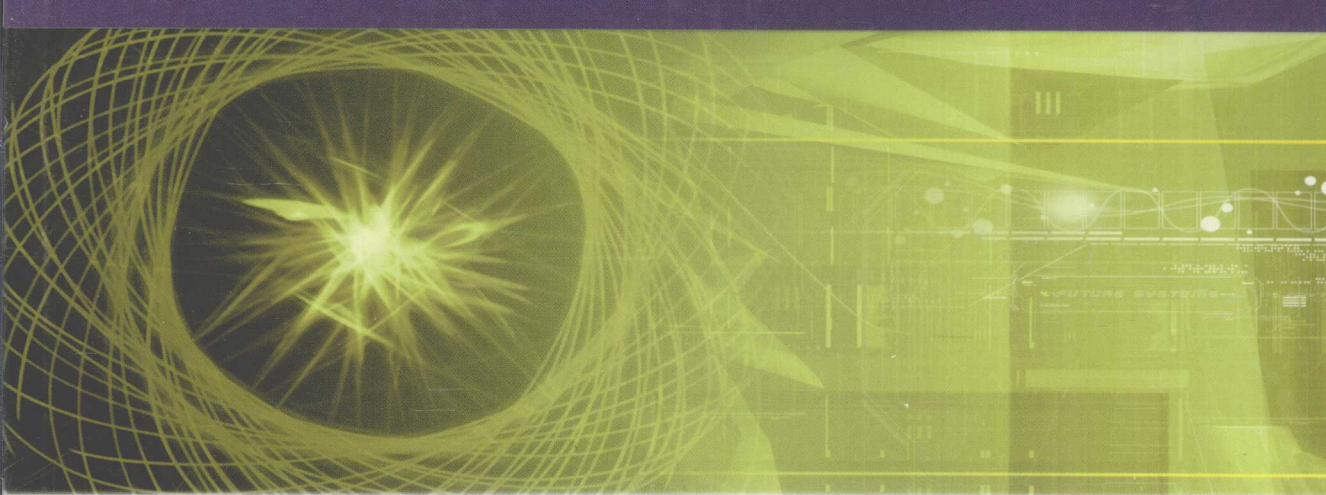




21世纪高等工科教育数学系列课程教材

线性代数与几何

(第3版)

李忠定 张保才 刘响林 王永亮 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21 世纪高等工科教育数学系列课程教材

线性代数与几何

(第 3 版)

主编	李忠定	张保才	刘响林	王永亮
编者	李忠定	张保才	刘响林	王永亮
	刘宝友	胡 荣		

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材为大学理工科专业公共课教材 2004 年的修订版(第 3 版),共 4 册:高等数学(上、下册)、线性代数与几何、概率论与数理统计。编者根据大学高等数学教改精神、多年教改课题研究和试验编写,书中融入了许多新的教学思想和方法,尤其是改正、吸收了近年教学过程中发现的问题和好的经验。本书为线性代数与几何,内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性变换、线性方程组、相似矩阵与二次型、空间解析几何等七章。

本书适合作为普通高校工科各专业教材,也可作为大专、函授、夜大、自考教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/李忠定,张保才,刘响林主编. —3
版. —北京:中国铁道出版社,2009.8
(21 世纪高等工科教育数学系列课程教材)
ISBN 978-7-113-10452-8

I. 线… II. ①李…②张…③刘… III. ①线性代数—高等
学校—教材 ②解析几何—高等学校—教材 IV. 0151.2
0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150151 号

书 名: 线性代数与几何(第 3 版)
作 者: 李忠定 张保才 刘响林 王永亮 主编
出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
策划编辑: 李小军
责任编辑: 李小军
编辑部电话: 010-83550579
封面制作: 李 路
印 刷: 三河市华丰印刷厂
开 本: 787mm×960mm 1/16 印张: 13.5 字数: 267 千
版 本: 2002 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 2 版 2009 年 8 月第 3 版
2009 年 8 月第 9 次印刷
印 数: 4000 册
书 号: ISBN 978-7-113-10452-8/O·197
定 价: 20.00 元

版权所有 侵权必究

本书封面贴有中国铁道出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

发行部电话: 010-63545969

21 世纪高等工科教育数学系列课程教材

编 委 会

主 任 委 员 顾祝全

副主任委员 牟卫华 张保才

委 员 刘响林 孙海珍 陈庆辉

李忠定 王永亮 刘宝友

胡 荣 王亚红

前 言

本系列教材是在原铁道部部级课题、河北省“九五”教育学科规划重点课题“面向21世纪高等工科教育数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”的研究成果基础上,通过几年的教学实践,广泛征求意见,按照教育部关于《工科类本科数学基础课程教学基本要求》改编而成的. 本版为第3版,第1、2版在多年的教学实践中受到了广大师生的欢迎和同行的肯定,其总体结构、编写思想和特点、难易程度把握等方面,经受住了实践的检验. 当然,实践中也发现了个别需要完善之处,这也是本版的任务之一. 本系列教材包括《高等数学》(上、下册)、《线性代数与几何》、《概率论与数理统计》,本书为《线性代数与几何》.

本书内容的深度和广度与现行的“线性代数课程教学基本要求”大体一致. 编写中力求做到:渗透现代数学思想,其目的在于继承一些优秀的教学传统及体系;围绕现代工科教学所需代数知识,理顺一些数学内容、次序及应用,以便于教学和学生学学习,提高学生对代数学习的兴趣,提高学生对空间概念及基底的认识,为将来研究生课程“数学物理方程”及“高等数学”(函数展成幂级数及傅立叶级数)打好理论基础.

本书将《高等数学》中“向量代数与空间解析几何”内容编入其中,以便将几何空间中向量的运算(线性运算及数量积运算)推广到一般 n 维向量中,使学习及讲解更加直观;将空间曲面、曲线及一些特殊的二次曲面的几何图形的研究安排在最后一章(空间解析几何),主要目的是利用二次型通过正交变换化为标准形来讨论更为一般的二次曲面、曲线等的几何形状,以加强对二次型标准化重要性的认识和理解.

书中有“*”号的章节为选讲内容.

本教材的难易程度适中,包含了考研的全部知识点,适合作为普通高等学校工科专业教材,也可作为教学和考研参考书.

本书由李忠定、张保才、刘响林、王永亮主编. 参加本书编写的有:胡荣(第1章)、刘响林(第2章)、李忠定(第3、4章)、刘保友(第5、6章)、王永亮(第7章),张保才负责了第3版的改版工作.

在本教材的编写过程中,得到了顾祝全及牟卫华两位教授的热情帮助,在此表示衷心的感谢.

由于编者的能力、水平有限,书中难免存在缺点、错误,恳请读者批评指正.

编 者

2009年6月

目 录

第 1 章 行列式	1
§ 1.1 行列式的概念	3
1.1.1 二阶、三阶行列式	3
1.1.2 n 阶行列式	5
§ 1.2 行列式的性质与计算	10
1.2.1 行列式的性质	10
1.2.2 行列式按行(列)展开	14
* 1.2.3 拉普拉斯展开定理	21
§ 1.3 克莱姆法则	23
第 1 章习题	28
第 2 章 矩阵	31
§ 2.1 矩阵的概念	33
§ 2.2 矩阵的运算	36
2.2.1 矩阵的加法	36
2.2.2 数与矩阵相乘	37
2.2.3 矩阵与矩阵相乘	38
2.2.4 矩阵的转置	42
2.2.5 方阵的行列式	43
2.2.6 共轭矩阵	44
§ 2.3 逆矩阵	44
§ 2.4 分块矩阵	49
2.4.1 分块矩阵的加法	50
2.4.2 数与分块矩阵相乘	51
2.4.3 分块矩阵相乘	51
2.4.4 分块矩阵的转置	52
§ 2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵	54
2.5.1 矩阵的初等变换	54
2.5.2 初等矩阵	57
§ 2.6 矩阵的秩	61

第 2 章习题	64
第 3 章 向量空间	67
§ 3.1 向量的概念与表示	69
3.1.1 平面与空间向量的概念	69
3.1.2 向量的线性运算	69
3.1.3 空间直角坐标系	72
3.1.4 向量的坐标表示	74
§ 3.2 向量的运算	76
3.2.1 向量线性运算的代数方法	76
3.2.2 向量的数量积	77
3.2.3 向量的向量积	79
* 3.2.4 向量的混合积	82
§ 3.3 向量空间	84
3.3.1 n 维向量的定义	84
3.3.2 特殊的 n 维向量	84
3.3.3 向量的线性运算	85
3.3.4 向量空间	85
* 3.3.5 线性空间	86
§ 3.4 向量组的线性相关性	87
3.4.1 基本概念	87
3.4.2 线性相关性的判别	89
§ 3.5 向量组的秩 线性空间的基和维数	92
3.5.1 向量组的极大无关组和它的秩	92
3.5.2 线性空间的基和维数	93
3.5.3 向量在给定基下的坐标	94
3.5.4 矩阵的行秩、列秩及它的秩	95
第 3 章习题	98
* 第 4 章 线性变换(映射)	101
§ 4.1 线性变换的概念	103
4.1.1 定义及简例	103
4.1.2 线性变换的简单性质	104
4.1.3 线性变换的核及象	104
4.1.4 线性变换空间 $L(V, W)$ 及线性变换的运算	105
§ 4.2 线性变换的坐标表示式	106
4.2.1 线性变换的矩阵表示式	106

4.2.2 过渡矩阵	108
第4章习题	110
第5章 线性方程组	111
§ 5.1 齐次线性方程组	113
5.1.1 线性方程组及其初等变换	113
5.1.2 齐次线性方程组	113
5.1.3 齐次线性方程组的解结构	114
§ 5.2 非齐次线性方程组	120
5.2.1 非齐次线性方程组解的判定定理	120
5.2.2 非齐次线性方程组的解结构	121
第5章习题	128
第6章 相似矩阵与二次型	131
§ 6.1 欧几里德空间	133
6.1.1 内积及性质	133
6.1.2 向量的长度及性质	134
6.1.3 正交向量及正交化过程	134
6.1.4 欧几里德(Euclid)空间	136
6.1.5 正交矩阵及正交线性变换	137
§ 6.2 特征值 特征向量	139
6.2.1 特征值及特征向量的概念及求法	139
6.2.2 特征值及特征向量的性质	142
§ 6.3 相似矩阵	143
6.3.1 相似矩阵的概念及性质	143
6.3.2 方阵可对角化条件	144
§ 6.4 实对称矩阵	145
§ 6.5 二次型	150
6.5.1 二次型的概念及标准形	150
6.5.2 求正交线性变换把二次型化为标准形	152
6.5.3 配方法求可逆线性变换把二次型化为标准形	155
§ 6.6 正定二次型	156
6.6.1 惯性定理	156
6.6.2 正定二次型	157
第6章习题	159
第7章 空间解析几何	161
§ 7.1 曲面及其方程	163

7.1.1	曲面方程	163
7.1.2	旋转曲面	164
7.1.3	柱面	165
§ 7.2	空间曲线及其方程	166
7.2.1	空间曲线的一般方程	166
7.2.2	空间曲线的参数方程	167
7.2.3	空间曲线在坐标面上的投影	168
§ 7.3	平面及其方程	170
7.3.1	平面的法向量与平面的点法式方程	170
7.3.2	平面的一般方程	171
7.3.3	两平面间的关系	174
7.3.4	点到平面的距离	175
§ 7.4	空间直线及其方程	177
7.4.1	空间直线的方向向量和直线的对称式方程	177
7.4.2	空间直线的一般方程	178
7.4.3	两直线间关系	180
7.4.4	直线与平面间关系	181
§ 7.5	常见二次曲面及二次型应用	184
7.5.1	常见二次曲面	184
* 7.5.2	二次曲面方程的化简	188
7.5.3	二次曲线方程的化简	191
第 7 章习题		193
习题答案		196

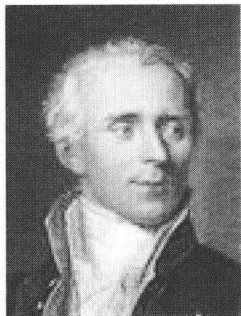
第 1 章

行列式概念的建立源于求解线性方程组的实际需要，它作为一个重要的数学工具，在数学的各个领域和其他众多科学技术领域（如物理学、力学、工程技术等）都有着广泛的应用。

本章主要介绍：

- 行列式的概念
- 行列式的性质和计算方法
- 解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则

行 列 式



拉普拉斯

拉普拉斯 (Laplace, Pierre Simon, 1749—1827) 是法国数学家, 天文学家。曾任巴黎军事学院数学教授。1795 年任巴黎综合工科学学校教授, 后又在高等师范学校任教授。1816 年被选为法兰西学院院士, 1817 年任该院校长。

拉普拉斯生于法国诺曼底的博蒙, 父亲是一个农场主, 他从青年时期就显示出卓越的数学才能, 18 岁时带着一封推荐信去找当时法国著名学者达朗贝尔, 但被后者拒绝接见。拉普拉斯就寄去一篇力学方面的论文给达朗贝尔。这篇论文出色至极, 以至达朗贝尔忽然高兴得要当他的教父, 并使拉普拉斯被推荐到军事学校教书。

此后, 他同拉瓦锡在一起工作了一个时期, 他们测定了许多物质的比热。1780 年, 他们两人证明了将一种化合物分解为其组成元素所需的热量就等于这些元素形成该化合物时所放出的热量。这可以看作是热化学的开端, 而且, 它也是继布拉克关于潜热的研究工作之后向能量守恒定律迈进的又一个里程碑, 60 年后这个定律终于瓜熟蒂落地诞生了。

拉普拉斯把牛顿的万有引力定律应用到整个太阳系, 1773 年解决了一个当时著名的难题: 解释木星轨道为什么在不断地收缩, 而同时土星的轨道又在不断地膨胀。拉普拉斯用数学方法证明行星平均运动的不变性, 并证明为偏心率 and 倾角的 3 次幂。这就是著名的拉普拉斯定理。

1784—1785 年, 他求得天体对其外任一质点的引力分量可以用一个势函数来表示, 这个势函数满足一个偏微分方程, 即著名的拉普拉斯方程。

1786 年证明行星轨道的偏心率和倾角总保持很小和恒定, 能自动调整, 即摄动效应是守恒和周期性的, 既不会积累也不会消解。1787 年发现月球的加速度同地球轨道的偏心率有关, 从理论上解决了太阳系动态中观测到的最后一个反常问题。

1796 年他的著作《宇宙体系论》问世, 这是拉普拉斯另一部名垂千古的杰作。在这部书中, 他独立于康德, 提出了第一个科学的太阳系起源理论——星云说。康德的星云说是从哲学角度提出的, 而拉普拉斯则从数学、力学角度充实了星云说, 因此, 人们常常把他们两人的星云说称为“康德-拉普拉斯星云说”。

他长期从事大行星运动理论和月球运动理论方面的研究, 在总结前人研究的基础上取得大量重要成果, 他的这些成果集中在 1799—1825 年出版的 5 卷 16 册巨著《天体力学》之内。在这部著作中第一次提出天体力学这一名词, 是经典天体力学的代表作。他因研究太阳系稳定性的动力学问题被誉为法国的牛顿和天体力学之父。

拉普拉斯在 1814 年提出科学假设: 如果有一个智能生物能确定从最大天体到最轻原子的运动的现时状态, 就能按照力学规律推算出整个宇宙在过去状态和未来状态。后人把他所假定的智能生物称为拉普拉斯妖。

§ 1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶、三阶行列式

1 二阶行列式

引例 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

解 先消去 y . 不妨设 $a_{12} \neq 0$, 用 $-\frac{a_{22}}{a_{12}}$ 乘第一个方程再添加到第二个方程上去, 得

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x = a_{12}b_2 - a_{22}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 有

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理, 消去 x 可得

$$y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆, 引入如下记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组的解可以简单地表示成

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}.$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式, 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素, 这四个元素排

成二行二列, 横排称行, 竖排称列. 元素 a_{ij} 的右下角有两个下标 i 和 j , 第一个下标 i 称行标, 它表示元素所在的行, 第二个下标 j 称列标, 它表示元素所在的列, 如 a_{12} 是位于第一行第二列上的元素, 而 a_{21} 是位于第二行第一列上的元素. 从行列式的左上角到右下角的连线称为行列式的主对角线, 从行列式的右上角到左下角的连线称为

行列式的次对角线.

二阶行列式是两项的代数和,一项是主对角线上两元素的乘积,取正号;另一项是次对角线上两元素的乘积,取负号.称算式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式的展开式.若 $a_{ij} (i, j=1, 2)$ 是数,则 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 的运算结果称为行列式的值.二阶行列式的上述计算方法称为对角线法则.

分析解线性方程组所引出的行列式,可以发现,行列式 D 的元素正是方程组中未知量的系数,故称此行列式为方程组的系数行列式.而行列式 D_1 和 D_2 是由常数项 b_1, b_2 排成的列分别取代 D 中第一列和第二列得到的.

可以看出,引入行列式记号使得二元线性方程组的求解变得简单、好记.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}.$$

解 由引例的结果可得

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 1 = 7.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times 3 - (-1) \times 2 = -1.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5.$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{1}{7}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{5}{7}.$$

2 行列式

与二元线性方程组完全类似,利用消元法可得三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

(x_2, x_3 的表达式略).

显然,要记住这类表达式是困难的.为便于方程组的求解和记忆,引入新的记号

$$x_1 = \frac{D_1}{D}.$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这里由 9 个数排成的三行三列的正方形数表代表 6 项的代数和, 即

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \\ D_1 &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - \\ &\quad b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned}$$

我们称这种具有特定含义的三行三列的正方形数表为三阶行列式. 下图给出计算三阶行列式的对角线法则.

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

图中有三条实线和三条虚线, 每条实线所连三个元素的乘积取正号; 每条虚线所连三个元素的乘积取负号, 行列式就等于这六个乘积的代数和.

注意: 计算行列式的对角线法则只适用于二阶、三阶行列式, 并不能推广到更高阶的行列式.

例 1.2 用对角线法则计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 0 \times 4 + (-1) \times 3 \times (-2) + 1 \times 1 \times 1 - \\ &\quad 2 \times 1 \times 3 - (-1) \times 1 \times 4 - 1 \times 0 \times (-2) \\ &= 5. \end{aligned}$$

1.1.2 n 阶行列式

从二、三阶行列式定义可以看出, 二阶行列式是 2^2 个元素排成的二行、二列的表, 它表示两项, 即 $2!$ 项的代数和; 三阶行列式是 3^2 个元素排成的三行、三列的表,

它表示六项, 即 $3!$ 项的代数和. 可以想像, n 阶行列式应由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 排成 n 行 n 列的表构成, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶行列式表示多少项的代数和? 每项的正负号如何确定? 当 $n > 3$ 时对角线法则并不适用, 故为求得上述问题的解决, 需对二阶、三阶行列式做进一步研究, 以便找出行列式所共有的特性, 为此, 下面先介绍全排列和逆序数概念.

1 全排列及其逆序数

在初等数学中, 我们已经学过排列的知识.

n 个不同的元素排成一列, 称为这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的所有排列种数用 P_n 表示.

例如 $P_2 = 2!$, $P_3 = 3!$, $\dots$, $P_n = n!$.

对于 n 个不同的元素, 我们规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数, 可规定由小到大为标准次序), 按标准次序排成的排列称为标准排列, 在这 n 个元素的任一排列中, 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时, 就说有一个逆序, 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数. 显然, 标准排列的逆序数为 0.

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

下面介绍求逆序数的方法.

考虑由 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 构成的排列. 规定由小到大为标准次序(即排列 $12 \cdots n$ 为标准排列). 设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

是由 $1, 2, \dots, n$ 构成的一个排列, 逐个考虑元素 p_i ($i=1, 2, \dots, n$), 如果比 p_i 小且排在 p_i 后面的元素有 t_i 个, 就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i . n 个元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i$$

就是这个排列的逆序数.

例 1.3 求排列 236154 的逆序数.

解 比 2 小且排在 2 后面的数只有一个(数 1), 故 2 的逆序数为 1;

比 3 小且排在 3 后面的数只有一个(数 1), 故 3 的逆序数为 1;

比 6 小且排在 6 后面的数有三个(数 1, 5, 4), 故 6 的逆序数为 3;

比 1 小且排在 1 后面的数不存在, 故 1 的逆序数为 0;

比 5 小且排在 5 后面的数只有一个(数 4), 故 5 的逆序数为 1;

4 在末位,逆序数为 0.

所以,排列的逆序数为

$$t = 1 + 1 + 3 + 0 + 1 + 0 = 6,$$

此排列为偶排列.

2 对换

对于给定的一个排列,将其中任意两个元素对调,其余元素不动,得一新的排列,这种作出新排列的手续称为对换.将相邻两个元素对换,称相邻对换.如

$$456231 \xrightarrow[\substack{\text{一次相邻对换} \\ 5 \text{ 与 } 6 \text{ 对换}}]{\quad} 465231,$$

$$456231 \xrightarrow[\substack{\text{一次对换} \\ 5 \text{ 与 } 3 \text{ 对换}}]{\quad} 436251.$$

容易算出

$$t(456231) = 11,$$

$$t(465231) = 12,$$

$$t(436251) = 10.$$

结果表明,经一次对换(无论是相邻对换还是不相邻对换),排列改变了奇偶性.此结论具有一般性.

定理 1.1 排列中任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设对换排列 $p_1 \cdots p_l p q q_1 \cdots q_m$ 中的 p 与 q ,得到 $p_1 \cdots p_l q p q_1 \cdots q_m$. 显然,元素 $p_1, \cdots, p_l$ 与 $q_1, \cdots, q_m$ 的逆序数经过对换并不改变,而 p, q 两个元素的逆序数改变为:当 $p < q$ 时,经对换后 p 的逆序数没有改变而 q 的逆序数增加 1;当 $p > q$ 时,经对换后 p 的逆序数减少 1 而 q 的逆序数没有改变. 总之,对换前后两个排列的逆序数相差 1,所以两个排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设对换排列 $p_1 \cdots p_l p q_1 \cdots q_m q r_1 \cdots r_k$ 中的 p 与 q ,得到

$$p_1 \cdots p_l q q_1 \cdots q_m p r_1 \cdots r_k.$$

这个对换过程可看作先将元素 p 依次与 $q_1, q_2, \cdots, q_m, q$ 作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $p_1 \cdots p_l q_1 \cdots q_m q p r_1 \cdots r_k$,再用元素 q 依次与 $q_m, \cdots, q_1$ 作 m 次相邻对换,调成 $p_1 \cdots p_l q q_1 \cdots q_m p r_1 \cdots r_k$. 总之,排列 $p_1 \cdots p_l p q_1 \cdots q_m q r_1 \cdots r_k$ 经 $2m+1$ 次相邻对换调成排列 $p_1 \cdots p_l q q_1 \cdots q_m p r_1 \cdots r_k$,所以两个排列的奇偶性不同.

注意到标准排列是偶排列(逆序数为 0),不难得到如下推论.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

3 三阶行列式的结构

三阶行列式的定义式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出其结构特点:

(1) 三阶行列式由 3^2 个元素构成, 定义式右端的每一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$, 这里行标排成标准排列 123, 而列标排列成 $p_1p_2p_3$, 是自然数 1, 2, 3 的某个排列. 这样的排列共有 6 种 ($P_3 = 3! = 6$), 正好对应定义式右端的项数. 这说明, 三阶行列式等于所有取自不同行、不同列的三个元素乘积的代数和, 共有 $3!$ 项.

(2) 6 项中带正号、负号的各 3 项:

带正号的 3 项列标排列是 123, 213, 312, 均为偶排列;

带负号的 3 项列标排列是 132, 213, 321, 均为奇排列.

因此各项所带正负号可以表示为 $(-1)^t$, 其中 t 是列标排列的逆序数.

由以上分析, 三阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1 p_2 p_3$ 的逆序数, $\sum_{p_1 p_2 p_3}$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 求和.

4 n 阶行列式的定义

定义 1.1 n 阶行列式由 n^2 个元素构成, 其定义式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为数 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, t 是 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数, $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和.

由定义知, n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和, 其中每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积, 每项前面所带符号 $(-1)^t$ 由排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数 t 确定.

n 阶行列式 D 有时也简记作 $\Delta(a_{ij})$.

规定: 一阶行列式的值就等于构成行列式的元素, 如 $|-1| = -1$. 注意不要与绝