

机械制造者

手册



机械工业出版社

TH

73

15.7-113

4

V.30 20

机械制造者手册

(共六卷)

第三卷

主编 乌克兰苏维埃社会主义共和国科学院院士 谢联先

机械工业出版社

出版者的話

这部《机械制造者手册》共六卷，第一卷是关于数学、理論力学、机械原理三方面的資料。第二卷是关于热工学、化学、光学、声学、水力学等方面的資料。第三卷是机械强度計算。第四卷是机械零件的設計和計算。第五卷是供机械設計师参考的制造工艺方面的資料。第六卷是关于机械制造用的材料方面的資料。中譯本是根据1955年修訂二版譯出的。第二版很多章作了修改，有几章从新写过，或作了补充；对于实际应用价值不大的材料都刪去了。所以新版可以說取材既全面又精煉，無論从理論方面說或是从实用方面說，都照顧得很适当。各种重要的原理、公式及計算方法书中有丰富的应用举例。

本手册是从事机械制造的工程师及研究人員必备的参考书。

本卷著者

技术科学碩士：安德列耶娃(Л. Е. Андреева)、比第尔曼(B. Л. Бидерман)、博亞尔申諾夫(С. В. Бояршинов)、基緬脫別尔格(Ф. М. Диментберг)、馬庫申(В. М. Макушин)、馬里宁(Н. Н. Малинин)、簡簡耳鮑姆(И. М. Тетельбаум)、特拉彼新(И. И. Трапезин)、技术科学博士、教授：金納索什維利(Р. С. Кинасашвили)、伏耳弥尔(А. С. Вольмир)、波諾馬列夫(С. Д. Пономарев)、普黎郭罗夫斯基(Н. И. Пригоровский)、烏曼斯基(А. А. Уманский)、菲奧多捷夫(В. И. Феодосьев)、工程师扎西达帖列夫(С. М. Заседателев)、烏克蘭蘇維埃社会主义共和国科学院通訊院士科瓦連科(А. Л. Коваленко)、烏克蘭蘇維埃社会主义共和国科学院院士謝联先(С. В. Серенсен)。

本卷譯者

辛一行、張直明、唐照千、王錫庶、張言羊、夏寅藻、徐世麟、陸家訓、朱 城、張和享、金忠謀、林明邦

本卷校者

吳克敏、朱 城、張直明、章紀川、華申吉、于尔申

蘇联 С. В. Серенсен 主編 ‘Справочник машиностроителя (в шести томах) Том 3’ (Машгиз 1955年第二版)

NO. 1994

1960年2月第一版 1960年2月第一版第一次印刷
850×1168^{1/32} 字數815千字 印張24^{1/2} 插頁3 00,001—10,100册
机械工业出版社(北京阜成門外百万庄)出版
机械工业出版社印刷厂印刷 新华書店發行

北京市書刊出版业營業
許可証出字第008号

統一書号 15033·2053
定 价(11) 5.70 元

主要符号

A 、 B 及 R ——支反力。

A ——强制振动的振幅。

a ——自由振动的振幅。

a_H ——用具有切口的试样试得的单位冲击韧性 (公斤米/厘米² 或公斤厘米/厘米²)。

d 及 D ——轴或孔的直径 (厘米, 毫米)。

E ——纵向弹性模数 (公斤/厘米²)。

E_T ——增强模数 (公斤/厘米²)。

F ——横截面的面积 (厘米²)。

F_{Hm} ——横截面的有效面积 (扣除了截面所受的削弱后)。

f ——挠度 (厘米, 毫米); 振动频率 (秒⁻¹, 赫芝)。

G ——剪切弹性模数 (公斤/厘米²)。

h 、 b ——零件的矩形截面的尺寸, 依次为高度及宽度。

I ——截面的轴惯矩 (厘米⁴)。

I_1 及 I_2 ——截面对于轴线 1 和 2 的主轴惯矩。

I_P ——截面的极惯矩 (厘米⁴)。

i ——截面的回转半径 (厘米)。

k_s ——系数, 表明静载荷下应力集中对强度的影响。

$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}$ ——变动法向应力下的有效应力集中系数。

$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}$ ——变动切向应力下的有效应力集中系数。

$(k_\sigma)_D$ ——系数, 反映出法向应力集中和绝对尺寸的影响, 以及表层和表面状态的影响。

$(k_\tau)_D$ ——系数, 反映出切向应力集中和绝对尺寸的影响, 以及表层和表面状态的影响。

L ——外力矩 (公斤厘米, 吨米)。

l 、 L ——长度, 跨距 (厘米)。

M ——弯矩 (公斤厘米, 吨米)。

M_K ——扭矩 (公斤厘米, 吨米)。

N ——循环数。

N 、 S 、 P ——纵向 (轴向) 力 (公斤)。

- n ——强度裕度。
 n_y ——稳定裕度。
 P ——集中力，外载荷（公斤，吨）。
 P_{kp} ——临界力，临界载荷。
 p, q ——单位长度上或单位面积上的载荷，合成应力（公斤/厘米，吨/米或公斤/厘米²，吨/米²）。
 Q ——载荷，重量，剪力（公斤，吨）。
 q ——材料对应力集中的敏性系数。
 r, R, ρ ——臂长，半径。
 $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ ——循环的不对称系数。
 s ——真法向应力，单位长度或单位面积上的切向载荷。
 S ——面积静矩（厘米³）。
 s_K ——对断裂的真抵抗能力。
 T ——时间（秒）；周期（秒）；动能（公斤厘米）。
 t ——变形超出弹性极限时的真切向应力（公斤/厘米²，公斤/毫米²），时间（秒），温度。
 t_K ——抗剪能力。
 t, δ ——厚度。
 U ——变形位能（公斤厘米，公斤米）。
 u, v, w ——依次为沿轴线 x, y, z 的綫性位移。
 W ——弯曲截面模数（厘米³）。
 W_p ——极截面模数。
 $W_{\sigma p}$ ——不計削弱的截面模数。
 W_{nm} ——計入削弱的截面模数。
 x, y, z ——一点的坐标；坐标軸的符号。
 $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_H}$ ——弹性极限內的法向应力集中系数。
 $\alpha_\tau = \frac{\tau_{\max}}{\tau_H}$ ——弹性极限內的切向应力集中系数。
 β ——系数，表明表面状态及表层性質对疲乏极限的影响。
 γ ——相对剪变形。
 $\Delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ ——变形素的相对积变。
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ——一点上的主变形。

- ε ——相对纵向变形。
 ε_u ——真纵向变形。
 ε_i ——变形集度。
 $\varepsilon_e, \varepsilon_p$ ——依次为弹性及塑性的纵向变形。
 $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$ ——系数，依次表明在法向应力及切向应力作用下，截面尺寸对抵抗疲乏的能力的影响。
 ε_T ——系数，表明随零件截面尺寸而定的、材料屈服极限的改变。
 ε_B ——系数，表明随零件截面尺寸而定的、材料强度极限的改变。
 $\dot{\varepsilon}$ ——变形速度。
 θ ——横截面在弯曲时的偏转角。
 θ ——质量惯矩（公斤秒²厘米）。
 $\lambda = 1 - \frac{E_T}{E}$ ——减弱系数； λ ——杆的柔度。
 μ ——波松比。
 σ ——法向应力（公斤/厘米²，公斤/毫米²）。
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ——一点上的主应力；其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。
 σ_n ——名义法向应力。
 σ_i ——应力集度。
 $[\sigma]$ ——许用法向应力。
 $[\sigma]_p$ ——许用拉伸应力。
 $[\sigma]_{c\kappa}$ ——许用压缩应力。
 $[\sigma]_u$ ——许用弯曲应力。
 σ_{np} ——相当应力。
 σ_B ——强度极限（瞬时抵抗能力）。
 σ_{Bp} ——拉伸强度极限。
 $\sigma_{Bc\kappa}$ ——压缩强度极限。
 σ_{Bu} ——弯曲强度极限。
 σ_T ——屈服极限（公斤/毫米²，公斤/厘米²）。
 $\sigma_{0.2}$ ——与0.2%塑性变形相应的屈服极限。
 σ_{T_s} ——外插的屈服极限。
 σ_{-1} ——对称循环弯曲疲乏极限（公斤/毫米²，公斤/厘米²）。

σ_{-1p} ——对称循环拉压疲劳极限。

σ_0 ——脉动循环弯曲疲劳极限。

σ_{0c} ——脉动循环压缩疲劳极限。

σ_{-1k} ——有应力集中时的对称循环弯曲疲劳极限。

$\sigma_{\max}, \tau_{\max}$ ——循环中的最大应力。

$\sigma_{\min}, \tau_{\min}$ ——循环中的最小应力。

$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ ——循环中的平均应力。

$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ ——循环中的应力幅。

σ_{NA} ——蠕滑极限。

σ_{nq} ——比例极限。

$\sigma_{\partial A}$ ——长期强度极限。

σ_y ——弹性极限。

τ ——切向应力 (公斤/厘米², 公斤/毫米²)。

τ_N ——名义切向应力。

$[\tau]$ ——许用切向应力。

$[\tau]_{cp}$ ——许用剪切应力。

$[\tau]_k$ ——许用扭转应力。

τ_B ——扭转强度极限。

τ_{scp} ——剪切强度极限。

τ_T ——剪切屈服极限。

τ_{-1} ——对称循环扭转疲劳极限。

τ_{-1k} ——有应力集中时的对称循环扭转疲劳极限。

$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2}$ ——循环中的平均切向应力。

$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2}$ ——循环中的切向应力幅。

φ ——扭转角。

ψ ——横截面面积在拉断时的相对收缩。

$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$ ——系数, 表明法向应力下循环的不对称性对强度的影响。

$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$ ——系数, 表明切向应力下循环的不对称性对强度的影响。

ω ——角速度, 角频率 (秒⁻¹)。

目 次

主要符号

第一章 应力和变形	普黎郭罗夫斯基等	1
应力		1
变形		9
应力与变形在弹性极限内的关系		12
应力与变形在塑性变形时的关系		17
应力場		21
第二章 杆件的計算		23
直杆的計算	普黎郭罗夫斯基	23
中心拉伸和压缩		23
剪切(剪断或剪裂)		31
扭轉		33
截面的几何特性		44
单跨梁中的剪力和弯矩		73
多跨梁及弹性基座梁在不活动载荷下的剪力和弯矩	基緬脫別尔格	94
在移动载荷下梁中的剪力和弯矩	基緬脫別尔格	111
梁的应力和强度計算		120
弯曲变形能		134
梁的位移		135
复合抵抗能力		144
曲梁和螺旋梁的計算	波諾馬列夫	
大曲率的平面曲梁的应力和变形		159
圆形横截面的螺旋梁的应力		168
大柔度杆的弯曲計算	扎西达帖列夫	159
引言		172
图解法		173
图解-分析解法		179

第三章 杆件系統的計算	烏曼斯基等	199
靜定桁架計算		199
靜定剛架的計算		212
位移的決定		213
超靜定系統的計算		220
第四章 薄壁杆件計算	烏曼斯基	240
薄壁杆件的品質特性		240
開口斷面杆件在自由扭轉時的應力和變形		242
封閉斷面杆件在自由扭轉時的應力和變形		245
薄壁杆件的複合抗力		247
一端或二端固定的短薄壁杆件		260
開口斷面杆件軸心壓縮和偏心壓縮的穩定性		263
梁橫彎曲時的一般穩定性		266
第五章 平板的計算	伏耳弥尔	271
一般概念		271
平板的彎曲計算		272
厚板的計算		284
平板的穩定性計算		285
第六章 壳體的計算	菲奧多捷夫	294
對稱薄壳的計算		294
大撓度壳體的剛性計算	安德列耶娃	305
第七章 受軸向對稱載荷的圓柱形零件的計算		317
厚壁圓筒受內壓力和外壓力	博亞爾申諾夫	317
結合零件的長度相同時的壓配合計算		319
求厚壁圓筒應力的圖解法		320
緊套合圓筒和自緊套合圓筒		322
厚壁圓筒的溫度應力		323
受沿長度變化的軸向對稱載荷的厚壁圓筒		324
結合零件的長度不同時壓配合的計算		327
承受壓力的厚壁球	菲奧多捷夫	328
第八章 運動構件的計算	波諾馬列夫、馬里寧	330

运动杆件的計算.....	330
旋轉的圆柱形螺旋彈簧之計算.....	339
實心和空心旋轉軸中的應力.....	341
旋轉圓盤的計算.....	343
旋轉殼的計算.....	384
第九章 超出彈性極限時的計算..... 馬里寧	392
考慮到塑性變形時零件的計算.....	392
考慮到蠕滑的計算.....	419
第十章 結構中杆件的靜力穩定性計算..... 馬庫申	448
受壓縮直杆的穩定性.....	448
承受壓縮的自然盤繞直杆的穩定性.....	471
受壓縮兼扭轉的杆的穩定性.....	473
圓環的穩定度.....	473
直梁及曲梁的平面彎曲形狀的穩定性.....	475
受壓縮的圆柱形螺旋彈簧的穩定性.....	482
第十一章 機器結構元件的振動..... 簡簡耳鮑姆	485
基本概念和基本關係.....	485
結構元件的振動計算.....	516
振動的實驗研究.....	558
第十二章 沖擊載荷的計算..... 比第爾曼	573
緒論.....	573
塊狀物體的碰撞.....	574
剛性重物對本身質量非常小的彈性系統的沖擊.....	575
對緩沖器的沖擊.....	576
雙自由度系統的沖擊加載.....	578
對具有分布質量的杆件的縱沖擊.....	579
對圆柱形螺旋彈簧沖擊時力和變形的波動計算法.....	584
沖擊計算的簡化法.....	585
彈性體沖擊靜止障礙或兩個彈性體相撞的簡化計算.....	588
第十三章 局部應力..... 普黎郭羅夫斯基	591
應力集中.....	591

接触应力.....	613
第十四章 强度计算.....	謝联先 626
基本概念和性质.....	626
静止应力下的强度.....	638
变动应力下的强度.....	653
反复过应力下的强度.....	684
耐久性.....	698
冲击载荷下的强度.....	698
接触应力下的强度.....	699
强度裕度与许用应力的数值.....	700
第十五章 变形, 应力与内力的实验确定法.....	普黎郭罗夫斯基 707
伸长计法.....	708
弹性位移的测量.....	741
研究应力和变形的涂层法.....	746
研究应力分布所用的偏振光法.....	752

第一章 应力和变形

应 力

設在受載物体中假想地作一截面 $m-n$ (图 1), 并取作用在这个截面的一小部分上的內力对这部分截面面积 ΔF 之比, 当这个面积趋于无穷小, 而其周边向 A 点紧縮时, 所取的比率就趋近于某一极限。这个比率的极限称为应力, 它决定了作用在物体內 A 点处已知面积素上的內力集度。在所研究的物体中, 不但各点上的应力彼此不同, 而且即使在同一点上, 应力也按各个面积素的倾斜度不同而有所区别。

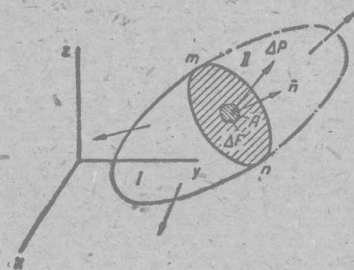


图 1

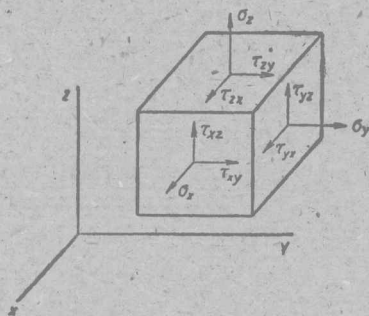


图 2

在法綫为 $\bar{n}$ 的面积素上, 坐标为 (x, y, z) 的 A 点处的全应力为

$$p_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}, \quad (1)$$

式中 ΔP ——从物体被取去的部分 II 傳到所研究的部分 I 上的力素。

应力的因次—— $\frac{\text{力}}{\text{面积}}$ (公斤/厘米², 公斤/毫米²)。

法向应力 σ_n 等于 p_n 在法綫 n 上的投影:

$$\sigma_n = p_n \cos(p\bar{n}, n). \quad (2)$$

切向应力 τ_n 等于 p_n 在面积素 ΔF 的平面上的投影:

$$\tau_n = p_n \sin(p\bar{n}, n). \quad (3)$$

应力分量 如果已知一点处任三个互相垂直的平面(面积素)上的应力, 就可以定出该点处任一平面上的应力。作用在与坐标轴 x 、 y 及 z 相垂直的平面上的应力 p_x 、 p_y 及 p_z 在这些坐标轴上的投影(图 2), 用下列符号来表示:

$$p_x: \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz};$$

$$p_y: \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz};$$

$$p_z: \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}.$$

量 σ_x 、 τ_{xy} 、……、 τ_{zy} 称为 A 点上的应力分量。应力分量符号中的第一个指号表示应力作用平面是与那一根轴綫相垂直的, 第二个指号表示应力是与那一根轴綫相平行的。例如, 应力 τ_{zy} 表示平行于 y 轴綫而作用在与 z 轴綫相垂直的平面上的切向应力。

应力分量符号的规则 如果平面在所研究的物体部分以外的法綫(外向法綫)指向于与之相平行的坐标轴綫, 则坐标轴綫的正方向就作为应力分量的正方向。按照这个规则, 凡是拉伸的法向应力总是正的。在图 2 上, 所有的应力分量都是正的。

切向应力的双生性 如果在平面 1 上(图 3)作用着切向应力 τ_1 , 则在垂直于 τ_1 的平面 2 上就作用着应力

$$\tau_2 = \tau_1. \quad (4)$$

因此

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (5)$$

主应力 通过物体的每一点都可以作出三个相互垂直的平面, 在这些平面上, 切向应力等于零。这些平面称为在这点上的主平面, 其法綫方向则称为主方向。作用在主平面上的法向应力称为主应力, 它用 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 来表示, 其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。一点上的法向应力, 在主平面上达到极端值。

主平面的位置及主应力的数值, 可按表 1 中的公式来确定。

应力状态的基本类型 綫(单向) 应力状态——两个主应力等于零(例如在受简单拉伸或純弯曲的梁中各点上)。在任何一个与不等于零的主应力相平行的平面上, 法向应力及切向应力都等于零。平面(双向) 应力状态——三个主应力中之一等于零(例如当薄板受到位于板之中平面内的力时, 其各点上的应力状态即是: 在零件不受载荷的表面上, 各点处的应力状态亦是)。

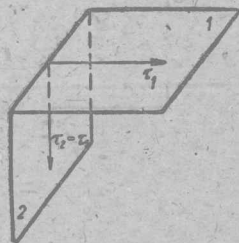
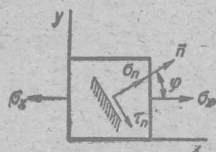


图 3

表 1 倾斜平面上的应力——主应力及最大切向应力——的公式

表中各圖上所表示的应力方向及偏轉角方向都認為是正的。如果按表中所列的公式算出的某个应力数值或偏轉角数值为負，則其方向与圖中所表示的相反。圖上所表示的应力都作用在画有阴影綫的物体部分上。

1. 單向应力状态



$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi; \quad (1)$$

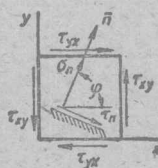
$$\tau_n = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi.$$

最大及最小切向应力为

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sigma_x \quad (2)$$

(發生在法綫与 σ_x 方向成 45° 及 135° 的各个平面上)。

2. 双向应力状态。純剪



$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \tau_{xy} \sin \varphi; \\ \tau_n &= -\tau_{xy} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

主应力为

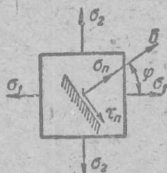
$$\sigma_1 = \tau_{xy} \text{ 及 } \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

(当 $\varphi = 45^\circ$ 及 $\varphi = 135^\circ$ 时)。最大及最小切向应力为

$$\tau_{\max, \min} = \pm \tau_{xy} \quad (4)$$

(当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = 90^\circ$ 时)。切向应力的这些数值是垂直于圖平面的平面上的最大及最小数值。

3. 双向应力状态; 已知主平面上的应力 σ_1 及 σ_2



$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi;$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi. \quad (5)$$

最大及最小切向应力为

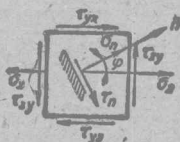
$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6)$$

(当 $\varphi = 45^\circ$ 或 $\varphi = 135^\circ$ 时)。切向应力的这些数值是垂直于圖平面的平面上的最大值及最小值。如果 $\sigma_2 > 0$ ，則所有切向应力中的最大及最小切向应力，將發生在对应力平面傾斜 45° 角的平面上，它等于：

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2}. \quad (6a)$$

(續)

4. 双向应力状态; 簡單拉伸或壓縮加上純剪



$$\sigma_n = \frac{1}{2} \sigma_x (1 + \cos 2\varphi) + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \quad (7)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

垂直于圖平面的平面上的主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (8)$$

确定着主平面位置的角 $\varphi = \varphi_1$ 及 $\varphi = \varphi_2$ 可由下式求出:

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{\sigma_i - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad (9)$$

式中 $i = 1$ 或 2 。

最大及最小切向应力为

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (10)$$

它作用在对主平面傾斜 45° 角的平面上。

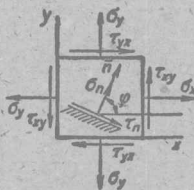
5. 双向应力状态。一般情况

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \quad (11)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

垂直于圖平面的平面上的主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (12)$$

主平面的角 φ_1 及 φ_2 按下列公式确定:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (13)$$

最大及最小切向应力为

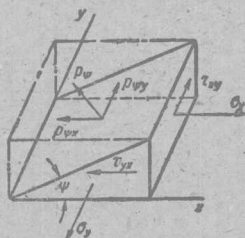
$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (14)$$

它作用在对主平面傾斜 45° 角的平面上。如果 $\sigma_2 > 0$, 則所有切向应力中的最大切向应力將發生在对应力平面側斜 45° 角的平面上, 它等于

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

(續)

6. 双向应力状态。一般情况



在平行于应力 σ_y 而对平面 xy 倾斜 ψ 角的平面上的应力

$$p_{\psi x} = \sigma_x \sin \psi; \quad (15)$$

$$p_{\psi y} = -\tau_{xy} \sin \psi, \quad (16)$$

位在平行于平面 xy 的平面中:

$$p_{\psi} = \sqrt{p_{\psi x}^2 + p_{\psi y}^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} \sin \psi. \quad (17)$$

法向应力为

$$\sigma_{\psi} = \sigma_x \sin^2 \psi. \quad (18)$$

切向应力为

$$\tau_{\psi} = \sin \psi \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2}(1 + \cos 2\psi) + \tau_{xy}^2}. \quad (19)$$

7. 三向应力状态。已知各主应力

法线为 n 的平面上的法向应力及切向应力为

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2(n, x) + \sigma_2 \cos^2(n, y) + \sigma_3 \cos^2(n, z); \quad (20)$$

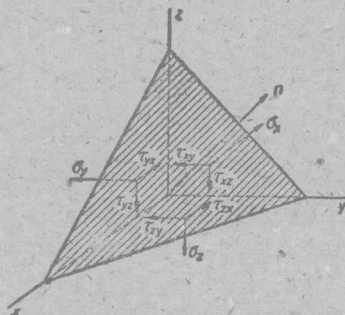
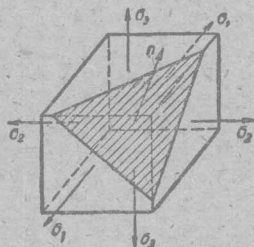
$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2(n, x) + \sigma_2^2 \cos^2(n, y) + \sigma_3^2 \cos^2(n, z) - [\sigma_1 \cos^2(n, x) + \sigma_2 \cos^2(n, y) + \sigma_3 \cos^2(n, z)]^2}. \quad (21)$$

在对三个主应力倾斜相同角度的平面（正八面体平面）上，法向应力及切向应力等于

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}$$

（正八面体应力）



(續)

切向应力的極端值为

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

最大切向应力 τ_1 所作用的平面，垂直于第二主平面，而等分第一及第三主平面之间的角。

8. 三向应力状态。一般情况。已知所研究点上的各应力分量
法綫为 $\bar{n}$ 的平面上的法向应力为

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(n, x) + \sigma_y \cos^2(n, y) + \sigma_z \cos^2(n, z) + 2\tau_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y) + 2\tau_{yz} \cos(n, y) \cos(n, z) + 2\tau_{zx} \cos(n, x) \cos(n, z). \quad (22)$$

在法綫为 $\bar{n}$ 的平面上，平行于轴 x 、 y 、 z 的分应力为

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z); \\ p_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z); \\ p_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \quad (23)$$

法綫为 $\bar{n}$ 的平面上的全应力为

$$p_n = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2}, \quad (24)$$

其方向与法綫 $\bar{n}$ 形成一角 ν ，这个角按下式确定：

$$\cos \nu = \frac{\tau_n}{p_n},$$

式中全切向应力为

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}. \quad (25)$$

所研究的点上的主应力 σ_1 、 σ_2 及 σ_3 等于下式的三个根：

$$\begin{aligned} \sigma_i^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma_i^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma_i \\ - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

每一个主平面的法綫的方向余弦，都可从下列一组方程式定出：

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) &= 0; \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + (\sigma_y - \sigma_i) \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) &= 0; \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + (\sigma_z - \sigma_i) \cos(n, z) &= 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1. \quad (28)$$

在前三个方程式中，只有两个是独立的。

对于双向应力状态，其主应力用 σ_1 及 σ_2 来表示（ $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ）。任何一个平面上的全应力，都平行于主应力 σ_1 及 σ_2 的作用方向所成的平面。

立体（三向）应力状态——所有三个主应力都不等于零。

任何一个应力状态都可以看作两个应力状态I及II之和。应力状态I的