二十一世纪高职教材
ERSHIYISHIJIGAOZHIJIAOCAI

# 高等应用数学

（工 科 类）

张子鉴 主编

中国商业出版社

二十一世纪高职教材

# 高等应用数学

（工科类）

中国商业出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等应用数学/张子鉴主编. —北京:中国商业出版社,2001.8
ISBN 7—5044—4350—6

Ⅰ.高…　Ⅱ.张…　Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学院—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 053451 号

**责任编辑　朝阳**

中国商业出版社出版发行
(100053　北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
山东省章丘市印刷厂印刷

*

2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
850×1168 毫米　32 开　10.5 印张　262 千字
定价:16.00 元

* * * *

# 编写说明

本教材是根据国家教委组织制定的《高等工程专科教育基础课程(高等数学)教学基础要求》及高等职业技术教育理工科专业的教学大纲和教学计划编写的．本书可作为各高等职业技术学院(或专科分校)理工科专业的教材，也可作为其它高等专科学校、电大理工科专业的教材或参考书．

本教材保持自身体系的完整性，信息量大，复盖面广，突出实际应用，不过分追求理论上的严密性和复杂的计算和变换．

参加本书编写的有张子鉴(第一、二、三章)、高玉英(第四、五章)、李建庆(第六、七章)、王翠珍(八、九、十章)，本书由张子鉴任主编，王翠珍、李建庆任副主编，全书由高玉英主审．

由于编者水平所限，书中不当之处在所难免，恳请广大读者指正，以便更正．

编　者

2001 年 6 月

# 目　　录

**第一章　函数　极限与连续**

§1　函数 ………………………………………… (1)
　　练习一 ………………………………………… (5)
§2　极限 ………………………………………… (6)
　　练习二 ………………………………………… (14)
§3　两个重要极限 ………………………………… (16)
　　练习三 ………………………………………… (19)
§4　无穷大与无穷小 ……………………………… (19)
　　练习四 ………………………………………… (21)
§5　函数的连续性 ………………………………… (22)
　　练习五 ………………………………………… (25)
　　复习题一 ……………………………………… (25)

**第二章　导数与微分**

§1　导数的概念 …………………………………… (27)
　　练习一 ………………………………………… (32)
§2　求导法则 ……………………………………… (32)
　　练习二 ………………………………………… (39)
§3　高阶导数 ……………………………………… (40)
　　练习三 ………………………………………… (44)
§4　微分 ………………………………………… (45)
　　练习四 ………………………………………… (51)
　　复习题二 ……………………………………… (51)

**第三章 导数的应用**

§1 中值定理…………(53)
练习一…………(58)
§2 罗必达法则…………(58)
练习二…………(63)
§3 函数的单调性与极值…………(64)
练习三…………(70)
§4 曲线的凹凸性…………(71)
练习四…………(73)
§5 曲线的渐近线…………(73)
练习五…………(75)
§6 函数图象的作法…………(76)
练习六…………(78)
§7 曲线的曲率…………(78)
练习七…………(81)
复习题三…………(81)

**第四章 不定积分**

§1 不定积分…………(83)
练习一…………(90)
§2 换元积分法…………(91)
练习二…………(102)
§3 分部积分法…………(103)
练习三…………(107)
§4 有理函数及三角函数有理式的积分举例…………(107)
练习四…………(114)
§5 积分表的使用…………(115)
练习五…………(117)

复习题四 …… (117)

## 第五章　定积分及其应用

§1　定积分概念 …… (119)
练习一 …… (124)
§2　定积分的性质 …… (124)
练习二 …… (128)
§3　牛顿——莱布尼兹公式 …… (129)
练习三 …… (132)
§4　定积分的换元积分法与分部积分法 …… (133)
练习四 …… (139)
§5　定积分在几何方面的应用 …… (140)
练习五 …… (149)
§6　定积分在物理方面的应用 …… (150)
练习六 …… (153)
§7　广义积分 …… (153)
练习七 …… (158)
复习题五 …… (158)

## 第六章　多元函数微分学

§1　空间直角坐标系 …… (160)
练习一 …… (166)
§2　多元函数 …… (166)
练习二 …… (169)
§3　二元函数的极限与连续 …… (169)
练习三 …… (173)
§4　偏导数 …… (173)
练习四 …… (178)
§5　全微分 …… (178)

练习五 …………………………………………………………… (181)
§ 6　复合函数和隐函数的微分法 ……………………… (181)
练习六 …………………………………………………………… (184)
§ 7　微分学在几何上的应用 ……………………………… (185)
练习七 …………………………………………………………… (187)
§ 8　二元函数的极值与最值 ……………………………… (188)
练习八 …………………………………………………………… (191)
复习题六 ………………………………………………………… (191)

**第七章　二重积分**

§ 1　二重积分的概念和性质 ……………………………… (193)
练习一 …………………………………………………………… (195)
§ 2　二重积分的计算 …………………………………… (195)
练习二 …………………………………………………………… (201)
§ 3　二重积分的应用 …………………………………… (201)
练习三 …………………………………………………………… (205)
复习题七 ………………………………………………………… (206)

**第八章　级数**

§ 1　数项级数的概念及性质 ……………………………… (208)
练习一 …………………………………………………………… (212)
§ 2　正项级数 ………………………………………………… (212)
练习二 …………………………………………………………… (217)
§ 3　任意项级数 ……………………………………………… (217)
练习三 …………………………………………………………… (220)
§ 4　幂级数 ………………………………………………… (220)
练习四 …………………………………………………………… (226)
§ 5　函数展成幂级数 …………………………………… (226)

练习五 …………………………………………………… (231)
复习题八 …………………………………………………… (232)

第九章　傅里叶级数

§1　三角级数与三角函数系的正交性 ………………… (234)
练习一 …………………………………………………… (235)
§2　以 $2\pi$ 为周期的函数展成傅里叶级数 ………… (236)
练习二 …………………………………………………… (241)
§3　正弦级数与余弦级数 ……………………………… (241)
练习三 …………………………………………………… (244)
§4　以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开 ……… (244)
练习四 …………………………………………………… (247)
复习题九 …………………………………………………… (248)

第十章　常微分方程

§1　基本概念 …………………………………………… (249)
练习一 …………………………………………………… (251)
§2　一阶微分方程 ……………………………………… (251)
练习二 …………………………………………………… (255)
§3　一阶微分方程的应用举例 ………………………… (256)
练习三 …………………………………………………… (258)
§4　可降阶的二阶微分方程 …………………………… (258)
练习四 …………………………………………………… (261)
§5　二阶常系数齐次线性微分方程 …………………… (261)
练习五 …………………………………………………… (266)
§6　二阶常系数非齐次线性微分方程 ………………… (266)
练习六 …………………………………………………… (273)
§7　微分方程的幂级数解法 …………………………… (273)

练习七 ………………………………………………………… (275)
复习题十 ………………………………………………………… (276)
简易积分表 ………………………………………………………… (277)
练习题答案 ………………………………………………………… (291)

# 第一章 函数 极限与连续

## §1 函数

### 一 函数与反函数

1 **定义** 设 $D$ 是一个非空数集，若对任意 $x\in D$，按照某个对应法则 $f$，都有唯一一个实数 $y$ 与之对应，则称 $f$ 为定义在 $D$ 上的一个函数，记作 $y=f(x)$. 称 $x$ 为该函数的自变量，$y$ 为因变量或函数值；$D$ 为定义域，当 $x$ 取遍 $D$ 中数值时，相应的 $y$ 取值的集合称为函数的值域．

2 分段函数 由两个或两个以上的解析式表示的同一个函数称为分段函数．例如

$$f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ 1 & x=0\\ x^2+1 & x>0\end{cases}$$

这类函数叫做分段函数．

例如 $f(x)=|x|$ 可以写成

$$f(x)=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}$$

是一个分段函数，其图形如图 1—1 所示．

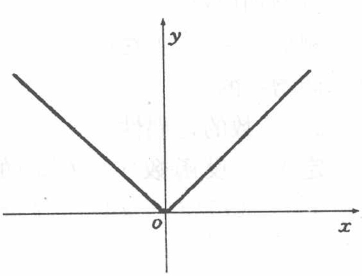

图 1—1

3　反函数　设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 $D$，值域为 $M$. 若对于 $M$ 中的每一个 $y$ 值($y\in M$)，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x$ 值($x\in D$)与之对应，则所确定的以 $y$ 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，它的定义域为 $M$，值域为 $D$.

习惯上，函数的自变量都以 $x$ 表示，所以，反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

由定义可知，一个函数的定义域、值域分别是它的反函数的值域和定义域.

**例1**　求 $y=x^2+1(x\geqslant 0)$ 的反函数

**解**　由 $y=x^2+1, x\geqslant 0, y\geqslant 1$ 得

$$x=\sqrt{y-1}, \quad y\geqslant 1$$

所以其反函数是　$y=\sqrt{x-1} \quad (x\geqslant 1)$

一般的，函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

## 二　函数的特性

### 1　函数的单调性

**定义**　设函数 $y=f(x)$，若对任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调增加(减少).

例如 $y=x^2-1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，而在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

### 2　函数的奇偶性

**定义**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，若满足 $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$)，则称函数 $y=f(x)$ 为偶(奇)函数.

**例2**　判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x^3-3\sin x$　　(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(3) $f(x)=\mathrm{tg}x+1$

**解**　(1) $f(-x)=(-x)^3-3\sin(-x)=-(x^3-3\sin x)$

$$=-f(x)$$

所以 $f(x)=x^3-3\sin x$ 是奇函数．

(2) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$

所以 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是偶函数．

(3) $f(-x)=\mathrm{tg}(-x)+1=-\mathrm{tg}x+1$

所以 $f(x)=\mathrm{tg}x+1$ 是非奇非偶函数．

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

3　有界性

**定义**　设函数 $y=f(x)$，若存在正数 $M$，使得对任意的 $x\in D$，均有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有界．

例如　$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界．因为对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\leqslant 1$.

而 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上、在 $(0,+\infty)$ 上均无界，但 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(1,3)$ 上有界．因为对任意 $x\in(1,3)$，$\left|\dfrac{1}{x^2}\right|<1$.

4　周期性

**定义**　设函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T\neq 0$，使得对于定义域内的一切 $x$，等式 $f(x+T)=f(x)$ 都成立，则称 $y=f(x)$ 是周期函数，称 $T$ 是 $y=f(x)$ 的周期．周期函数的周期可以不只一个，若在所有的周期中，存在一个最小的正数．则称它是函数的最小正周期．

**例 3**　求 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期和最小正周期

**解**　因为　$f\left(x+\dfrac{2n\pi}{3}\right)=\cos\left[3\left(x+\dfrac{2n\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]$

$$=\cos(3x+\frac{\pi}{4}+2n\pi)$$
$$=\cos(3x+\frac{\pi}{4})$$
$$=f(x)$$

所以 $f(x)=\cos(3x+\frac{\pi}{4})$的周期是$\frac{2n\pi}{3}$($n\in Z$ 且 $n\neq 0$),最小正周期是$\frac{2\pi}{3}$.

## 三 初等函数

### 1 基本初等函数

基本初等函数包括以下六种函数

(1) 常函数 $y=C$

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha$ 是实数)

(3) 指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0,a\neq 1$)

(4) 对数函数 $y=\log_{a}x$ ($a>0,a\neq 1$)

(5) 三角函数 $y=\sin x$

$y=\cos x$

$y=\mathrm{tg}x$

$y=\mathrm{ctg}x$

$y=\sec x$

$y=\csc x$

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$

$y=\arccos x$

$y=\mathrm{arctg}x$

$y=\mathrm{arcctg}x$

### 2 复合函数

**定义** 若 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,则 $y=f[\varphi(x)]$称为 $f$ 和 $\varphi$ 这两个函数的复合函数.

**例 4** 把下列函数复合成复合函数

(1)$y=\ln u, u=1+x^2$.

(2)$y=\sin u, u=2^v, v=\mathrm{arctg}x$.

**解** (1)$y=\ln(1+x^2)$

(2)$y=\sin(2^{\mathrm{arctg}x})$

**例 5** 指出下列各复合函数的复合过程.

(1)$y=\ln\sin\sqrt{x}$ (2)$y=\sin^2(1+e^{2\arcsin x})$

**解** (1)$y=\ln\sin\sqrt{x}$是由 $y=\ln u, u=\sin v, v=\sqrt{x}$复合而所成的.

(2)$y=\sin^2(1+e^{2\arcsin x})$是由 $y=u^2, u=\sin v, v=1+e^w$, $w=2\arcsin x$ 复合而成的.

3 初等函数

**定义** 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所得到的用一个数学式子表示的函数叫做初等函数.

例 $y=2\cos(1-x^2)-\sqrt{x}$, $y=e^{1+x}-\ln\sin x$ 等都是初等函数.

## 练习一

1 设分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 0 \\ x+1 & 0<x\leqslant 1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$$

求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(\frac{1}{2})$、$f(1)$、$f(2)$和 $f(\frac{1}{1+a^2})$(其中 $a$ 是实数)并作出函数的图形.

2 求下列函数的反函数

(1)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$ (2)$y=\sin x \quad x\in[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi]$

3 判断下列函数的奇偶性

(1)$y=x^5-2\mathrm{tg}x$ (2)$y=|x|$

(3)$y=x^3\cos x+1$ (4)$y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

4 判断下列函数是不是周期函数,若是求出它的周期和最小

正周期

(1) $y=1-3\sin 2x$　　(2) $y=x^2\cos^2 x$

(3) $y=\mathrm{arctg}x$　　(4) $y=\sin(4-x)+\sin x$

5　将下列函数写成复合函数

(1) $y=\sqrt{u}$，　$u=\sin v$，$v=1+\sqrt{x}$.

(2) $y=\lg u$，　$u=3\sin v$，$v=e^w-1$，　$w=x^2$.

6　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=[\mathrm{arctg}(2x-x^2)]^3$　　(2) $y=3^{\arccos\sqrt{x}}$

(3) $y=\sin e^{\sqrt[3]{1+x}}$　　(4) $y=\ln\cos\sqrt{2+x^2}$

(5) $y=\sqrt{\ln(\mathrm{tg}x^2)}$　　(6) $y=x+3\sin(1+\sqrt{x})$

# §2　极限

## 一　数列的极限

### 1　数列的极限

我们知道，以自然数 $n$ 为自变量的函数 $x_n=f(n)$，把它的值依次写出来，就是一个数列

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

它的每一个值叫做数列的一个项，第 $n$ 项 $x_n$ 叫做数列的通项.

例　数列 $x_n=\frac{1}{n+1}$，即 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$

数列 $x_n=1-\frac{1}{n}$，即 $0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots$

下面来研究数列随 $n$ 的无限增大而变化的趋势. 例如数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 随 $n$ 的无限增大，$x_n$ 就无限趋近于 1.

"当 $n$ 无限增大时，$\frac{n+1}{n}$ 无限趋近 1"用精确的语言说就是：无论正数 $\varepsilon$ 多么小，总有某一项 $N$，使这项后面的各项 $x_n(n>N)$ 与

1 的差的绝对值比 $\varepsilon$ 还要小，即 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon \quad (n>N)$.

**定义** 设数列 $x_n$ 和定数 $a$，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称数 $a$ 是数列 $x_n$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to+\infty)$.

**例 1** 用定义证明下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} c=c$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0)$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0(|q|<1)$

**证明** (1)对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使

$$|x_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$$

只需取 $N=1$ 即可，即当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-c|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} c=c$.

(2)对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{1}{n^p}-0\right|<\varepsilon$，即 $\frac{1}{n^p}<\varepsilon$，即 $n^p>\frac{1}{\varepsilon}$，

即 $n>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$.

只需取 $N=\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$ 的最大整数部分方可，即取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\right]$.

则当 $n>N$ 时，$\left|\frac{1}{n^p}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0 \quad (p>0)$.

(3)当 $q=0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\lim\limits_{n\to+\infty} 0=0$ 成立.

当 $q\neq 0$ 时，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，(不访设 $\varepsilon<1$)，要使 $|q^n-0|<\varepsilon$，即 $|q|^n<\varepsilon$，由于 $|q|<1$，只需 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$. 则当 $n>N$ 时，恒有 $|q^n-0|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=0 \quad (|q|<1)$$

2 数列极限的性质

用数列极限的定义，能够证明数列的极限有以下性质(证明过