面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

微积分

第三版 上册

同济大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

微积分

第三版 上册

同济大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书参照新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合当前的教学实际，在原书第二版的基础上修订而成。在保持同济编教材优秀传统的同时，努力贯彻教学改革的精神，加强对微积分的基本概念、理论、方法和应用实例的介绍，突出微积分的应用。本书结构严谨，逻辑清晰，文字表述详尽通畅，平易近人，易教易学，改编后的内容编排也更利于教学的组织和安排。所选用的习题突出数学基本能力的训练而不过分追求技巧，既有传统的优秀题目，又从国外教材中吸取或改编了一些有较高训练效能的新颖习题。通过数学实验将微积分与数学软件的应用有机结合起来是本书的一个特色，经过改编，数学实验与教学内容的结合更加紧密，有利于培养学生的数学建模能力。书中有些内容用楷书排印或加了“*”号，教师可灵活掌握。本书可作为工科和其他非数学类专业的高等数学(微积分)教材或参考书。

全书分上、下两册出版。上册的内容为函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学和微分方程，四个与一元函数微积分相关的数学实验，附录中有数学软件 Mathematica 的简介。下册内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，三个与多元微积分和级数有关的数学实验。书末附有习题答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上册/同济大学数学系编.—3版.—北京:高等教育出版社,2009.6

ISBN 978-7-04-026638-2

Ⅰ.微… Ⅱ.同… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 062409 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1999 年 9 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2009 年 6 月第 3 版
印　　张	23.5	印　　次	2009 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	440 000	定　　价	25.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　26638-00

前　言

本书第一版出版于1999年9月，是国内出版较早的高等教育面向21世纪课程教材。第二版出版于2003年8月，属普通高等教育“十五”国家级规划教材。在国内的微积分教材改革中，本书有一定影响。

根据第二版出版以来五年多的使用情况，参照教育部高等学校教学与统计学教学指导委员会新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合编者在教学实践中的新的体会和同行反馈的宝贵意见，决定再次修订。

本书前两版的主要特色是在保持传统教材、特别是同济大学编《高等数学》的优点的基础上，努力贯彻改革精神，体现教改成果。本次修订时注意保持这一特色，同时使教材进一步贴近广大学生的实际，更便于教学和学生自学。为此在保持原有框架和内容、风格不变的前提下，对部分内容作了修改和重写。比如对函数的凸性，尽管其有近代数学的应用背景，但同行反映实际教学时有不便之处，容易使学生在阅读参考材料时产生混淆，故这次重新处理为曲线的凹凸性。又如对曲面的切平面和法向量的导出，这次作了修订，更加突出其几何直观，便于学生掌握。再如对“傅里叶级数与最佳均方逼近”这一节打*号的内容的处理，作了进一步的精简，突出主要思想，简化细节。这样的修订都是围绕如何有利于学生学习这一目标进行的。对数学记号和逻辑符号的使用，在保持适当介绍的做法下，这次修订时确定在定义、定理的叙述中一般采用语言表述，适当限制使用范围，以降低内容的抽象度，减少初学者的困难。

为了便于教学，我们对个别节、目的内容进行了重新组合。比如原来把极限的性质单列一节，这样做有它的优点，但实际教学时发现教学安排不甚方便，故这次把数列极限的性质和函数极限的性质适当简化处理，并分列到“数列极限的定义”和“函数极限的定义”两节中，充实后的这两节，正好作为各一次授课的内容。按照同样的精神，对少数例题和习题作了调整，引入了一些被教学实践证明有较高效能的较为新颖的概念题和练习题，删除了少数并不十分必要的习题，以更加符合学生的认识规律和学习需求。

将数学建模融入主干课程，是数学教育界对当前进一步深化教学改革的一个共识。本书较早地将数学实验引入教材，与微积分教学相结合，成为本书的特色之一。在第二版的基础上，这次修订时我们按照简便、易用的原则，又对个别实验作了调整，使之与教学基本学要求贴得更紧，以进一步提高它们在培养数学

建模能力方面的作用。改编后，上册有四个实验，下册有三个实验。习题中少数需要借助计算机完成的题，在题号前用符号  表示。

参加本书第一版编写的有郭镜明、应明、邵国梁和朱晓平，黄珏也参加了第一版上册部分初稿的编写。本书第二版由郭镜明、应明、朱晓平和邵国梁等完成。参加本次修订的有郭镜明、应明和朱晓平。对书中存在的问题和不足，我们热诚欢迎广大同仁和读者批评指正。

编者

2009年2月

目　　录

预 备 知 识

PRELIMINARIES

一、集 合

1. 集合的概念

在数学中,我们把任意指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合(或简称集)(set).组成这个集合的事物称为该集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.一个集合,若其元素的个数是有限的,则称作有限集,否则就称作无限集.习惯上,全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.全体非负整数(即自然数)的集合记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{0,1-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}.$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互素}\right\}.$$

全体复数的集合记作 $\mathbf{C}$,即

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\quad \mathrm{i}^2=-1\}.$$

由数组成的集合简称数集.对于数集,有时我们在表示数集的字母的右上方加上“*”、“+”、“-”等上标,来表示该数集的几个特定子集.以实数集为例,$\mathbf{R}^*$ 表示排除了数 0 的实数集;$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数之集;$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数之集.其他数集的情况类似,不再赘述.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或者称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.例如集合 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$ 就是一个空集.规定空集是任何集合的子集.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称 A 与 B 相等，记作 $A=B$ 或 $B=A$.

2. 集合的运算

设 A 和 B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$；由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$；由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A\setminus B$. 有时我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体叫做全集，记作 I，并把差集 $I\setminus A$ 特别称为 A 的余集或补集，记作 A^c. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的余集

$$A^c=\{x\mid x<0 \text{ 或 } x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，
　　　　$A\cap B=B\cap A$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
　　　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
　　　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，
　　　　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积. 设 A、B 是任意两个集合，则 A 与 B 的直积，记作 $A\times B$，定义为如下的由有序对 (a,b) 组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

在微积分中最常用的一类实数集是区间. 设 a 和 b 都是实数且 $a<b$，实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间(open interval)并记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}^{①}.$$

a 和 b 称为区间的端点，它们均不属于 (a,b). 类似地可定义以 a、b 为端点的闭区间(closed interval)、半开区间等. 它们的记号和定义如下所列：

---

① 记号 (a,b) 表示开区间还表示有序对，这从上下文可以明白，一般不会产生异义.

闭区间　　$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,

半开区间　$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$,

$(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间(或有界区间),数 $b-a$ 称为这些区间的长度.有限区间都可以用数轴上长度有限的线段来表示,如图 1(a)、(b) 分别表示闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b). 此外还有无限区间(或无穷区间),引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)后,则可用类似的记号表示无限区间,例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1(c)、(d)所示.

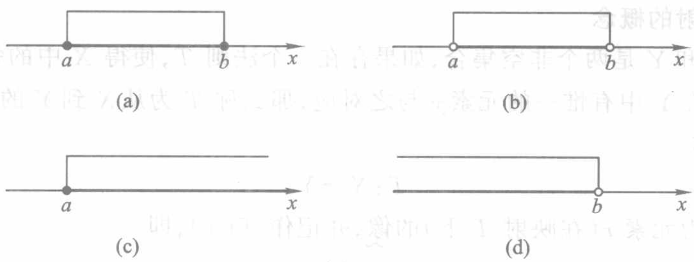

图 1

以后在不需要指明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简单地称它为“区间”,且常用字母 I 表示.

邻域(neighborhood)是一种常用的集合.设 a、δ 是实数且 $\delta>0$,则定义点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,为下列集合:

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

或写作

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

可见 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径(图 2).如果把邻域的中心去掉,所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

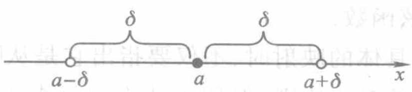

图 2

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域,例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域,其相邻两边各自平行于 x 轴与 y 轴,并且在 x 轴与 y 轴上的投影分别为区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$.

二、映　　射

1. 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 T,使得 X 中的每个元素 x 按法则 T 在 Y 中有惟一的元素 y 与之对应,那么称 T 为从 X 到 Y 的映射(mapping),记作

$$T:X\rightarrow Y,$$

元素 y 称为元素 x(在映射 T 下)的像,并记作 $T(x)$,即

$$y=T(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 T 下)的一个原像.

集合 X 称为映射 T 的定义域(domain),T 的定义域常记作 $\mathscr{D}(T)$. X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 T 的值域(range),T 的值域常记作 $\mathscr{R}(T)$. T 的值域有时也称为集合 X(在映射 T 下)的像并记作 $T(X)$,即

$$\mathscr{R}(T)=T(X)=\{T(x) \mid x\in X\}.$$

根据集合 X、Y 的不同情况,在不同的数学分支中,术语"映射"有着不同的惯用名称,例如"函数"、"泛函"、"变换"、"算子"等等. 如果 X 是非空集合,Y 是一个数集(实数集或复数集),那么从 X 到 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数. 我们在中学数学中所接触的函数实际上是实数集(或其子集)到实数集的映射. 例如,映射

$$f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R},\text{对每个 } x\in\mathbf{R},y=f(x)=\sin x$$

即为我们所熟悉的正弦函数.

注意,在说明一个具体的映射时,不仅要指出它是从哪个集合到哪个集合的映射,还要指出其具体的对应法则;但使用什么字母来表示所讨论的映射、集合和元素,是可以根据需要(当然也要注意习惯用法)自由选取的.

我们指出,在讨论函数时,为方便起见,常用 $y=f(x)$ 或 $f(x)$ 来表示函数

f,比如正弦函数可表示为 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$.

2. 几类重要的映射

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $T(X)=Y$,即 Y 中任一元素均是 X 中某元素的像,则称 T 为 X 到 Y 上的满射;若对任意的 x_1、$x_2\in X$, $x_1\neq x_2$,必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则称 T 为 X 到 Y 的单射;若 T 既是满射又是单射,则称 T 为 X 到 Y 上的一一映射,或称 T 为 X 与 Y 之间的一一对应.

例 1 设 $X_1=(-\infty,+\infty)$, $X_2=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $Y_1=(-\infty,+\infty)$, $Y_2=[-1,1]$.考虑 $f_1:X_1\to Y_1$, $f_2:X_1\to Y_2$, $f_3:X_2\to Y_1$, $f_4:X_2\to Y_2$,其中 $f_i\ (i=1,2,3,4)$ 均为如下的对应法则:对定义域内的任一 x, $f_i(x)=\sin x$.易知 f_1 是 X_1 到 Y_1 的映射,但既非满射,又非单射; f_2 是 X_1 到 Y_2 上的满射,但非单射;f_3 是 X_2 到 Y_1 的单射,但非满射; f_4 是 X_2 到 Y_2 上的满射,又是单射,即为一一映射.

3. 逆映射与复合映射

逆映射 设映射 T 为 X 到 Y 上的一一映射,则由定义,对每个 $y\in Y$,有惟一的 $x\in X$ 适合 $T(x)=y$,于是我们可得到一个从 Y 到 X 的映射,它将每个 $y\in Y$ 映为 X 中的元素 x,这里的 x 满足 $T(x)=y$.我们把这个映射称为 T 的逆映射,记作 T^{-1}.即,T^{-1} 为从 Y 到 X 的映射,对每个 $y\in Y$,如果 $T(x)=y$,则规定 $T^{-1}(y)=x$.

注意,只有一一映射才存在逆映射,因此也把一一映射称为可逆映射.比如在例 1 中,只有 f_4 才存在逆映射 f_4^{-1}, f_4^{-1} 即为大家熟悉的反正弦函数:$f_4^{-1}(x)=\arcsin x$,其定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

复合映射 设有映射 $T_1:X\to Y_1$, $T_2:Y_2\to Z$,且 $T_1(X)\subset Y_2$,则由 T_1 和 T_2 可确定从 X 到 Z 的一个对应法则,它将每个元素 $x\in X$,映为 Z 中的元素 $z=T_2[T_1(x)]$,显然这个对应法则是从 X 到 Z 的一个映射,我们把这个映射称为由 T_1、T_2 构成的复合映射,并记作 $T_2\circ T_1$,即

$$T_2\circ T_1:X\to Z,\text{对每个 } x\in X, (T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)].$$

例如,设有映射 $T_1:\mathbf{R}\to[-1,1]$,对每个 $x\in\mathbf{R}$, $u=T_1(x)=\sin x$,和映射

$$T_2:[-1,1]\to[0,1],\text{对每个 } u\in[-1,1], y=T_2(u)=u^2,$$

则可构成复合映射 $T_2\circ T_1:\mathbf{R}\to[0,1]$,对每个 $x\in\mathbf{R}$,

$$(T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)]=T_2(\sin x)=(\sin x)^2.$$

三、一元函数

1. 概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则把从 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,简称为函数(function).通常把这个函数简记为

$$y=f(x),x\in D,\text{或 } f(x),x\in D.$$

x 称为函数的自变量,y 称为函数的因变量,习惯上也称 y 为 x 的函数.前面定义的与映射有关的一些概念,如定义域、值域等,也适用于函数.对于函数 $y=f(x),x\in D$,我们把 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的集合 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形(或图像)(graph).

表示函数的符号是任意选取的,除了常用的 f 外,还可以用其他的英文字母或希腊字母,如"g","F","φ","Φ",等等.相应地,函数可记作 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=\Phi(x)$,等等.有时还可直接用因变量的记号来表示函数,即把函数记作 $y=y(x)$.如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

在一些实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.例如自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s.如果开始下落的时刻是 $t=0$,落地时刻是 $t=T$,那么 s 与 t 之间的对应关系是

$$s=s(t)=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T].$$

这个函数的定义域是区间$[0,T]$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的自然定义域.例如 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是$(-\infty,+\infty)$,$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的自然定义域是区间$(-1,1)$.

按照函数的定义,对定义域 D 中的每个 x,总有惟一的函数值 y 与之对应.这就是说,作为函数的对应法则,必需满足"单值性"的要求.但往往会遇到这样的对应法则,在此法则下,对每个 $x\in D$,有多于一个的 y 值与之对应,尽管这样的对应法则不符合函数的定义,但为应用方便,习惯上仍称这种法则在 D 上确定了一个多值函数.例如,如果将"满足方程 $x^2+y^2=a^2$"作为 x 与 y 之间的对应法则,那么当 $x=a$ 或 $-a$ 时,对应 $y=0$ 一个值;但当 x 取开区间$(-a,a)$内任一个值时,对应的 y 有两个值.因此这个方程就确定了一个多值函数.对于多

值函数，可以通过附加条件的方法，使得在附加条件下，原来的对应法则就满足单值性的要求，从而确定了一个函数．称这样得到的函数为多值函数的单值分支．例如，对由方程 $x^2+y^2=a^2$ 给出的对应法则，如果附加"$y\geqslant 0$"的条件，就可得到一个单值分支：$y=\sqrt{a^2-x^2}$；如果附加"$y\leqslant 0$"的条件，就可得到另一个单值分支：$y=-\sqrt{a^2-x^2}$．

具体表示一个函数时，可以用表格法、图形法、解析法(即算式表示法)，有时也可用语言描述，这些是大家在中学里已熟悉的内容，这里就不再详细说明了．

下面举几个函数的例子，例中的定义域均指自然定义域．

例 2 (1) 常数函数 $y=3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{3\}$；

(2) 绝对值函数 $y=|x|$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$．

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x=0,\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{-1,0,1\}$．它的图形如图 3 所示．对任何 $x\in\mathbf{R}$，有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$ 或 $|x|=x\operatorname{sgn} x$．

例 4 取整函数

对任意的 $x\in\mathbf{R}$，用记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，从而得到定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数

$$y=[x],$$

称此函数为取整函数，$[x]$ 称为 x 的整数部分．例如 $\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$．

$y=[x]$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $\mathbf{Z}$．图 4 是它的图形．取整函数还可以表示成

$$y=[x]=n,\text{当 } x\in[n,n+1),\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

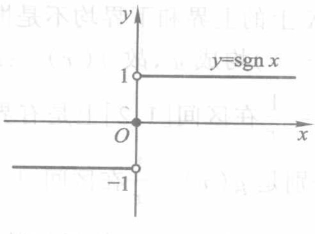

图 3

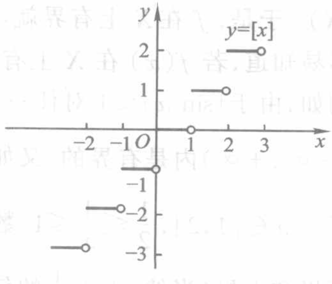

图 4

在例 3、例 4 中看到，有些函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的

算式表达,这种函数叫做分段函数.在科学技术和日常生活中,经常会遇到分段函数.分段函数在实际问题中是经常出现的.

例 5 某市出租车按如下规定收费:当行驶里程不超过 3 km 时,一律收起步费 10 元;当行驶里程超过 3 km 时,除起步费外,对超过 3 km 且不超过 10 km 的部分,按每千米 2 元计费,对超过 10 km 的部分,按每千米 3 元计费.试写出车费 C 与行驶里程 s 之间的函数关系.

解 以 $C=C(s)$ 表示这个函数,其中 s 的单位是 km,C 的单位是元.按上述规定,当 $0<s\leqslant 3$ 时,$C=10$;当 $3<s\leqslant 10$ 时,$C=10+2(s-3)=2s+4$;当 $s>10$ 时,$C=10+2(10-3)+3(s-10)=3s-6$.或写作

$$C(s)=\begin{cases}10 & \text{当 } 0<s\leqslant 3,\\ 2s+4 & \text{当 } 3<s\leqslant 10,\\ 3s-6 & \text{当 } s>10.\end{cases}$$

$C(s)$就是一个分段函数.

2. 函数的几种特性

有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在正数 M,使对任一 $x\in X$,都满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

就称函数 f 在 X 上有界(bounded).

如果这样的 M 不存在,就称 f 在 X 上无界.换言之,若对任意给定的一个正数 M(不论它多么大),总有某个 $x\in X$,使得 $|f(x)|>M$,那么称 f 在 X 上无界.

函数有界的定义也可以等价地表述为:如果存在常数 M_1 和 M_2,使得对任一 $x\in X$,都有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,就称 f 在 X 上有界,并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界和一个上界,通常把在 X 上全体有界函数所成之集记作 $B(X)$.于是,f 在 X 上有界就可表示为 $f\in B(X)$.

容易知道,若 $f(x)$ 在 X 上有界,则它在 X 上的上界和下界均不是惟一的.

例如,由于 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均成立,故 $f(x)=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.又如函数 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的,因为对任一 $x\in[1,2]$,$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1$.数 $\dfrac{1}{2}$ 和数 1 分别是 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上的一个下界和上界(当然,小于 $\dfrac{1}{2}$ 的任何数也是它的下界;大于 1 的任何数也是它的上界).但是 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内却是无界的.因为,尽管 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在