教材

经济管理学科数学配套丛书

# 微积分
# 典型题精解与习题详解

王春花　主编

- 知识结构
- 典型题型的解题方法及技巧
- 历年考研真题解析
- 习题及详解

WEIJIFENDIANXINGTIJINGJIEYUXITIXIANGJIE

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

经济管理学科数学配套丛书

# 微积分典型题精解与习题详解

王春花　主编

彭书英　朱新河　潘秀娟　编
马文兴　李庚雷　李长国



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 内容提要


本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习微积分课程的辅导书.内容包括:一元微积分,多元微积分,无穷级数,微分方程与差分方程.它是与《微积分》(第二版)(朱来义主编)配套的复习参考书.

本书总结归纳了各种典型题型,介绍了各种解题思路、解题方法和技巧,帮助读者把微积分中各种概念予以融会贯通,以提高学生的解题能力.本书选用的大部分例题都有一定的难度,其中一部分是近年硕士研究生入学考试试题.

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生在校学习和报考研究生时的必备读物,也可作为从事高等数学教学的教师和非数学专业的研究生参考.



**图书在版编目(CIP)数据**

微积分典型题精解与习题详解/王春花主编.—天津:天津大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5618-3091-8

Ⅰ.微… Ⅱ.王… Ⅲ.微积分-高等学校-解题 Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 125978 号

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 天津大学出版社 |
| 出版人 | 杨欢 |
| 地址 | 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072) |
| 电话 | 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742 |
| 网址 | www.tjup.com |
| 印刷 | 天津泰宇印务有限公司 |
| 经销 | 全国各地新华书店 |
| 开本 | 185mm×260mm |
| 印张 | 17 |
| 字数 | 425 千 |
| 版次 | 2009 年 8 月第 1 版 |
| 印次 | 2009 年 8 月第 1 次 |
| 印数 | 1—3 000 |
| 定价 | 30.00 元 |

# 前　言

“微积分”是当代大学生必修的一门公共基础课，它是进一步学好其他后续课程的基础．朱来义主编的《微积分》（第二版）是目前我国经济类专业学生用量最大的一本数学教材，习题量大且具有一定的难度，考虑到经济类与管理类学生和自学者学习“微积分”的需要，为了帮助他们学好微积分，给他们提供一份较好的考研复习资料，特编写了与《微积分》（第二版）（朱来义主编）配套的教学辅导书．在本书的编写过程中，从选材、理论推导、文字叙述等方面尽量适应经济类、管理类学生的特点，通过对各种典型题型的分析，介绍各种解题思路、解题方法和技巧，帮助读者把微积分中的各个概念予以融会贯通，提高分析解决问题的能力，掌握解题技巧．

每章包括以下内容．

一、知识结构

系统归纳了每一章的概念、定理、公式，并给出了一些常用的公式．

二、典型例题的解题方法及技巧

本书总结归纳了各章节的各种题型，并且针对各种题型，相应地给出了具体的解题思路和分析，同时还介绍了许多新的更简捷的解题方法．这些内容对提高解题能力有着很好的帮助．对于同一种题型，我们选择了比较典型的能反映教学要求的例题进行解析，并详细地给出了解题过程．除此之外，本书还积极地探索一个题目的多种解法，可以使读者对各个相关概念的相互关系有更深刻的理解，通过各种解法的比较，掌握用最简捷的方法去解决问题．

本书中所选用的大部分例题都有一定的难度，一部分是近年研究生入学考试试题，一部分是与各种题型相适应且具有代表性的典型例题．

三、历年考研真题解析

本书给出了近年来的研究生入学考试试题，同时给出了详细的解题过程，对于与试题相关的知识点以注的形式介绍给读者．

四、习题及详解

本书给出两套习题（A）与（B）及其参考答案．

本书由王春花主编，参加编写的有马文兴、潘秀娟、彭书英、李庚雷、朱新河、李长国．本书在编写过程中参考了众多的教材和辅导材料，在此谨向有关作者以及为本书做出贡献的同志们表示衷心的感谢．

由于时间仓促和编者水平所限，书中难免存有错误和不妥之处，欢迎广大读者批评指正．

编者

2009 年 5 月

# 目　　录

# 第1章　函　　数

## §1.1　知识结构

- 函数
  - 函数的定义
    - 求定义域
    - 求函数表达式
    - 求反函数
  - 函数的性质
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 函数的类型
    - 基本初等函数
    - 初等函数
    - 非初等函数
  - 函数的形式
    - 显函数
    - 隐函数
    - 复合函数
    - 参数方程确定的函数
    - 分段函数
  - 简单函数关系的建立
    - 总成本函数
    - 总收入函数
    - 总利润函数
    - 需求函数
    - 供给函数

## §1.2　典型题型的解题方法及技巧

### 一、有关函数的概念

**题型1　求函数的定义域**

【解题思路】　由解析式表示的函数，其定义域是使运算式子有意义的实自变量值的集合；根据实际问题建立的函数，其定义域是具有实际意义的实自变量值的集合.

**例1**　已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域.

**解**　要使函数 $f(x)$ 有意义，只需

$$\begin{cases}\lg(3-x)\neq 0\\ 3-x>0\\ 49-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow -7\leqslant x<2 \text{ 与 } 2<x<3,$$

即 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\cup(2,3)$.

**题型 2　判断函数的等价性**

【解题思路】 当且仅当两个函数的定义域和对应规则完全相同时，才表示同一函数，否则，不表示同一函数.

**例 2**　判断函数 $y=\log_2(x-2)+\log_2(x-3)$ 和 $y=\log_2(x-2)(x-3)$ 是否等价？

**解**　要使 $y=\log_2(x-2)+\log_2(x-3)$ 有意义，只需 $\begin{cases}x-2>0\\x-3>0\end{cases}\Rightarrow x>3$，

即定义域为 $(3,+\infty)$.

要使 $y=\log_2(x-2)(x-3)$ 有意义，只需 $(x-2)(x-3)>0\Rightarrow x>3$ 与 $x<2$，

即定义域为 $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.

因为两个函数的定义域不同，所以两个函数不等价.

**题型 3　利用函数的表示与用什么字母表示无关的特性求 $f(x)$ 的表达式**

【解题思路】 一种方法是所谓"凑法"，即将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式，然后用"无关特性"得出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是先作变量替换，再用"无关特性"，然后通过建立方程得出 $f(x)$ 的表达式.

**例 3**　设 $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x, 0<x<1$，求 $f(x)$.

**解**　
$$f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x=1-2\sin^2 x+\sec^2 x-1$$
$$=-2\sin^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=-2\sin^2 x+\frac{1}{1-\sin^2 x},$$

所以
$$f(x)=-2x+\frac{1}{1-x}, 0<x<1.$$

**例 4**　设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 $a,b,c$ 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

**解**　设 $t=\frac{1}{x}$，则 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$.

由"无关特性"有 $af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$.

解方程组
$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},\\af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\end{cases}$$

得
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

## 二、有关函数的性质

**题型 4　函数奇偶性的判别**

【解题思路】 判断函数奇偶性的方法如下：

①主要是根据奇偶性的定义，有时也运用其运算性质；

② $f(x)+f(-x)=0$ 是判断 $f(x)$ 为奇函数的有效方法；

③函数的奇偶性是对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

**例 5** 设 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$，其中 $a>0,a\neq 1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 $x,y$ 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，判断 $F(x)$ 的奇偶性.

**解** 因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，
所以令 $x=y=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0)$，$f(0)=0$.

令 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，
所以 $f(x)+f(-x)=0$，于是 $f(x)$ 为奇函数.

设 $g(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$，则

$$g(x)+g(-x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{a^x}{1-a^x}+1=0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

故 $F(x)=f(x)g(x)$ 为偶函数.

**题型 5　函数单调性的判别**

【解题思路】 若没有说明函数可导，则用定义判别；若说明函数可导，则用导数判别（见第 4 章）.

**例 6** 设 $f(x)=\frac{1+x}{x}$，$x>0$，判断 $f(x)$ 的单调性.

**解** $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1+x_2}{x_2}-\frac{1+x_1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0,$$

即 $\qquad f(x_2)<f(x_1)$，

所以 $\qquad f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

**题型 6　函数周期性的判别**

【解题思路】 利用周期函数的定义及其运算性质.

**例 7** 设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图像关于 $x=a$，$x=b$ 均对称 $(a<b)$，证明 $y=f(x)$ 是周期函数，并求其周期.

**解** 由已知 $f(x)=f(2a-x)$，$f(x)=f(2b-x)$，

$$\begin{aligned}f(x)&=f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]\\&=f[2(b-a)+x],\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是周期函数，周期 $T_0=2(b-a)$.

**题型 7　函数有界性的判别**

【解题思路】 判别函数有界性的方法如下：

①利用定义；

②闭区间上连续函数的有界性（见第 2 章）；

③有极限的数列必有界；

④当 $x\to x_0$ 时，有极限的函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域中必有界.

**例 8** 设 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，证明 $f(x)$ 有界.

**证明** 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$，所以 $0\leqslant f(x)<1$.

当 $x<0$ 时，$f(x)=-1+\frac{2}{e^{-2x}+1}$，所以 $-1<f(x)<0$.

综上，$-1<f(x)<1$，所以 $f(x)$ 有界.

## §1.3 习题及详解

**(A)**

1. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，在 $[0,2)$ 上，$f(x)=x^2$，求 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上的表达式.

**解** 当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=x^2$；

当 $2\leqslant x<4$ 时，$0\leqslant x-2<2$，$f(x)=f(x-2)=(x-2)^2$；

当 $4\leqslant x<6$ 时，$0\leqslant x-4<2$，$f(x)=f(x-4)=(x-4)^2$；

当 $x=6$ 时，$x-6=0$，$f(x)=f(x-6)=f(0)=0$.

$$\text{综上，}f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<2, \\ (x-2)^2, & 2\leqslant x<4, \\ (x-4)^2, & 4\leqslant x<6, \\ 0, & x=6. \end{cases}$$

2. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leqslant 0, \\ 2, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(x+1)$ 及 $f(x)+f(-x)$.

**解** $$f(x+1)=\begin{cases} (x+1)^2+2(x+1), & x+1\leqslant 0 \\ 2, & x+1>0 \end{cases}=\begin{cases} x^2+4x+3, & x\leqslant -1, \\ 2, & x>-1; \end{cases}$$

又 $$f(-x)=\begin{cases} (-x)^2+2(-x), & -x\leqslant 0 \\ 2, & -x>0 \end{cases}=\begin{cases} x^2-2x, & x\geqslant 0, \\ 2, & x<0, \end{cases}$$

所以 $$f(x)+f(-x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x^2+2x+2, & x<0. \end{cases}$$

3. 已知 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\varphi(x)$.

**解** $$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1},$$

所以 $$f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1},$$

$$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x,$$

因此 $$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x,\quad \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

4. 在下列各题中，求由给定函数复合而成的复合函数：

(1) $y=u^2, u=\ln v, v=\frac{x}{3}$；　　(2) $y=\sqrt{u}, u=e^x-1$；

(3) $y=\ln u, u=v^2+1, v=\tan x$；　(4) $y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=2x-1$.

**解**　(1) $y=\left(\ln\dfrac{x}{3}\right)^2,\quad x\in(0,+\infty)$；

(2) $y=\sqrt{e^x-1},\quad x\in(0,+\infty)$；

(3) $y=\ln(\tan^2 x+1), x\in\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$；

(4) $y=\sin\sqrt{2x-1},\quad x\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

5. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的：

(1) $y=\arccos\sqrt{x}$；　(2) $y=\ln\sin^2 x$；　(3) $y=x^x$；　(4) $y=\arctan e^{\sqrt{x}}$.

**解**　(1) $y=\arccos u, u=\sqrt{x}$；

(2) $y=\ln u, u=v^2, v=\sin x$；

(3) $y=x^x=e^{x\ln x}, y=e^u, u=x\ln x$；

(4) $y=\arctan u, u=e^v, v=\sqrt{x}$.

6. 以下各对函数 $f(u)$ 与 $u=g(x)$ 中，哪些可以复合构成复合函数 $f[g(x)]$？哪些不可复合？为什么？

(1) $f(u)=\arcsin(2+u), u=x^2$；　(2) $f(u)=\arccos u, u=\dfrac{x}{1+x^2}$；

(3) $f(u)=\sqrt{u}, u=\ln\dfrac{1}{1+x^2}$；　(4) $f(u)=\ln(1-u), u=\sin x$.

**解**　以下用 $D(f)$ 表示 $f(u)$ 的定义域，用 $R(g)$ 表示 $u=g(x)$ 的值域.

(1) $D(f)=[-3,-1], R(g)=[0,+\infty), D(f)\cap R(g)=\varnothing$.所以不能复合；

(2) $D(f)=[-1,1], R(g)=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right], D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，

所以能复合，$f(x)=\arccos\dfrac{x}{1+x^2}$；

(3) $D(f)=[0,+\infty), R(g)=(-\infty,0], D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，

所以能复合，$f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{1}{1+x^2}}$；

(4) $D(f)=(-\infty,1), R(g)=[-1,1], D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，

所以能复合，$f(x)=\ln(1-\sin x)$.

7. 某公司全年需购某商品 1 000 台，每台购进价为 4 000 元，分若干批进货.每批进货台数相同，一批商品售完后马上进下一批货，每进货一次需消耗费用 2 000 元，商品均匀投放市场(即平均年库存量为批量的一半)，该商品每年每台库存费为进货价的 4%.试将公司全年在该商品上的投资总额表示为每批进货量的函数.

**解**　设该商品的投资总额为 $y$ 元，每批进货量为 $x$ 台，则

$$y=2\,000\times\frac{1\,000}{x}+4\,000\times\frac{4}{100}\times\frac{x}{2}+4\,000\times1\,000$$

$$=\frac{2\times10^6}{x}+80x+4\times10^6.$$

**(B)**

1. 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,证明:

$$|f(x)|=f(x)\operatorname{sgn}[f(x)],$$

其中

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数.

**证明** 当 $f(x)<0$ 时,$|f(x)|=-f(x)$,$f(x)\operatorname{sgn}[f(x)]=f(x)\cdot(-1)=-f(x)$;

当 $f(x)=0$ 时,$|f(x)|=0$,$f(x)\operatorname{sgn}[f(x)]=0\cdot 0=0$;

当 $f(x)>0$ 时,$|f(x)|=f(x)$,$f(x)\operatorname{sgn}[f(x)]=f(x)\cdot 1=f(x)$.

综上,$|f(x)|=f(x)\operatorname{sgn}[f(x)]$.

2. 设 $f(x)$在$[-a,a](a>0)$上有定义,证明:$f(x)$等于一个奇函数与一个偶函数的和.

**证明** 设 $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,$G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$,

可证 $F(x)$为偶函数,$G(x)$为奇函数且 $f(x)=F(x)+G(x)$,故 $f(x)$等于一个奇函数与一个偶函数的和.

3. 求 $y=|x|+|x-1|-|4-2x|$的最大值与最小值.

**解** 当 $x<0$ 时,$y=-x+1-x-(4-2x)=-3$;

当 $0\leqslant x<1$ 时,$y=x+1-x-(4-2x)=2x-3$;

当 $1\leqslant x<2$ 时,$y=x+x-1-(4-2x)=4x-5$;

当 $x\geqslant 2$ 时,$y=x+x-1-(2x-4)=3$.

综上,$y$ 的最大值为 3,最小值为 $-3$.

4. (1)设 $f(x)$是$[0,+\infty)$上的单减函数,证明:对任何满足 $\lambda+\mu=1$ 的正数 $\lambda,\mu$ 及 $x\in[0,+\infty)$,有下列不等式成立:

$$f(x)\leqslant\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x).$$

(2)设$\dfrac{f(x)}{x}$是$[0,+\infty)$上的单减函数,证明:对任何满足 $\lambda+\mu=1$ 的正数 $\lambda,\mu$ 及 $x\in[0,+\infty)$,有下列不等式成立:

$$f(x)\leqslant f(\lambda x)+f(\mu x),$$

并由此证明:对任何正数 $a,b$,有下列不等式成立:

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

**证明** (1)由已知 $0\leqslant\lambda\leqslant 1,0\leqslant\mu\leqslant 1$,

$$\forall x\in[0,+\infty),x\geqslant\lambda x,x\geqslant\mu x.$$

因为 $f(x)$是$[0,+\infty)$上的单减函数,所以

$$f(x)\leqslant f(\lambda x),f(x)\leqslant f(\mu x),$$

$$\lambda f(x)\leqslant\lambda f(\lambda x),\mu f(x)\leqslant\mu f(\mu x).$$

两式相加,$\lambda f(x)+\mu f(x)\leqslant\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)$,

所以 $\quad f(x)\leqslant\lambda f(\lambda x)+\mu f(\mu x)$.

(2) $\forall x\in(0,+\infty)$，由(1)得

$$\frac{f(x)}{x}\leqslant\lambda\cdot\frac{f(\lambda x)}{\lambda x}+\mu\cdot\frac{f(\mu x)}{\mu x}=\frac{f(\lambda x)+f(\mu x)}{x},$$

所以 $\quad f(x)\leqslant f(\lambda x)+f(\mu x)$.

令 $x=a+b,\lambda=\dfrac{a}{a+b},\mu=\dfrac{b}{a+b}$，代入上式得

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

5. (1)设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有定义，证明：$y=f(x)$的图形关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是 $f(x)$满足 $f(x+1)=f(1-x),x\in\mathbf{R}$.

(2)设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=1$ 与直线 $x=2$ 对称，证明：$f(x)$是周期函数，并求 $f(x)$的一个正周期.

**证明** (1)"$\Rightarrow$" $\forall x\in\mathbf{R}$，由已知，$f(x)=f(2-x)$，

所以 $\quad f(x+1)=f(2-(x+1))=f(1-x)$.

"$\Leftarrow$"由已知，$\forall x\in\mathbf{R},f(x+1)=f(1-x)$，

设 $t=x+1$，则 $f(t)=f(1-(t-1))=f(2-t)$.

所以 $\forall x\in\mathbf{R},f(x)=f(2-x)$，

即 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=1$ 对称.

(2)$y=f(x)$的图形关于直线 $x=1$ 与直线 $x=2$ 对称的充要条件是 $\forall x\in\mathbf{R}$，

$$f(x)=f(2-x)=f(4-x),$$

所以 $\quad f(x+2)=f(4-(x+2))=f(2-x)=f(x)$，

因此 $\quad f(x)$是周期函数，周期 $T_0=2$.

6. 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义，证明：$F(x)=\dfrac{[f(x)]^2}{1+[f(x)]^4}$是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

**证明** $\quad |F(x)|=\dfrac{[f(x)]^2}{1+[f(x)]^4}\leqslant\dfrac{[f(x)]^2}{2[f(x)]^2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $F(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

# 第 2 章　极限与连续

## § 2.1　知识结构

- 极限与连续
  - 定义
    - 数列极限
      - $\varepsilon-N$ 定义
      - 收敛数列的性质
    - 函数极限
      - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$　($\varepsilon-\delta$ 定义)
      - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$　($\varepsilon-X$ 定义)
      - 左右极限
      - 极限存在的充要条件
  - 存在准则
    - 单调有界必有极限
    - 夹逼准则
  - 无穷小与无穷大
    - 定义
    - 性质
    - 比较
      - 高阶无穷小
      - 等价无穷小
      - 同阶无穷小
  - 连续与间断
    - 定义
    - 间断点的分类
    - 性质

## § 2.2　典型题型的解题方法及技巧

**一、求数列极限**

**题型 1　当 $n\to\infty$ 时，$n$ 项和的极限的求解**

【解题思路】　当 $n\to\infty$ 时，$n$ 项和的极限的求解方法主要有：

①利用特殊级数求和（如等差数列求和，等比数列求和）简化数列，从而简化为易求极限形式；

②利用夹逼定理，具体解法是：对 $n$ 项和进行适当的缩小和放大，并保证缩小和放大后的两个数列极限相等；

③利用定积分的定义（见第 6 章）．

**例 1**　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

**解** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$;

(3)因为$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 2** 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{1}{n^2-n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+n}\right)$.

**解** 设 $x_n=\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{2}{n^2-n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+n}$,则

$$\frac{1}{n^2-n+n}+\frac{2}{n^2-n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{2}{n^2-n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+1},$$

即
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2-n+n}\leqslant x_n\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2-n+1},$$

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+n)}\leqslant x_n\leqslant\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+1)}.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2-n+1)}=\frac{1}{2}$,

由夹逼定理,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

错解:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{2}{n^2-n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2-n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2-n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2-n+1}\\&\qquad=0+0+\cdots+0=0.\end{aligned}$$

因为数列极限的四则运算法则只适用于有限个数列的情形.

**题型 2 当 $n\to\infty$时,求 $n$ 项积的极限**

【解题思路】 一种方法是分子分母同乘以一个因子,使之出现连锁反应;另外一种方法是通过分解因式使之成为两因子乘积形式,在整个相乘过程中中间项相抵消,从而简化为易求极限形式.

**例 3** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$,其中$|x|<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

**解** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$;

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

因为$|x|<1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$,

故原式$=\dfrac{1}{1-x}$.

(3)因为$\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$,

又 $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k+1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$,$\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{n^2+n+1}{3}$,

故原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{3}\right]=\dfrac{2}{3}$.

**题型3 已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限**

【解题思路】 先判断极限的存在性(单调性和有界性),可用数学归纳法和不等式的放缩法;再令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,解关于$a$的方程,从而求得极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**例4** 求下列极限:

(1)设$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$,其中$a>0,x_0>0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;

(2)设$x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**解** (1)由已知$x_n>0,n=1,2,\cdots$,

$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{a}=\sqrt{a},n=1,2,\cdots$,即$\{x_n\}$有下界,

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{a}\right)=1,n=0,1,2,\cdots$,即$x_{n+1}<x_n$,所以$\{x_n\}$单调递减,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$为$l$,由保号性知$l\geqslant0$.

由$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$,两端同时取极限得$l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{a}{l}\right)$,解得$l=\sqrt{a}$(负的舍去).

(2) 由已知$x_n>0,n=1,2,\cdots$,以下用数学归纳法证明$\{x_n\}$单调递增.

$x_2-x_1=\left(1+\dfrac{x_1}{1+x_1}\right)-1=\dfrac{x_1}{1+x_1}>0$,即$x_2>x_1$.

假设 $x_n > x_{n-1}$，

则 $x_{n+1} - x_n = \left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right) - \left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0$，即 $x_{n+1} > x_n$，

所以$\{x_n\}$单调递增.

又 $x_n = 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} < 2, n=1,2,\cdots$，

所以$\{x_n\}$有上界，

因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 为 $a$，由保号性知 $a \geqslant 0$，

$x_n = 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$两端同时取极限得 $a = 1+\frac{a}{1+a}$，解得 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（负的已舍去）.

**二、求函数极限**

结合本章内容，以下重点讨论$\frac{0}{0}$未定型和 $1^\infty$ 未定型的求解. 其中对于$\frac{0}{0}$未定型的求解，关键是消去分子分母中的零因子.

**题型 4　用因式分解或分子分母有理化求极限**

**例 5**　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{n\to -1} \frac{x+2}{x-3} = -\frac{1}{4}$；

(2) $\lim\limits_{n\to 5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5} = \lim\limits_{n\to 5} \frac{5-x}{(x-5)(1+\sqrt{x-4})} = \lim\limits_{n\to 5} \frac{-1}{1+\sqrt{x-4}} = -\frac{1}{2}$.

**题型 5　用等价无穷小代换求极限**

**例 6**　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{3x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^3\ln(1+x)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$.

**解**　(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^3\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)^2}{x^3 \cdot x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{1}{2}(2x)^2\right]^2}{x^4} = 2$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\frac{x^4}{x^4} = 2$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x\sin x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{x^2} = 1$.

注：用等价无穷小代换简化极限过程时，一定要注意只能对因子进行代换，否则可能会出