel 序列	116
8.2	内积空间的规范正交集	119
8.3	Hilbert 空间的规范正交基	123
8.4	Hilbert 空间的双正交系	127
8.5	Hilbert 空间的 Riesz 基	129
第 9 章 Hilbert 空间的框架		133
9.1	基的局限性	133
9.2	Hilbert 空间框架的基本概念	135
9.3	框架与算子	141
9.4	框架与正交基之间的关系	146
9.5	框架的冗余性	150
9.6	框架与 Riesz 基之间的关系	152
9.7	框架的性质	158
9.8	对偶框架	163
9.9	紧框架与连续框架	166
9.10	正规框架	168
9.11	逆框架算子的逼近	171
9.12	Hilbert 空间框架的稳定性和扰动	175
第 10 章 Banach 空间的框架		184
10.1	Banach 空间框架的基本概念	184
10.2	Banach 空间框架及原子分解的稳定性	188
10.3	Banach 空间框架的性质	193
10.4	Banach 空间原子分解与框架的关系	195
10.5	Banach 空间原子分解与框架的膨胀	196
10.6	Banach 空间中 p -框架与 q -Riesz 基	197

10.7	Banach 空间中 q -框架与 p -Riesz 基	199
10.8	关于框架概念的注记	201
第 11 章	框架设计	204
11.1	信号展开	204
11.2	基于线性代数法的框架设计	207
11.2.1	问题的公式化	208
11.2.2	面向块框架的设计	208
11.2.3	重叠框架设计	210
11.2.4	一般重叠框架设计	212
11.3	框架设计中的向量选择	215
11.3.1	向量选择算法比较	216
11.3.2	基追踪法	218
11.3.3	匹配追踪法	220
11.3.4	正交匹配追踪法	223
第 12 章	信号处理的典型框架	226
12.1	信号处理常用的算子	226
12.2	Gabor 框架	227
12.3	小波框架	231
12.4	多分辨率分析	235
12.5	框架多分辨率分析	241
第 13 章	框架在信号处理中的应用	245
13.1	基于小波变换的信号去噪	246
13.1.1	小波去噪的原理	247
13.1.2	小波萎缩法去噪	247
13.2	基于小波变换的雷达恒虚警率检测	253
13.2.1	雷达信号检测模型	253
13.2.2	基于小波变换的雷达信号检测	255
13.2.3	检测门限参数估计	256
13.3	基于小波变换的信号奇异性分析	258
13.3.1	信号和噪声的奇异性	259
13.3.2	信号奇异性与小波消失矩	260
13.3.3	信号奇异性分析及去噪	262

13.4 基于 Chirplet 变换的线性调频信号参数估计	264
13.4.1 Chirplet 变换	264
13.4.2 线性调频信号参数估计	267
第 14 章 框架在图像处理中的应用	269
14.1 多分辨率多方向分析	269
14.1.1 离散 Contourlet 变换	270
14.1.2 连续 Contourlet 变换	278
14.1.3 Directionlet 变换	282
14.2 基于 Contourlet 自适应阈值 SAR 图像去噪	287
14.2.1 循环平移算法	288
14.2.2 SAR 图像噪声模型	288
14.2.3 Contourlet 萎缩法去噪	290
14.2.4 图像去噪的评价标准	292
14.2.5 自适应阈值 SAR 图像去噪算法	293
14.2.6 实例分析	294
14.3 基于 Directionlet 选择性阈值 SAR 图像去噪	295
14.3.1 选择性阈值	296
14.3.2 选择性阈值 SAR 图像去噪算法	297
14.3.3 实例分析	298
14.4 基于 Contourlet 多极化 SAR 图像融合	300
14.4.1 图像融合	301
14.4.2 遥感图像融合	302
14.4.3 图像融合评价标准	304
14.4.4 多极化 SAR 图像融合	306
14.4.5 实例分析	307
附录 I 常用不等式	312
I.1 Young 不等式	312
I.2 Hölder 不等式	312
I.3 Minkowski 不等式	314
附录 II 常用线性空间	316
II.1 有限维线性空间	316
II.2 无限维序列空间	316

II.2.1	ℓ^p 空间	316
II.2.2	ℓ^∞ 空间	317
II.2.3	c 空间	317
II.2.4	c_0 空间	318
II.3	无限维函数空间	318
II.3.1	$L^p(E)$ 空间	318
II.3.2	$L^\infty(E)$ 空间	319
II.3.3	$C(E)$ 空间	319
附录 III	Hilbert 空间中基与框架的关系	320
附录 IV	符号表	322
参考文献		324

第1章 概述

框架理论是继小波理论之后发展起来的一个新研究方向,是泛函分析、算子理论、非线性逼近论、信息理论相结合的产物,已经成为一些领域研究与发展的重要课题,不但推动了泛函分析和算子理论的深入研究,同时也推动了非线性逼近论的发展。在信号处理、图像处理、数据压缩、抽样理论、抽象数学、地震勘探、地球物理、雷达及通信等方面均具有突出的作用,具有十分广阔的应用前景。

1.1 框架理论的发展历程

信息已经成为人类社会赖以生存和发展的重要资源。随着以电子技术、计算机技术、通信技术、网络技术为代表的现代信息技术的飞速发展,人类社会正在从工业时代阔步迈向信息时代,信息化水平的高低已成为衡量一个国家、一个地区现代化水平和综合国力的重要标志。在信息时代的今天,人们越来越重视信息技术的发展以及对信息资源的开发和利用。

信息是客观事物状态的反映,是意义和符号的统一体,以语言、文字或图像的形式表现出来。信息已成为我们工作、学习和生活的重要组成部分,我们无时无刻都在获取信息、处理信息和传输信息,同信息打着各种各样的交道。信号作为信息的载体,无处不在。例如,传输信息的语音信号、广播信号、电视信号、通信信号等,获取信息的心电信号、脑电信号、水声信号、雷达信号等,处理信息的压缩信号、编码信号、滤波信号、估计信号等。信号处理的任务之一是认识客观世界中存在的信号的本质特征,并找出规律。信号处理是对信号进行提取、变换、分析、综合等处理过程的统称,其主要目的是去伪存真、特征抽取、编码与解码。

信息是信号的具体内容,信号则是信息的表现形式。信息蕴涵于信号之中;信号的变化则反映了所携带的信息的变化。信号代表一个实际的物理信号。从抽象(数学)的角度来描述信号,它是一个或若干个自变量的函数或序列的形式。从直观的角度来描述信号,它是函数随自变量变化关系的波形。任意给定一个自变量的值,如果可以唯一确定信号的取值,则该信号是确定信号;如果信号取值是不确定的随机值,则该信号是随机信号。如果信号的自变量在整个连续区间内都有定义,则是时间连续信号;如果信号仅在一些离散的时间点上才有定义,则称为时间离散信号。如果信号的定义域和值域都是连续的,则是模拟信号。如果信号的定义域和值域都是离散的,则是数字信号。如果信号的取值为实数,则称为实值信号,简称实信号;如果信号取值为复数,则称为复值信号,简称复信号。如果信号的能量是有限的,则称为能量有限信号,简称能量信号。如果信号的功率是有限的,则称为功率有限信号,简称功率信号。

为了有效地利用信号获取信息、处理信息和传输信息,选择合适的信号表示是非常重要的,关系获取信息、处理信息和传输信息的方式、质量、信息含量的多少及信息安全等诸多方面的问题。尽管存在众多的方法来描述信号,但从抽象的角度来看,无外乎是基表示的方法。即信号都可以表示为无穷多个基元素的线性代数和,通俗地讲,信号被分解成无穷多个分量的和(叠加)。而信号的这种表示常被称为信号展开式,展开系数就是信号与基之间的内积。信号与基的内积就是信号在基上的投影,反映了信号与基的相似程度。如果信号与基的某个元素的内积(或模值)大,相应于该元素的信号分量的展开系数就大,说明信号与该元素的相似程度就高,该元素所代表的信号分量在整个信号中占的比重就大。信号的基表示就是把函数分解成一系列简单函数的表示。

Fourier 变换是一种基表示的方法,无论是在一般的科学研究中,还是在工程技术的应用研究中,它都发挥着重要的作用。1822 年,法国数学家 J. Fourier 在出版的《热的解析理论》专著中,提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理,奠定了 Fourier 级数理论的基础。Fourier 级数理论使得对信号的研究归结为对简单的三角函数的研究。Fourier 级数与 Fourier 变换共同组成了 Fourier 分析。Fourier 级数用于分析周期性函数,Fourier 变换用于分析非周期性函数。经过不断发展,Fourier 变换不但已经形成了一个重要的数学分支,同时也在电气工程领域得到了成功应用。尤其是 20 世纪 40 年代之后,由于计算机技术的迅速发展以及快速 Fourier 变换(FFT)的出现,使得 Fourier 变换渗透到现代科学技术的几乎所有领域。无论在理论研究中,还是应用技术研究中,Fourier 变换成为基本的、有效的分析工具,并被深入地研究和广泛地应用。同时,Fourier 变换的局限性也逐渐暴露出来。Fourier 变换的基是一族指数函数 $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$, $e^{i\lambda t}$ 对不同的 $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 构成一族正交基 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbf{N}}$ 。由于指数函数 $e^{i\lambda t}$ 是变量 t 的一次函数,Fourier 变换适合于分析变化比较平稳的函数或信号。而且,Fourier 变换是将变量 t 的整个域变换到变量 λ 的域,不能反映被分析函数在变量 t 域的支撑情况。

从不同的角度去认识、分析信号有助于了解信号的本质特征。如果从信号的角度看一个函数 $x(t)$,常常将自变量 t 看作是时间变量(当然也可以是空间或其他物理意义的变量),Fourier 变换的基 $e^{i\lambda t}$ 中的变量 λ 对应的物理量就是频率(或角频率)。我们认为,信号 $x(t)$ 是以时间(空间)的形式来表达的。信号 $x(t)$ 的 Fourier 变换是以频率的形式来表达的。Fourier 变换将信号 $x(t)$ 从整个时域变换到整个频域,不具备对时间和频率的同时定位能力。即不能确定在某一时刻,信号 $x(t)$ 的频率是多少;不能确定某一特定的频率是在什么时刻产生的。如果信号 $x(t)$ 的频率是与时间无关的常数,Fourier 变换能够胜任分析任务;如果信号 $x(t)$ 的频率是时间的函数,Fourier 变换就不能详细分析它的结构。

对于一个信号 $x(t)$,信号的表示或分解存在分辨率问题。时域分辨率指对信号所能作出辨别的最小时间间隔;频域分辨率指对信号所能作出辨别的最小频率间隔。分辨能力的好坏取决于信号表示或分解的基函数的特点。由于 Fourier 变换的基函数 $e^{i\lambda t}$ 在频域是位于 λ 处的 δ 函数,因此,当 Fourier 变换来分析信号的频域行为时,它具有最好的频率分辨率。但是, $e^{i\lambda t}$ 在时域对应的是正弦函数($e^{i\lambda t} = \cos \lambda t + i \sin \lambda t$),其在时域的持续时间为 $-\infty \sim +\infty$,因此,在时域有着最坏的分辨率。故 Fourier 变换的基函数 $e^{i\lambda t}$ 不能满足信号的表示或分解对分辨率的要求。

针对 Fourier 变换的局限,展开了对 Fourier 变换进行改进的各种研究,并取得了许多

重要的成果。

1946年, D. Gabor 提出用二维的时-频平面上离散栅格处的点来表示一维信号的思路, 即任意栅格点 (m, n) 的函数是 Fourier 变换的基函数 $e^{i\lambda_n t}$ 与一个支撑较短的窗函数 $g(t - \tau_m)$ 的乘积, 并被称为基本信号, 所有栅格点 (m, n) 的函数构成一个用于信号表示或分解的函数族 $\{g(t - \tau_m)e^{i\lambda_n t}\}_{m, n \in \mathbb{N}}$ 。尽管 D. Gabor 当时采用 Gauss (高斯) 函数作为窗函数, 实际上, D. Gabor 提出的方法是一种加窗 Fourier 变换, 并被命名为 Gabor 变换。它是一种信号局部分析的新思想, 促进了信号处理的发展。现在, Gabor 变换是信号处理中一种重要的时频分析方法。但是, 由于 Gabor 变换采用时间宽度不变的窗函数, 它的分辨率是单一的, 不能满足多分辨率分析的要求。

小波变换是一种多分辨率分析方法, 在一定程度上克服了 Gabor 变换单一分辨率的不足。1974年, 法国地球物理学家 J. Morlet 首先提出小波变换的概念, 通过信号的直观物理意义和信号处理的实际经验, 建立了小波变换的反演公式, 当时未能得到广泛重视。1984年, J. Morlet 与 A. Grossmann 合作, 构造了时间-尺度小波, 即 Grossmann-Morlet 小波, 用于分析处理地质数据。1986年, 法国数学家 Y. Meyer 成功地构造出了一个小波基, 它是由具有一定衰减性的光滑函数 $\psi(t)$ 经过二进制伸缩与平移 $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交基。在此期间, 许多学者提出了多种具体小波的构造方法。1988年, S. Mallat 提出了构造正交小波基的多分辨率概念, 从空间上说明了小波的多分辨率的特性, 统一了在此之前构造正交小波基的各种方法, 并提出了现今广泛应用的 Mallat 快速小波分解和重构算法。1988年, I. Daubechies 基于多项式方式构造出具有有限紧支集的正交小波基。1989年, R. Coifman 等人引入了小波包的概念。1991年, C. K. Chui 和王建忠基于样条函数构造出单正交小波函数, 并讨论了具有最好局部化性质的尺度函数和小波函数的一般构造方法。1992年, A. Cohen 和 I. Daubechies 等人构造出了紧支撑双正交小波基。同时, I. Daubechies 和 S. Mallat 等学者揭示了小波变换和滤波器组之间的内在关系以及小波基函数与滤波器组的密切关系, 使小波分析在信号处理、图像处理中得到极其广泛的应用。

经过众多学者的不懈努力, 小波分析的理论已经基本建立, 并仍然处在发展中。由于小波分析具有多分辨率的特性, 广泛应用于信号处理、图像处理、计算机科学、基础数学、应用数学、物理科学和地球科学等众多科学研究领域和工程技术应用领域。

1952年, R. J. Duffin 和 A. G. Schaeffer 在研究非调和 Fourier 分析时, 进一步提炼了 D. Gabor 的方法, 并定义了 Hilbert 空间中框架的概念。他们在文献[24]中, 研究了指数函数族 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在什么情况下, 在空间 $L^2[a, b]$ 中完全或者组成 $L^2[a, b]$ 的一个 Riesz 基等问题; 在 $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的一致紧性大于 2π 时, 将 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 定义为 $L^2[-r, r]$ 的框架, 并称之为指数框架或 Fourier 框架。然而, 框架的概念在非调和 Fourier 分析领域之外并未引起人们的兴趣和重视。1980年, R. Young 在出版的书籍[25]中, 论述了框架的概念。在研究小波分析理论及应用的同时, I. Daubechies、A. Grossmann 和 Y. Meyer 于 1986 年在文献[26]中, 研究了具有一定衰减性的光滑函数 $\psi(t)$ 经过二进制伸缩与平移 $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的框架, 并称为小波框架 (或 Affine 框架)。同时, 文献[27]展示了 $L^2(\mathbf{R})$ 空间函数的框架级数展开非常相似于用规范正交基的级数展开, 而一族函数

成为框架的条件要比成为规范正交基的条件宽松得多,正是因为如此,许多学者认识到框架是一个有潜力的研究方向,并开始研究框架理论及应用。I. Daubechies 后来的文献[27]和[28],充分反映了这一点。1989年,C. Heil 和 D. Walnut 在文献[30]中,将框架的概念与 Gabor 变换相结合,研究了 Gabor 框架,也称之为 Weyl-Heisenberg 框架(简记为 W-H 框架)。在 1991 年之前,只有少量的文献涉及框架的概念及分析方法,这应该是框架理论的初期发展阶段。

H. G. Feichtinger 与 K. Gröchenig 自 1988 年开始研究 Banach 空间中原子分解的特性及原子分解的方法,原子及原子分解是类似于框架及框架分解的方法。在此基础上,K. Gröchenig 于 1991 年在文献[35]中,提出 Banach 空间中框架及对偶框架的概念,并定义了相应的重构算子,使 Banach 空间的框架成为框架理论的一个重要分支而得到发展。

自 1991 年以来,众多的学者分别从泛函分析、调和分析、算子理论、逼近理论、信号处理、图像处理、生物医学、量子物理及地球物理等不同的研究领域对框架理论展开了研究,取得了丰硕的研究成果。对框架理论的研究,主要有两种不同的方式。一种方式是从泛函分析的角度,研究 Hilbert 空间及 Banach 空间中一般框架的理论;另一种方式是从不同的领域研究相应的某种类型的框架,例如信号处理中的 Gabor 框架和小波框架。从泛函分析的角度来看,框架理论是按照 Hilbert 空间和 Banach 空间发展的。从信号处理的角度来看,框架理论是按照 Affine 框架和 W-H 框架发展的。

O. Christensen 和 P. G. Casazza 两位学者对框架理论作了深入的研究,推动了框架理论的发展。

1993 年,O. Christensen 研究了框架分解,并将框架与预框架算子、框架算子之间建立相应的对应关系,通过研究预框架算子、框架算子来研究框架的性质。1993 年,O. Christensen 在文献[39]中,讨论了 Hilbert 空间中的框架稳定性,将 Paley-Wiener 定理推广到 Hilbert 空间中框架的稳定性。随后,O. Christensen 在文献[40]中又将 Paley-Wiener 定理推广到 Hilbert 空间中 Riesz 基的稳定性研究,它与 Kato 的扰动性定理有关。1997 年,O. Christensen 与 C. Heil 在文献[44]中研究了 Banach 空间中的框架稳定性。同时,O. Christensen 与 P. G. Casazza 在文献[51]中,将关于 Banach 空间中可逆算子的扰动结果推广到 Banach 空间中框架的扰动性研究。O. Christensen 一直在研究框架系数和逆框架算子的逼近问题,于 1993 年研究了正交投影方法的逆框架算子逼近,与 P. G. Casazza 合作在 1997 年研究了逆框架算子逼近的一般方法。2003 年,O. Christensen 与 D. T. Stova 在文献[49]中,研究了 Banach 空间中 p -框架与 q -Riesz 基。

P. G. Casazza 分别研究了框架的性质、框架序列、框架与 Riesz 基的关系、框架的扰动及逆框架算子的逼近问题,深入研究了两个框架等价的判决条件,框架元素与框架界、Hilbert 空间的维数之间量的关系以及计算最优框架界的公式。1998 年,P. G. Casazza 在文献[56]中,证明了 Hilbert 空间上的任意一个框架可以写成三个规范正交基的和。他还证明了每个框架可以写成两个正规紧框架的和或两个更大的 Hilbert 空间中的规范正交基的平均值。2003 年,P. G. Casazza 与 G. Kutyniok 提出 Hilbert 空间中的子空间框架概念,研究了子空间框架的性质、子空间框架的摄动和子空间框架逆算子的逼近。尤其是,P. G. Casazza 的两篇文献[59]和[62]对框架理论体系的形成起到了推动作用。

2000 年,D. Han 和 D. R. Larson 在文献[67]中,将算子理论、抽象代数理论用到框架

理论的研究,得到 Hilbert 空间中框架的膨胀性质,并系统研究了正规框架、正规紧框架及对偶框架的性质。2001 年, A. Aldroubi、Q. Sung 与 W. Tang 在文献[68]中定义了 Banach 空间中的 p -框架,并研究了其性质。2002 年, M. Frank 与 D. R. Larson 在文献[69]中引入了 Hilbert C^* -模中的框架概念,将可分的 Hilbert 空间框架理论推广到有限或可数 Hilbert C^* -模上,用 C^* -模理论推广 Hilbert 框架的一些重要理论结果,研究了框架相似问题、框架变换的存在性及标准正规紧框架的重构公式。

我国的周家云、辛杰、郭燕妮、刘宇、曹怀信、杜鸿科、姚喜妍、王娟、李春艳、朱红鲜、赵建伟、朱玉灿、艾瑛、肖雪梅、徐荣聪、李登峰、薛明志、杨利军、陶常利、于加东、邹玉梅、木乐华、杨国萍、李万社、郭晓旋、刘贵忠、赵平、赵春等学者分别研究了 Hilbert 空间中框架的稳定性、Banach 空间中 p -框架与 q -Riesz 基、 q -框架与 p -Riesz 基、Banach 空间中框架的稳定性以及广义框架稳定性,使框架理论得到进一步发展。

目前, Hilbert 空间的框架理论已发展得相对较为完善, Banach 空间的框架理论仍存在许多尚未解决的问题。框架理论有着精细而丰富的结构和性质,框架理论仍需要进行深入的研究和进一步完善。

1.2 框架理论的主要应用

框架理论在基础数学、应用数学、物理学及工程技术等领域均得到应用,尤其是在信号处理、图像处理及通信等方面。

Gabor 框架把框架的定义从一族一维函数扩展到二维函数。从理论上讲, Gabor 框架展开的讨论和时频分布、滤波器组及小波变换等新的信号处理理论密切相关。所以,这些新的信号处理理论的应用也涉及 Gabor 框架展开的应用。Gabor 框架在信号处理中广泛应用,并在信号的表示、图像的表示、语音分析、目标识别、信号的瞬态检测等方面都取得了很好的应用成果。

小波分析的出现给框架理论注入了新鲜血液,使框架理论具有强大的生命力。从此,框架的思想和方法走出了纯粹理论数学分析的误区,在信号处理等许多领域发挥越来越重要的作用。同时,框架概念也成为小波分析中基本概念之一,是研究小波分析的一个主要工具,在小波分析的发展中起到了非常重要的作用,并逐步丰富了自身。小波分析和框架理论的结合以小波框架的形式表现出来。小波框架在信号处理中广泛应用,例如在信号去除噪声方面有着优势,因为采样值中的白噪声将被变换到系数中的白噪声。信号能量主要集中在一些大的小波系数上,而噪声将被平均的分布在所有小波系数上,这使得用主要的大的幅度系数获取信号成为可能。

框架理论已经被成功应用在图像处理中。在医学成像中,框架多分辨率分析应用于亚细胞蛋白质的定位、分类及解释;在生物鉴定学中,框架多分辨率分析应用于指纹的分类与识别。小波框架已经被成功应用在图像压缩中。例如,新的 JPEG 图像压缩标准 (JPEG2000) 是基于小波的,指纹存档压缩标准也是基于小波的。

框架理论在通信中也得到了广泛应用。N. Grip 在文献[71]中提出了一种基于离散多音调制的新双工方法,称为 Zipper。目的是提供比特率上升到 52Mb/s,比通常的调制解调器快大约 1000 次。美国国家标准学会 (ANSI) T1E1.4 组和欧洲电信标准学会 (ET-