高中

解析幾何學

—複習用—

余文琴編

商務印書館發行

高中

解析幾何學

—複習用—

余文琴編

商務印書館發行

(50521·1)

高中解析幾何學
(複習用)

編纂者　余　文　琴

發行者　商務印書館
上海河南中路二一一號

印刷者　商務印書館

上海及各地
發行所　商務印書館

1948年7月初版
1950年5月再版　基價6·8元

目　錄

第一章　有向線段正射影點與座標……………………………………1

〔提要〕 1. 有向線段 ……………………………………………1

2. 正射影 ………………………………………………2

3. 兩點間之距離 ………………………………………2

4. 直線之線坡 …………………………………………3

5. 兩直線間之角 ………………………………………3

6. 兩點連線間之分點 …………………………………4

7. 三角形之面積 ………………………………………4

〔例題〕…………………………………………………………6

〔習題〕 ………………………………………………………13

第二章　曲線及方程式 ……………………………………………15

〔提要〕 8. 曲線之方程式的定義……………………………15

9. 求曲線之方程式之法則……………………………15

10. 描已知方程式之軌跡的法則………………………15

11. 考察曲線性質之方法………………………………16

12. 可分解之方程式……………………………………17

13. 求已知兩曲線之交點的法則……………………17
〔例題〕……………………………………………………18
〔習題〕……………………………………………………28
第三章 直線……………………………………………30
〔提要〕14. 與座標軸平行之直線的方程式…………30
15. 通過兩點之直線的方程式………………………30
16. 通過一定點且有已知線坡之直線的方程式……………………………………………………30
17. 線坡截距式之方程式……………………………31
18. 二直線間之交角…………………………………31
19. 直線之方程式的標準式…………………………32
20. 化直線之一般方程式爲標準式之方法……33
21. 求兩平行直線間距離之方法……………………33
22. 由一直線至一點之距離…………………………33
23. 三直線會於一點之條件…………………………34
24. 直線系……………………………………………34
〔例題〕……………………………………………………35
〔習題〕……………………………………………………55
第四章 圓……………………………………………57
〔提要〕25. 圓之標準方程式………………………57

26. 圓之一般方程式……57
27. 圓之判別式……57
28. 二元二次方程式之一般形式……58
29. 圓之切線的方程式……58
30. 圓之法線的方程式……59
31. 接觸弦……59
32. 經過三點之圓……59
33. 圓系……60
34. 切線之長……62
35. 兩圓之交角……62
〔例題〕……63
〔習題〕……86
第五章　圓錐曲線……91
〔提要〕36. 圓錐曲線之定義……91
37. 圓錐曲線之種類……91
38. 一般圓錐曲線之方程式……91
I. 抛物線
39. 抛物線之標準方程式……91
40. 抛物線之通徑……92
41. 抛物線之一般方程式……92

II. 橢圓

42. 橢圓之標準方程式……………………93
43. 橢圓之通徑……………………95
44. 橢圓之一般方程式……………………95

III. 雙曲線

45. 雙曲線之標準方程式……………………96
46. 雙曲線之通徑……………………98
47. 漸近線……………………98
48. 雙曲線之一般方程式……………………99
49. 共軛雙曲線……………………100
50. 雙曲線漸近線及共軛雙曲線之方程式間之關係……………………100
51. 正雙曲線……………………101
52. 抛物線爲雙曲線之極限……………………102
53. 共焦點錐線……………………102

IV. 切線與法線

54. 已知切點之切線的方程式……………………103
55. 已知線坡之切線之方程式……………………104
56. 法線之方程式……………………104
57. 次切線及次法線……………………104

58. 接觸弦 ……105
59. 直徑及共軛直徑 ……105
60. 圓錐曲線之特性 ……106
〔例題〕……107
〔習題〕……148
第六章　座標之變換……151
〔提要〕61. 平行移軸法 ……151
62. 轉軸法 ……151
63. 用轉軸法消去 xy 項……152
64. 直角座標軸之一般變換 ……153
65. 一般二次曲線之種類的鑑別法 ……153
〔例題〕……153
〔習題〕……162
第七章　極座標……165
〔提要〕66. 極座標之定義 ……165
67. 直角座標與極座標之關係 ……165
68. 直線關於極座標之方程式 ……166
69. 圓關於極座標之方程式 ……167
70. 圓錐曲線關於極座標之方程式 ……168
〔例題〕……169

〔習題〕……178

第八章 參數方程式及軌跡……179

〔提要〕71. 定義……179

72. 作圖……179

73. 求參數方程式之要點……179

74. 用對應直線之交點確定軌跡之法則……179

〔例題〕……180

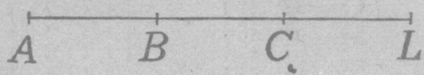
〔習題〕……203

高中解析幾何學

第一章　有向線段 正射影 點與座標

〔提　要〕

1. 有向線段 (Directed line segment)　兩有向線段 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BC}$ 之和爲一有向線段 $\overline{AC}$:



第 1 圖

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC} \qquad \text{(公式 1)}$$

推論 1. 若 A, B, C, D 爲一有向直線 L 上任意四點，則

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{AD} \qquad \text{(公式 2)}$$

推論 2. 若 $M, M_1, M_2, M_3\cdots\cdots, M_{n-1}, N$ 爲 L 上任意諸點，則

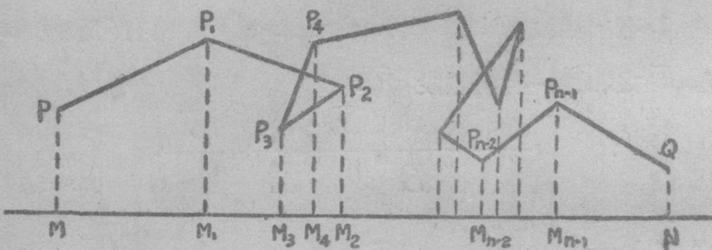
$$\overline{MM_1}+\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\cdots\cdots$$
$$+\overline{M_{n-2}M_{n-1}}+\overline{M_{n-1}N}=\overline{MN}。 \qquad \text{(公式 3)}$$

〔於直線 L 上任意選其一方向爲正，而令其他方向爲負，例

如：　$\overline{AB}=l$, 則 $\overline{BA}=-l$; 又如：$\overline{AB}=-l$, 則 $\overline{BA}=l$.〕

2. 正射影(Orthogonal projection)

定理 1. 任意一折線 $PP_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}Q$ 之諸有向線段 $PP_1, P_1P_2, \cdots\cdots, P_{n-1}Q$, 在一有向直線 L 上之正射影之和等於有向線段 PQ 在 L 上之正射影。



第 2 圖

定理 2. 共端點之二折線段 $PP_1P_2\cdots P_{n-1}Q$ 與 $PP_1'P_2'\cdots P'_{n-1}Q$ 之諸有向線段 PP_1, P_1P_2, $\cdots\cdots$, $P_{n-1}Q$ 與 PP_1', $P_1'P_2'$, $\cdots\cdots P'_{n-1}Q$ 在一有向直線 L 上之正射影之和彼此相等。

〔以後有向直線或有向線段皆簡稱爲直線或線段〕

3. 兩點間之距離　設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 爲任意兩點，D 爲其間之距離，則

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。\qquad (公式 4)$$

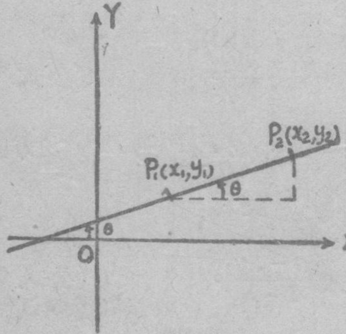
推論　任意一點 $P(x, y)$ 與原點 $(0, 0)$ 之距離為

$$D=\sqrt{x^2+y^2}。\qquad (公式 5)$$

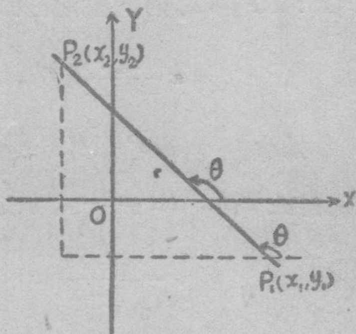
〔在此書內 (x, y) 常表示一點之直角座標〕

4. 直線之線坡 (Slope)　設兩點 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 之連線交 x 軸於 θ 角，則此連線之線坡為

$$m=\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}。\qquad (公式 6)$$



第 3 圖



第 4 圖

〔注意〕　當 $0°<\theta<90°$ 時，m 為正，

當 $\theta=0$ 時，$m=0$，直線與 x 軸平行，

當 $90°<\theta<180°$ 時，m 為負，

當 $\theta=90°$ 時，$m=\infty$，直線與 y 軸平行。

5. 兩直線間之角　設二直線與 x 軸所夾之角各為 θ_1 與 θ_2，且其等之線坡各為 m_1 與 m_2，則二者之夾角 $\theta=\theta_1-\theta_2$ 可

由下式決定之：

$$\tan\theta=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}。\qquad\text{(公式 7)}$$

推論 1. 若此兩直線平行，則 $m_1=m_2$。

推論 2. 若此兩直線互相垂直，則 $m_1m_2=-1$。

6. 兩點連線間之分點　設 $P(x, y)$ 爲二已知點 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 之連線上一點，且分線段 P_1P_2 成一已知比，如 $P_1P : PP_2=\lambda$，則 P 點之座標爲

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\qquad\text{(公式 8)}$$

推論 1. 若 P 點外分線段 P_1P_2，則 P_1P 與 PP_2 之方向相反，故 $P_1P : PP_2=-\lambda$，於是公式 8 變爲

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\qquad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}。\qquad\text{(公式 9)}$$

推論 2. 若 P 爲 P_1P_2 之中點，則 $P_1P : PP_2=1$，卽 $\lambda=1$，於是公式變爲

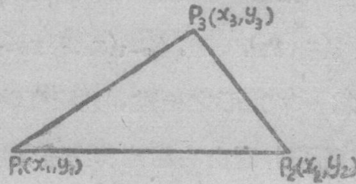
$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\qquad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)。\qquad\text{(公式 10)}$$

7. 三角形之面積　設 $P_1(x_1, y_2)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 爲三角形 $P_1P_2P_3$ 之頂點，A 爲其面積，則

$$A=\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right\},$$

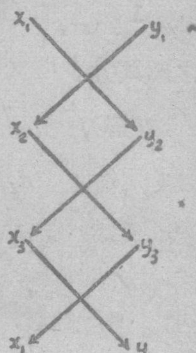
$$\text{或}\qquad A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(公式 11)}$$

〔注意〕 若一三角形之頂點依反時針方向之次序排列時，則此三角形之面積爲正，如右圖。若依時針方向之次序排列時，面積得負值。爲便利計，依下述步驟計算之。



第 5 圖.

(*a*) 將三角形各頂點之座標依反時計方向之次序排成兩行，如右圖



第 6 圖

(*b*) 以前行之各橫座標各與後行下一列之縱座標相乘，(如 x_1y_2 　　) 再將各積相加，乃得總和

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1。$$

又以後行之各縱座標與前行下一列之橫座標相乘(如 $x_2y_1\cdots\cdots$)，再將各積相加，乃得總和

$$x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3。$$

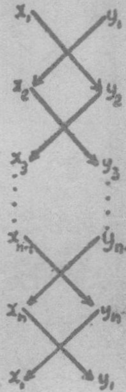
(*c*) 由前一和減去後一和再除以 2，卽得三角形之面積。

推論 1. 若三點 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 同在一

直線上，

$$\text{則}\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(公式 12)}$$

推論 2. 設 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$,……, $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $P_n(x_n, y_n)$ 爲一 n 角形之頂點，且依反時鐘方向之次序排列，則由右圖施行上三步驟，同樣可求得此 n 角形之面積。



第 7 圖

〔例　題〕

1. 證明 (2, 3), (4, 1), (8,2), 與 (6, 4) 爲一平行四邊形之四頂點。

〔解〕 由公式 4 知四邊形之長順次爲

$$d_1 = \sqrt{(2-4)^2+(3-1)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$d_2 = \sqrt{(4-8)^2+(1-2)^2} = \sqrt{17},$$

$$d_3 = \sqrt{(8-6)^2+(2-4)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$d_4 = \sqrt{(6-2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{17},$$

此四邊形之兩對邊彼此相等，故爲一平行四邊形。

2. 若一圓之圓心爲 $C(3, 0)$，其長爲 4 之一弦的中點爲 $D(5, 4)$，求此圓之半徑。

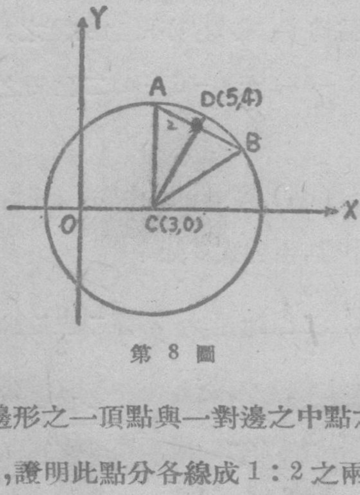
〔解〕 如圖 $CD\perp AB$（通過一弦之中點的半徑必垂直於此弦）。

$$\therefore \quad CA=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{AD}^2}。$$

$$\because \quad \overline{CD}^2=(5-3)^2+4^2=20,$$

$$\overline{AD}^2=2^2=4。$$

$$\therefore \quad CA=\sqrt{24}=2\sqrt{6}。$$



第 8 圖

3. 平行四邊形之一頂點與一對邊之中點之連線交其相對之對角線於一點，證明此點分各線成 1：2 之兩線段。

〔解〕 設平行四邊形之三頂點爲 $A(0,0), B(a,0), C(b,c)$，則第四頂點必爲 $D(b+a,\ c)$ 或 $D_1(b-a,\ c)$ 或 $D_2(a-b,\ -c)$。設第四頂點爲 $D\ (b+a,\ c)$，則與 $(0,\ 0)$ 相對，由公式 8 知 CD 之中點 E 爲 $\left(\frac{a+2b}{2},\ c\right)$，但分 AE 成 1：2 之點爲

$$x=\frac{0+2\frac{a+2b}{2}}{1+2}=\frac{a+2b}{3},\quad y=\frac{0+2c}{3}=\frac{2c}{3};$$

分對角線 BC 成 $2:1$ 之點爲

$$x=\frac{a+2b}{3},\qquad y=\frac{0+2c}{3}=\frac{2c}{3}。$$

此兩點相合,即 AE 與 BC 之交點互分,AE 與 BC 成 $2:1$ 之兩線段。

設第四點頂點爲 D_1 或 D_2 亦可如法證之。

4. 試將自$(8,-18)$至$(-6,-4)$二點間之距離平分爲四，求其分點。

〔解〕 設 $C(x_1, y_1)$ 爲 AB 之中點，$D(x_2, y_2)$，$E(x_3, y_3)$ 各爲 AC, CB 之中點,由公式 8 知

$$C:\quad x_1=\frac{8-6}{2}=1,\qquad y_1=\frac{-18-4}{2}=-11;$$

$$D:\quad x_2=\frac{8+1}{2}=4\frac{1}{2},\qquad y_2=\frac{-18-11}{2}=-14\frac{1}{2};$$

$$E:\quad x_3=\frac{1-6}{2}=-2\frac{1}{2},\quad y_3=\frac{-11-4}{2}=-7\frac{1}{2}。$$

5. 設一矩形之對角線互相垂直,則此矩形必爲一正方形。

〔解〕 設矩形之四頂點爲$(0, 0)$,$(a, 0)$,$(0, b)$及(a, b);則由公式 6 知兩對角線之線坡爲 $\frac{b-0}{a-0}=\frac{b}{a}$ 及 $\frac{b-0}{0-a}=-\frac{b}{a}$。