线性代数学习指导

——与同济大学《线性代数》第三版配套使用

郭华 刘小明 罗光耀 编

重庆出版社

线性代数学习指导

——与同济大学《线性代数》第三版配套使用

郭华　刘小明　罗光耀　编

重 庆 出 版 社

内容简介

本书是为配合线性代数教学及学习而编写的学习指导书。全书结构合理,题型丰富,覆盖面广,解题思路清晰,不少题还附有多种解法,更有利于拓展解题思路。在“补充练习”部分中还精选了难度层次不同的习题,并给出了详细解答或提示。

本书的一大特色是针对研究生考试,在各章中增添了“综合与提高”部分,“补充练习(二)”还附有近几年相关的考研试题 初学者可从中了解考研题型及难度,为今后考研打下基础。

本书可供大学生、自学者学习使用,还可作为同行教师的教学参考用书。

前　言

线性代数是理工科大学最主要的一门基础课，在一年级开设。它的抽象性使大多数新生难以适应，难以准确、深刻地理解概念。他们感到解题困难，尤其是证明题。当前，各高校的线性代数课时有所削减，更使教师难教，学生难学。有鉴于此，我们编写了这本学习指导，与同济大学数学教研室编写的《线性代数》第三版配套使用，辅助学生解决疑难，掌握要点，学好本课程。本书也可供教学同行们参考。

为了有助于部分学生今后的考研复习，本书还在每章中设有“综合与提高”部分，进一步介绍解题方法和技巧。在“补充练习”中配备了(一)、(二)两部分，试题第二部分含有近几年数学一、数学二考研试卷中的线性代数试题，并加(*)号表明，在题后还附有考题的年份，以供读者参考。

全书按教材必学内容共分5章，每章包含6个部分：①基本要求；②内容简介；③例题分析；④教材习题选解；⑤综合与提高；⑥补充练习。例题分析部分包含一些典型例题，并对教材中一些提到而未证的结论给出了证明。教材习题选解部分给出了较难习题的详细解答及一些错解分析。补充练习部分提供了不同难度层次的思考题、填空题、选择题、解答题、证明题，并附有补充练习的解答或提示。

本书曾作为教学参考试用过几年，在教材的第三版编出后，

我们又作了较大改动，在编写中得到了学校领导们的大力支持，渝州大学数学与计算机学系主任李登信教授提出了很多宝贵的意见与建议，李远东教授与陈朝舜副教授对全书进行了认真的审阅，在此谨表谢意。限于水平，书中难免有错误和疏漏，敬请专家及读者们不吝批评指正。

作　者

2001.6

目 录

第一章　行列式

基本要求

1. 了解行列式的定义,掌握行列式的性质.
2. 掌握四阶行列式与简单的 n 阶行列式的计算.
3. 会用克拉默(Cramer)法则解线性方程组.

内容简介

一、全排列与逆序数

1. 全排列与逆序数

全排列:将 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的一个全排列.

逆序:设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1, 2, …, n 的一个全排列,可规定从小到大的排列顺序为标准次序,当某两元素的先后顺序与标准次序不同时,称这两元素之间构成一个逆序.

逆序数:设元素 p_i 与排在它前面的 $i-1$ 个元素构成的逆序为 $t(p_i)$ 个,则该排列的逆序数

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\sum_{i=1}^{n}t(p_i).$$

2. 标准排列与奇、偶排列

将排列 $1,2,\cdots,n$ 称为标准排列,标准排列的逆序数等于零.排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数为偶数的排列称为偶排列;逆序数为奇数的排列称为奇排列.

3. 对换

在排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,将其中两元素对调,其余元素不变,这种得

到新排列的方法叫对换．排列经过一次对换,其奇偶性发生改变．

二、行列式的概念与性质

1. 行列式的概念

行列式定义及表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 1, 2, …, n 这 n 个自然数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和．

n 阶行列式 D 也可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

同样 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 1, 2, …, n 这 n 个自然数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和．

利用对换可以证明定义中的一般项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 可换成：

$$\underline{(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.}$$

即一般项中元素的排列顺序可以是任意的．

说明：行列式的各项是由行列式中不同行不同列的元素之积构成的．各项前附的符号由行标排列与列标排列的奇偶性共同决定．

2. 行列式的性质

(1) 行列式转置后其值不变．

意义:行列式中对行成立的命题对列也成立,反之亦然．

(2) 行列式的两行(列)互换,行列式变号．

(3) 用数 k 乘行列式,其值等于用 k 乘行列式的某一行(列)中的每一元素.

(4)行列式的某行(列)上元素全为零,则值为零.

(5)行列式某两行(列)对应的元素成比例,则行列式值为零.

(6)若行列式的某一行(列)可写成两项的和,则这个行列式可写成两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a'_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

与
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2j}+a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(7)行列式某一行(列)加上另一行(列)的 k 倍,其余各行(列)不变,得到的新行列式的值与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

与

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i + kc_j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, (i \neq j).$$

三、行列式按行(列)展开法则

1. 元素的余子式、代(数)余子式

在 $D = |a_{ij}|_n$ 中划去a_{ij}所在的行与列后，剩下的 $n-1$ 阶行列

式称为a_{ij}的余子式，记为M_{ij}；a_{ij}的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

2. 行列式按行(列)展开法则

设 $D=|a_{ij}|_n$，则有

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D,$$

或
$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D.$$

其中 $i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n.$

推论：$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ (i\neq j).$$

四、基本行列式

1. 三角行列式

(1)下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2)上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

(3)对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}.$$

(4)次对角形行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

2. 准下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

3. 范德蒙德(Yandermonde)行列式

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i\geqslant j\geqslant 1}(x_i - x_j).$$

注意:$V(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \Leftrightarrow$ 存在 $i \neq j$ 使 $x_i = x_j$.

五、克拉默法则

含 n 个方程 n 个未知数的线性方程组为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

称 $D = |a_{ij}|$ 为线性方程组（1.1）式的系数行列式，将 D 中第 j 列用常数项代换得到的新行列式记为 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$，则克莱默法则可表述为 $b_1\ b_2 \cdots b_n$

$$D \neq 0 \Rightarrow (1.1)\text{式有惟一解}: x_j = \frac{D_j}{D}\ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

推论：齐次线性方程组（即（1.1）式中 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时）有非零解 $\Rightarrow D = 0$（第三章将证明：$D = 0$ 也是充分条件）.

注意：克拉默法则仅适用于方程个数与未知数个数相同的情形.

例 题 分 析

例 1 求 k，l 的值，使 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{5l}a_{3k}$ 在五阶行列式中附“－”号.

$a_{14}a_{23}a_{3k}a_{45}a_{5l}$

解 由题意知 $4\ 3\ 2\ 5$

$$1 \quad 2$$

$$(-1)^{\tau(21453)+\tau(345lk)} = -1,$$

而
$$\tau(21453) = 1 + 0 + 0 + 2 = 3, \qquad 1+2+3$$

所以 $\tau(345lk)$ 为偶数. 6

又 $345lk$ 为 34512 或 34521. 检验知：$\tau(34512) = 6$，故 $\tau(34521)$ 为奇数，因此

$$l = 1, \quad k = 2.$$

例 2 求 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 展开式中含有 x^4 与 x^3 的项的系数.

解 考察一般项 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$，由定义知，含 x^4 的项需含四个 x 因子，故含 x^4 的项为 $(-1)^{\tau(1234)}5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$.

考虑含 x^3 的项，由排除法知 $p_1=2$ 或 4.

当 $p_1=2$ 时，有 $(-1)^{\tau(2134)}1\cdot x\cdot x\cdot 2x=-2x^3$;

$p_1=4$ 时，有 $(-1)^{\tau(4231)}3\cdot x\cdot x\cdot x=-3x^3$.

合并同类项得：$-5x^3$.

综上可知含 x^4 的项的系数为 10，含 x^3 的项的系数为 -5.

例 3 利用定义计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

解 考虑 D 的一般项 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$，显然 p_3，p_4 和 P_5 只能取 4 与 5 时，a_{3p_3}，a_{4p_4} 和 a_{5p_5} 才可能不为零，但 p_3,p_4,p_5 两两不同，即 p_3,p_4,p_5 中至少有一个取 1，2，3. 也就是说 $a_{3p_3},a_{4p_4},a_{5p_5}$ 中至少有一个为零. 故 D 的每项均为零，即有 $D=0$.

注意：此法适用于非零项较少的行列式.

例 4 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

解法 1 将行列式化为上三角形行列式进行计算 .

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 + ar_1}$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + (ab+1)r_2}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & abc+c+a & ab+1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & abc+c+a & ab+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + (abc+c+a)r_3}$$