主编　严谦泰　王澜峰

# 高等代数

## 考点综述与问题探讨

国防工业出版社
National Defense Industry Press

# 高等代数考点综述与问题探讨

主　编　严谦泰　王澜峰
副主编　郭亚梅　李飞祥
　　　　张丽芬　姚合军

国防工业出版社
·北京·

# 内容简介

本书编写的目的在于帮助学生对教材中的考点融会贯通，给考研人员以更丰富、实用的解题信息，加深对基本概念、基本理论的理解，提高解题的技能和技巧。本书习题涉及到全国很多高校，对各种考题不仅做了题型的归纳，也对考题的方法做了归纳，希望达到抛砖引玉的效果，使学生和考生能由此及彼，举一反三。

全书共分9章，每章包括基本知识、习题和习题解答。许多习题提供多种解法，并且对于有启示的习题题后附有注记，起到画龙点睛的作用。学生可通过章节，迅速找到自己所需要的习题，思路清晰，重点突出。

本书可作为北京大学数学系编《高等代数》的学习参考书，也可作为考研人员的复习资料，也是高校数学教师的教学参考资料。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数考点综述与问题探讨/严谦泰，王澜峰主编. —北京：国防工业出版社，2009.8

ISBN 978-7-118-06444-5

Ⅰ.高... Ⅱ.①严...②王... Ⅲ.高等代数－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115485 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

**开本** 787×1092 1/16 **印张** 21¾ **字数** 503 千字

2009年8月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 32.00 元

**(本书如有印装错误，我社负责调换)**

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

# 前　言

高等代数是数学专业的一门主干基础课程，它对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力的培养，以及后续课程的学习起着非常重要的作用。高等代数主要包括多项式和线性代数两部分，而线性代数又是理、工、农、医、经济、管理、金融等学科的基础课。高等代数的特点是习题类型多，内涵丰富，变化复杂，难于概括和统一处理。学生在学习这门课程时普遍感到抽象，抓不到概念的实质，解题更感困难，总结不出一般的思考方法。

本书编写的目的在于帮助学生对教材中的考点融会贯通，给考研人员以更丰富、实用的解题信息，加深对基本概念、基本理论的理解，提高解题的技能和技巧。本书习题涉及到全国很多高校，对各种考题不仅做了题型的归纳，也对考题的方法做了归纳，希望达到抛砖引玉的效果，使学生和考生能由此及彼，举一反三。

全书共分 9 章，每章包括基本知识、习题、习题解答。许多习题提供多种解法，并且对于有启示的习题题后附有注记，起到画龙点睛的作用。学生可通过章节，迅速找到自己所需要的习题，思路清晰，重点突出。

该书可作为北京大学数学系编《高等代数》的学习参考书，也可作为考研人员的复习资料。

本书的编写人员是多年从事高等代数教学的教师。全书由严谦泰、王澜峰主编。第 1 章和第 2 章由郭亚梅编写，第 3 章由张丽芬编写，第 4 章由姚合军编写，第 5 章和第 8 章由李飞祥编写，第 6 章和第 7 章由王澜峰编写，第 9 章由严谦泰编写。全书由王澜峰统稿，并由严谦泰审阅。

由于编写人员水平有限，对于书中的不妥或疏漏之处，敬请读者指正。

编者

2009 年 6 月

# 目　　录





此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

# 第1章 多项式

## 1.1 考点综述

### 1.1.1 数域

**1. 数域**

**定义1.1** 设$P$是由一些复数组成的集合,其中包括0与1.如果$P$中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是$P$中的数,那么$P$就称为一个数域.

注:① 全体整数组成的集合、全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合分别用字母$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{C}$来代表,后三个数集都是数域,而整数集不是数域.

② 如果数的集合$P$中任意两个数做某一种运算的结果都仍在$P$中,那么就说数集$P$对这个运算是封闭的.因此数域的定义也可以说成,如果一个包含0、1在内的数集$P$对于加法、减法、乘法与除法(除数不为零)是封闭的,那么$P$就称为一个数域.

③ 由于$P$对于减法是封闭的,且$0=1-1$,故数域的定义也进一步说成,如果一个包含1在内的数集$P$对于加法、减法、乘法与除法(除数不为零)是封闭的,那么$P$就称为一个数域.

**定理1.1** 所有的数域都包含有理数域.在有理数域与实数域之间存在无穷多个数域;在实数域与复数域之间不存在其他的数域.

### 1.1.2 一元多项式概念及运算

**1. 一元多项式概念**

**定义1.2** 设$n$是一非负整数,$x$是一个符号(或称文字).形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$全属于数域$P$,称为系数在数域$P$中的一元多项式,或者简称为数域$P$上的一元多项式.其中,$a_ix^i$称为$i$次项,$a_i$称为$i$次项的系数.用$f(x),g(x),\cdots$或$f$,$g,\cdots$等来表示多项式.

**定义1.3** 在多项式$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$中,如果$a_n\neq0$,那么$a_nx^n$称为多项式的首项,$a_n$称为首项系数,$n$称为多项式的次数,记为$\partial(f(x))$.

**定义1.4** 系数全为零的多项式称为零多项式,记为0.

注:零多项式是唯一不定义次数的多项式.

若$f(x)=c$为常数,则$\partial(f(x))=0$,称为零次多项式.

**2. 运算**

1) 加法

**定义 1.5** 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,$$

是数域 $P$ 上两个多项式,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和为

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\\&=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.\end{aligned}$$

这里不妨设 $n\geqslant m$,在 $g(x)$ 中令 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$.

注:(1) 数域 $P$ 上的两个多项式经过加、减运算后,所得结果仍然是数域 $P$ 上的多项式.

(2) 次数公式:$\partial(f(x)+g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$.

2) 乘法

**定义 1.6** $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积为

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0,$$

其中 $s$ 次项的系数是

$$a_sb_0+a_{s-1}b_1+\cdots+a_1b_{s-1}+a_0b_s=\sum_{i+j=s}a_ib_j,$$

所以 $f(x)g(x)$ 可表示成

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\Big(\sum_{i+j=s}a_ib_j\Big)x^s.$$

注:(1) 数域 $P$ 上的两个多项式经过乘法运算后,所得结果仍然是数域 $P$ 上的多项式.

(2) 次数公式:若 $f(x)\neq0,g(x)\neq0$,则 $f(x)g(x)\neq0$,并且

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x)).$$

(3) 多项式乘积的首项系数就等于因子首项系数的乘积.

3) 运算律

加法交换律: $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

加法结合律: $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$;

乘法交换律: $f(x)g(x)=g(x)f(x)$;

乘法结合律: $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$;

乘法对加法的分配律:$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$;

乘法消去律:若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$,且 $f(x)\neq0$,则 $g(x)=h(x)$.

### 1.1.3 整除的概念

**1. 带余除法定理**

**定理 1.2** 对于 $P[x]$中任意两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$,其中 $g(x)\neq0$,一定有 $P[x]$

中的多项式 $q(x)$，$r(x)$存在，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中$\partial(r(x))<\partial(g(x))$或者 $r(x)=0$，并且这样的 $q(x)$，$r(x)$是唯一决定的.

带余除法中所得的 $q(x)$通常称为 $g(x)$除 $f(x)$的商，$r(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的余式.

**2. 整除的定义**

**定义 1.7** 数域 $P$ 上的多项式$g(x)$称为整除 $f(x)$，如果有数域 $P$ 上的多项式$h(x)$使等式

$$f(x)=g(x)h(x)$$

成立. 用"$g(x)\mid f(x)$"表示 $g(x)$整除 $f(x)$，用"$g(x)\nmid f(x)$"表示 $g(x)$不能整除 $f(x)$.

当 $g(x)\mid f(x)$时，$g(x)$就称为 $f(x)$的因式，$f(x)$称为 $g(x)$的倍式.

注：当 $g(x)\neq 0$ 时，带余除法给出了整除性的一个判别条件.

**3. 整除的判定**

**定理 1.3** （余数定理）对于数域 $P$ 上的任意两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，$g(x)\mid f(x)$的充要条件是 $g(x)$除 $f(x)$的余式为零.

注：(1) $g(x)\nmid f(x)\Leftrightarrow r(x)\neq 0$；

(2) 若 $g(x)\mid f(x)$，则$\partial(f(x))\geqslant\partial(g(x))$ $(f(x)\neq 0, g(x)\neq 0)$；

(3) 带余除法中 $g(x)\neq 0$，但整除定义中 $g(x)$可以为零. 故 $0=0\cdot h(x)$，即 $0\mid 0$. 特别地，$a\mid b$ $(a\neq 0)$.

当 $g(x)\mid f(x)$时，如果 $g(x)\neq 0$，$g(x)$除 $f(x)$的商 $q(x)$有时也用$\frac{f(x)}{g(x)}$来表示.

**4. 整除的性质**

(1) 任一多项式 $f(x)$一定整除它自身；

(2) 任一多项式 $f(x)$都能整除零多项式；

(3) 零多项式只能整除零多项式；

(4) 零次多项式，即非零常数，能整除任一个多项式，特别地，$a\mid b$ $(a\neq 0)$；

(5) 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，其中 $c$ 为非零常数；

(6) 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$(整除的传递性)；

(7) 若 $f(x)\mid g(x)$，$f(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid(g(x)+h(x))$；

(8) 若 $f(x)\mid g(x)$，对任意 $h(x)$，则 $f(x)\mid g(x)h(x)$；

(9) 若 $f(x)\mid g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，则

$$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)),$$

其中 $u_i(x)$是数域 $P$ 上任意的多项式；

(10) $f(x)$与它的任一个非零常数倍 $cf(x)$ $(c\neq 0)$有相同的因式和相同的倍式，在多项式整除性的讨论中，$f(x)$常常可以用 $cf(x)$来代替；

(11) 两个多项式之间的整除性不因数域的扩大而改变.

## 1.1.4 多项式的最大公因式

**1. 多项式的最大公因式的定义**

**定义 1.8** 设 $f(x)$与 $g(x)$是 $P[x]$中两个多项式. $P[x]$中多项式 $d(x)$称为 $f(x)$、

$g(x)$的一个最大公因式,如果它满足下面两个条件:

(1) $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式;

(2) $f(x)$,$g(x)$的公因式全是 $d(x)$的因式.

**2. 性质**

(1) 如果有等式

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立,那么 $f(x)$,$g(x)$和 $g(x)$,$r(x)$公因式完全相同.

(2) 对于 $P[x]$的任意两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,在 $P[x]$中存在一个最大公因式 $d(x)$,且 $d(x)$可以表成 $f(x)$、$g(x)$的一个组合,即有 $P[x]$中多项式 $u(x)$、$v(x)$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

注:此命题的逆否命题不成立.如当 $f(x)=x$,$g(x)=1-x$,取 $u(x)=1$,$v(x)=1$,$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)=2x-1$,而 $d(x)$却不是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式.

**3. 互素**

**定义 1.9** $P[x]$中两个多项式 $f(x)$,$g(x)$称为互素(也称互质)的,如果$(f(x),g(x))=1$.

注:如果两个多项式互素,那么它们除去零次多项式外没有其它的公因式,反之亦然.

**定理 1.4** $P[x]$中两个多项式 $f(x)$,$g(x)$互素的充要条件是有 $P[x]$中的多项式 $u(x)$、$v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

互素的性质:

(1) 如果$(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,那么 $f(x)\mid h(x)$.

(2) 如果 $f_1(x)\mid g(x)$,$f_2(x)\mid g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,那么 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

(3) 如果$(f_1(x),g(x))=1$,$(f_2(x),g(x))=1$,那么$(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$.

注:性质(1)中,当一个多项式整除两个多项式之积时,若没有互素的条件,这个多项式一般不能整除积的因式之一.例如 $x^2-1\mid(x+1)^2(x-1)^2$,但 $x^2-1\nmid(x+1)^2$,且 $x^2-1\nmid(x-1)^2$.

性质(2)中没有互素的条件,则不成立.如 $g(x)=x^2-1$,$f_1(x)=x+1$,$f_2(x)=(x+1)(x-1)$,则 $f_1(x)\mid g(x)$,$f_2(x)\mid g(x)$,但 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

**4. 最大公因式与互素的推广**

对于任意多个多项式 $f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_s(x)(s\geqslant 2)$,$d(x)$称为 $f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_s(x)(s\geqslant 2)$一个最大公因式,如果 $d(x)$具有下面的性质:

(1) $d(x)\mid f_i(x)$,$i=1,2,\cdots,s$;

(2) 如果 $\varphi(x)\mid f_i(x)$,$i=1,2,\cdots,s$,那么 $\varphi(x)\mid d(x)$.

我们仍用$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$符号来表示首项系数为 1 的最大公因式.不难证明,$f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_s(x)$的最大公因式存在,而且当 $f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_s(x)$全不为零时,$((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))$就是 $f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_s(x)$的最大公因式,即

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x)).$$

同样,利用以上这个关系可以证明,存在多项式 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$,使



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)).$$

如果$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))=1$,那么 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$就称为互素的.

### 1.1.5 因式分解定理

**1. 不可约多项式的定义**

**定义 1.10** 数域 $P$ 上次数大于等于 1 的多项式 $p(x)$称为域 $P$ 上的不可约多项式,如果它不能表示成数域 $P$ 上的两个次数比 $p(x)$的次数低的多项式的乘积.

注:(1) 根据定义,一次多项式总是不可约多项式.

(2) 一个多项式是否可约是依赖于系数域的.

(3) 不可约多项式 $p(x)$的因式只有非零常数与它自身的非零常数倍 $cp(x)(c\neq0)$这两种,此外就没有了.反过来,具有这个性质的次数大于等于 1 的多项式一定是不可约的.

(4) 不可约多项式 $p(x)$与任一多项式 $f(x)$之间只可能有两种关系,即 $p(x)\mid f(x)$或$(p(x),f(x))=1$.

**2. 不可约多项式的性质**

(1) 如果 $p(x)$是不可约多项式,那么对于任意的两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$一定推出 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$.

(2) 如果不可约多项式 $p(x)$整除一些多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$的乘积 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,那么 $p(x)$一定整除这些多项式之中的一个.

**3. 因式分解定理**

**定理 1.5** (因式分解及唯一性定理) 数域 $P$ 上次数大于等于 1 的多项式 $f(x)$都可以唯一地分解成数域 $P$ 上一些不可约多项式的乘积.所谓唯一性是说,如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有 $s=t$,并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,s)$是一些非零常数.

**4. 标准分解式**

**定义 1.11** 在多项式 $f(x)$的分解式中,可以把每一个不可约因式的首项系数提出来,使它们成为首项系数为 1 的多项式,再把相同的不可约因式合并.于是 $f(x)$的分解式成为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中 $c$ 是 $f(x)$的首项系数,$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$是不同的首项系数为 1 的不可约多项式,而 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数.这种分解式称为标准分解式.

注:(1) 如果已经有了两个多项式的标准分解式,就可以直接写出两个多项式的最大公因式.多项式 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式 $d(x)$就是那些同时在 $f(x)$与 $g(x)$的标准分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积,所带的方幂的指数等于它在 $f(x)$与 $g(x)$中所带的方幂中较小的一个.

(2) 上述求最大公因式的方法不能代替辗转相除法,因为在一般情况下,没有实际分

解多项式为不可约多项式的乘积的方法，即使要判断数域 $P$ 上一个多项式是否可约一般都是很困难的.

(3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式中没有共同的不可约多项式，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

### 1.1.6 重因式

**1. 重因式的定义**

**定义 1.12** 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 $k$ 重因式，如果 $p^k(x)\mid f(x)$，但 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$.

如果 $k=0$，那么 $p(x)$ 根本不是 $f(x)$ 的因式；如果 $k=1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式；如果 $k>1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式.

注：(1) $k$ 重因式和重因式是两个不同的概念，不要混淆.

(2) 等价定义：不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 $k$ 重因式，如果

$$f(x)=p^k(x)g(x),\ p(x)\nmid g(x).$$

(3) 如果 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

那么 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 分别是 $f(x)$ 的 $r_1$ 重，$r_2$ 重，$\cdots$，$r_s$ 重因式. 指数 $r_i=1$ 的那些不可约因式是单因式；指数 $r_i>1$ 的那些不可约因式是重因式.

**2. 重因式的判别**

1) 微商

**定义 1.13** 设有多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

规定它的微商（也称导数或一阶导数）是

$$f'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

微商的基本运算公式：

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),$$
$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x),$$
$$(cf(x))'=cf'(x),$$
$$(f^m(x))'=m(f^{m-1}(x)f'(x)).$$

同样可以定义高阶微商的概念. 微商 $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的一阶微商；$f'(x)$ 的微商 $f''(x)$ 称为 $f(x)$ 的二阶微商；等等. $f(x)$ 的 $k$ 阶微商记为 $f^{(k)}(x)$.

注：一个 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式的微商是一个 $(n-1)$ 次多项式；它的 $n$ 阶微商是一个常数；它的 $(n+1)$ 阶微商等于 0.

2) 判定定理

**定理 1.6** 如果不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的一个 $k(k\geqslant 1)$ 重因式，那么 $p(x)$ 是微商 $f'(x)$ 的 $(k-1)$ 重因式.

注：定理的逆定理不成立. 如

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+3, f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2,$$

$(x-1)$是 $f'(x)$的二重因式，但根本不是 $f(x)$是因式. 当然更不是三重因式.

**定理 1.7** 如果不可约多项式 $p(x)$是多项式 $f(x)$的一个 $k(k\geqslant 1)$重因式，那么 $p(x)$是$f(x), f'(x), \cdots, f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$的因式.

**定理 1.8** 不可约多项式 $p(x)$是多项式 $f(x)$的重因式的充要条件是 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

**定理 1.9** 多项式 $f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow(f(x), f'(x))=1$.

注：(1) 这个推论表明，判别一个多项式有无重因式可以通过代数运算——辗转相除法来解决，这个方法甚至是机械的.

(2) 由于多项式的导数以及两个多项式互素与否的事实在由数域 $P$ 过渡到含 $P$ 的数域 $\overline{P}$ 时都无改变，所以由定理有以下结论：

若多项式 $f(x)$在 $P[x]$中没有重因式，那么把 $f(x)$看成含 $P$ 的某一数域 $\overline{P}$ 上的多项式时，$f(x)$也没有重因式.

**3. 去掉重因式的方法**

设 $f(x)$有重因式，其标准分解式为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

那么

$$f'(x)=p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x)g(x),$$

此处 $g(x)$不能被任何 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$整除. 于是

$$(f(x), f'(x))=d(x)=p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\cdots p_s^{r_s-1}(x).$$

用 $d(x)$去除 $f(x)$所得的商为

$$h(x)=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

这样得到一个没有重因式的多项式 $h(x)$. 且若不计重数，$h(x)$与 $f(x)$含有完全相同的不可约因式. 把由 $f(x)$找 $h(x)$的方法叫做去掉重因式方法.

## 1.1.7 多项式函数

**1. 多项式函数**

**定义 1.14** 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是 $P[x]$中的多项式，$\alpha$ 是 $P$ 中的数，在上式中用 $\alpha$ 代 $x$ 所得的数

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$$

称为 $f(x)$当 $x=\alpha$ 时的值，记为 $f(\alpha)$. 这样，多项式 $f(x)$就定义了一个数域上的函数. 可以由一个多项式来定义的函数就称为数域上的多项式函数.

运算律：

如果

$$h_1(x)=f(x)+g(x), h_2(x)=f(x)g(x),$$

那么

$$h_1(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha), h_2(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha).$$

**2. 余数定理**

**定理 1.10** 用一次多项式去除多项式 $f(x)$ 所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

**3. 综合除法**

设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

用 $(x-c)$ 去除 $f(x)$ 可得商 $g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$ 和余数 $r$，用式子表达：

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ c & & cb_0 & cb_1 & \cdots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & r \end{array}$$

注：在做综合除法时要注意：降幂排列；缺项补零；$x+c=x-(-c)$.

**4. 多项式的根**

**定义 1.15** 如果 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 时，函数值 $f(\alpha)=0$，那么 $\alpha$ 就称为 $f(x)$ 的一个根或零点.

**定理 1.11** $\alpha$ 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-\alpha)\mid f(x)$.

**定义 1.16** $\alpha$ 称为 $f(x)$ 的 $k$ 重根，如果 $(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的 $k$ 重因式. 当 $k=1$ 时，$\alpha$ 称为单根；当 $k>1$ 时，$\alpha$ 称为重根.

**定理 1.12** $P[x]$ 中 $n$ 次多项式 $(n\geqslant 0)$ 在数域 $P$ 中的根不可能多于 $n$ 个，重根按重数计算.

**5. 多项式相等与多项式函数相等的关系**

**定理 1.13** 如果多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的次数都不超过 $n$，而它们对 $(n+1)$ 个不同的数有相同的值即

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i), i = 1,2,\cdots,n+1,$$

那么 $f(x)=g(x)$.

注：因为数域中有无穷多个数，所以上述定理说明，不同的多项式定义的函数也不相同. 如果两个多项式定义相同的函数，就称为恒等. 上面结论表明，多项式的恒等与多项式相等实际上是一致的. 换句话说，数域 $P$ 上的多项式既可以作为形式表达式来处理，也可以作为函数来处理. 但是应该指出，考虑到今后的应用与推广，多项式看成形式表达式要方便些.

### 1.1.8 复系数与实系数多项式的因式分解

**1. 复系数多项式**

**定理 1.14** （代数基本定理）每个次数大于等于 1 的复系数多项式在复数域中有一个根.

注：(1)“有一个根”指“必有一个根”又指“至少有一个根”. 因此一次多项式有一根，二次多项式有一根即有两根……

(2) 有一个根. 即有一个一次因式.

(3) $f(x)=(x-\alpha_1)g_1(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)g_2(x)=\cdots$

$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),\partial(f(x))=n,n\geqslant 1.$

**定理 1.15** (复系数多项式因式分解定理)每个次数大于等于 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

因此，复系数多项式具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s},$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是不同的复数，$l_1,l_2,\cdots,l_s$ 是正整数.

注：标准分解式说明了每个 $n$ 次复系数多项式恰有 $n$ 个复根(重根按重数计算).

**2. 实系数多项式**

**引理：** 如果 $\alpha$ 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，那么 $\alpha$ 的共轭数 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，并且 $\alpha$ 与 $\bar{\alpha}$ 有同一重数. 即实系数多项式的非实的复数根两两成对.

**定理 1.16** (实系数多项式因式分解定理)每个次数大于等于 1 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与含一对非实共轭复数根的二次因式的乘积. 实数域上不可约多项式，除一次多项式外，只有含非实共轭复数根的二次多项式.

因此，实系数多项式具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{l_1}(x-c_2)^{l_2}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中 $c_1,\cdots,c_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r$ 全是实数，$l_1,l_2,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_r$ 是正整数，并且 $x^2+p_ix+q_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是不可约的，也就是适合条件 $p_i^2-4q_i<0(i=1,2,\cdots,r)$.

**3. *n* 次多项式的根与系数的关系**

**定理 1.17** (韦达定理)令

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

是一个 $n(n>0)$ 次多项式，那么在复数域 $C$ 中，$f(x)$ 有 $n$ 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，根与系数的关系如下：

$$\frac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$

$$\frac{a_2}{a_0}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

### 1.1.9 有理系数多项式

**1. 本原多项式及性质**

**定义 1.17** 如果一个非零的整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$ 的系数 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_0$ 没有异于 $\pm 1$ 的公因子，也就是说它们是互素的，它就称为一个本原多项式.

注：任何一个非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可以表示成一个有理数 $r$ 与一个本原多项式 $g(x)$ 的乘积，即

$$f(x) = rg(x).$$

这种表示法，除了差一个正负号是唯一的. 亦即，如果

$$f(x) = rg(x) = r_1 g_1(x),$$

其中 $g(x), g_1(x)$ 都是本原多项式，那么必有

$$r = \pm r_1, g(x) = \pm g_1(x).$$

高斯(Gauss)引理：两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

**2. 有理系数与整系数多项式的因式分解关系**

**定理 1.18** 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定可以分解两个次数较低的整系数多项式的乘积.

注：定理 1.18 说明整系数多项式在 $Q$ 上可约，则在 $Z$(环)上可约.

**推论** 设 $f(x), g(x)$ 是整系数多项式，且 $g(x)$ 是本原的，如果 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，那么 $h(x)$ 一定是整系数多项式.

**定理 1.19** 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

是一个整系数多项式，而 $\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 $r, s$ 互素，那么必有 $s|a_n, r|a_0$. 特别地，如果 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$，那么 $f(x)$ 的有理根都是整根，而且是 $a_0$ 的因子.

**3. 有理数域上多项式的可约性**

**定理 1.20** (艾森斯坦(Eisenstein)判别法)设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

是一个整系数多项式. 若有一个素数 $p$，使得

(1) $p \nmid a_n$；

(2) $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$；

(3) $p^2 \nmid a_0$.

则多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

注：(1) 由艾森斯坦判断法得到：有理数域上存在任意次的不可约多项式. 例如 $f(x)=x^n+2$，其中 $n$ 是任意正整数.

(2) 艾森斯坦判别法的条件只是一个充分条件，即若找不到素数则 $f(x)$ 不一定不可约.

## 1.2 问题探讨

1. 设 $P$ 是一个数集，有一个非零数 $a \in P$，且 $P$ 关于减法与除法(除数不为 0)封闭，求证：$P$ 是一个数域.

证明：因为 $a \in P$，所以 $0=a-a \in P, 1=\frac{a}{a} \in P$.

$\forall x, y \in P$，有



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com