2010年 全国硕士研究生入学考试辅导用书

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程

数学分册（理工类）

清华大学 黄艳萍
北京大学 孙 璇 主编
首都师范大学 童 武

本辅导教程随书赠送 DVD光盘

内容主要包括：考研辅导名师——童武教授的讲课视频

本教程题型强化练习的全部详细解答过程

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

名校·名师·经典·精辟

全国硕士研究生入学考试辅导用书

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程

数学分册(理工类)

清华大学　黄艳萍

北京大学　孙　璇　主编

首都师范大学　童　武

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程　数学分册(理工类)/黄艳萍,孙璇,童武主编. —上海:复旦大学出版社,2009.8
2010年全国硕士研究生入学考试辅导用书
ISBN 978-7-309-06571-8

Ⅰ.2…　Ⅱ.①黄…②孙…③童…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第045346号

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程　数学分册(理工类)
黄艳萍　孙　璇　童　武　主编

出版发行　复旦大学出版社　上海市国权路579号　邮编200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com

责任编辑　梁　玲
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　上海浦东北联印刷厂
开　　本　787×1092　1/16
印　　张　29.5
字　　数　774千
版　　次　2009年8月第一版第一次印刷
印　　数　1—5 100

书　　号　ISBN 978-7-309-06571-8/G·820
定　　价　49.00元

FOREWORD 前言

为了指导参加2010年全国硕士研究生入学考试的广大考生数学考试的复习，根据最新考试大纲的要求，我们组织部分多年来参加考试大纲制定和修订工作及参加考前辅导的教授、专家编写了这本《2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程：数学分册(理工类)》，以供广大考生复习使用.

研究生入学考试是选拔性考试，当然重在考查考生的能力高低.能力是建立在基础之上的，基本功不扎实，一切无从谈起.从考试大纲来看，要求考生对基本知识、基本概念的掌握理解要深、要透、要准，尽管大学期间的期中期末考试基本反映了这一要求，但从程度上讲，远没有考研的要求高.相信大家都有同感，通过大学的期末考试其实不难，甚至基本概念不太清晰，知识点掌握不够通透，也有可能取得较不错的成绩.这是由于大学考试有其固定套路，即便考查相同的知识点，其题目的迷惑性、技巧性都远逊于研究生入学考试的题目.因此，狠抓基础是一项必要的工作，虽然很多考生可能会认为基础的东西学起来有点费力不讨好，短期收效不明显，但笔者再三强调，不可轻视基础，必须夯实到理解得入木三分的程度.

德国大数学家高斯曾说过："数学是科学的皇后."毫无疑问，数学是对人类思维能力要求最高的学科，它不仅范围广、内容多，而且深刻体现出了人类的聪明才智所能达到的

最高境界.全国硕士研究生入学考试数学一科是考查考生的数学功底、思维能力,并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力——包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验.因此要考好数学,思维能力必须有质的飞跃.数学科目的考试范围基本上是高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计这三大块,经济类考生的数学试卷还涉及一些经济数学的知识.无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的教学大纲.自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的《数学考试大纲》所规定的考试内容和考试要求来进行的.大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据.考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便有的放矢.大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力.同时要注意,不光应分析研究本年最新的大纲,还要研究去年乃至前年的大纲,从比较中发现其变化.

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料.其中的每一道试题,既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势.因此,对照考试大纲分析、研究这些试题,考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌,而且可以方便地了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出各部分内容的重点、难点,以及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,从而从容应考,轻取高分.

编者　于北大燕园

CONTENTS 目录

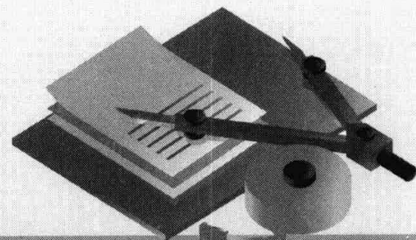
第一部分 高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

2010年全国硕士研究生入学考试辅导教程

第一部分



高等数学

第 1 章

函数、极限与连续

大纲基本要求

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题中的函数关系.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及图形,了解初等函数的概念.

(5) 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

基本知识讲解

§1 函　　数

一、基本概念

1. 函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x \in D$,变量 x 按照一定法则总有唯一确定的 y 值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫作这个函数的**定义域**,x 叫作**自变量**,y 叫作**因变量**.

当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

确定一个函数的**两要素**:定义域和对应法则.

注　当且仅当两个函数的**定义域**和**对应法则**完全相同时,才表示同一函数.

2. 反函数

定义 2　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W. 如果对于值域 W 中的任一 y 值,从关

系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注 (1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合；$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ **对称**.

(2) 只有一一对应的函数才有反函数.

(3) 虽然 $y=f(x)$ 是单值函数，反函数 $x=\varphi(y)$ 却不一定是单值的. 只有 $y=f(x)$ 不仅单值而且是严格单调的，其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 W 上是单值的.

3. 基本初等函数

基本初等函数共有以下六个，其性质和图形必须牢记.

(1) 常数函数：$y(x)=c$.

(2) 幂函数：$y=x^a$（a 为常数）.

(3) 指数函数：$y=a^x$（a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$）.

(4) 对数函数：$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$），定义域 $(0,+\infty)$，它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

(5) 三角函数：

正弦函数：$y=\sin x\ (-\infty<x<+\infty)$.

余弦函数：$y=\cos x\ (-\infty<x<+\infty)$.

正切函数：$y=\tan x, D=\left\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$.

余切函数：$y=\cot x, D=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\}$.

正割函数：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, D=\left\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$.

余割函数：$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}, D=\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\}$.

(6) 反三角函数：

反正弦函数：$y=\arcsin x, x\in[-1,1]$，值域 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数：$y=\arccos x, x\in[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$.

反正切函数：$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$.

4. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，$D=\{x \mid x\in D_\varphi$ 且 $\varphi(x)\in D_f\}\neq\varnothing$，则当 $x\in D$ 时，由 $y=f(\varphi(x))$ 确定的函数称为 f 与 φ 的**复合函数**，而 u 称为**中间变量**.

5. 初等函数

基本初等函数及其复合函数，以及由这些函数的四则运算组成的函数称为**初等函数**.

6. 其他常见函数

(1) 双曲函数：

双曲正弦函数：$\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，奇函数.

双曲余弦函数：$\operatorname{ch} x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，定义域$(-\infty,+\infty)$，偶函数.

双曲正切函数：$\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$，定义域$(-\infty,+\infty)$，奇函数.

(2) 符号函数：$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3) 取整函数：$y=[x]$，y 是 x 的最大整数部分.

(4) 狄利克雷函数：$y=f(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$

注 符号函数、取整函数与狄利克雷函数都是分段函数，一般分段函数不是初等函数.

二、函数的基本特性

1. 有界性

定义 4 若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I\subset D$，都有 $|f(x)|\leqslant M(f(x)\leqslant M$ 或 $f(x)\geqslant -M)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**(有**上界**或**下界**)；若不存在这样的 $M>0$，则称 $f(x)$在区间 I 上**无界**.

注 无穷大与无界函数的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$为无穷大，则 $f(x)$一定无界；若 $f(x)$在某个区间上无界，则 $f(x)$不一定是无穷大.

2. 单调性

定义 5 若对于任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)上**单调增加**；若对于任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间(a,b)上**单调减少**.

注 不是所有函数都有单调性，例如狄利克雷函数就没有单调性.

3. 函数的奇偶性

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点**对称**(即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$为**奇函数**.

注 (1) 奇函数图形关于原点对称，偶函数图形关于 y 轴对称.

(2) 奇函数满足 $f(x)+f(-x)=0$.

(3) 定义域一定要对称.

(4) 奇函数或偶函数运算具有以下结论：

奇函数 $\pm$ 奇函数 $=$ 奇函数；偶函数 $\pm$ 偶函数 $=$ 偶函数；

奇函数 $\times(\div)$ 奇函数 $=$ 偶函数；偶函数 $\times(\div)$ 偶函数 $=$ 偶函数；

奇函数 $\times(\div)$ 偶函数 $=$ 奇函数.

4. 周期性

定义 7 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

注 (1) 若 T 是 $f(x)$的周期，则 $\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax+b)$ 的周期$(a>0)$；若 T_i 是 $f_i(x)$ 的周期

$(i=1,2,\cdots,n)$,则 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的最小公倍数 T 是 $f_i(x)$及 $f_i(x)$经初等运算所得函数的公共周期.

(2) 常见的周期函数：$\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期 $T=2\pi$;$\tan x$, $\cot x$, $|\sin x|$, $|\cos x|$ 的周期 $T=\pi$.

§2 极 限

一、基本概念

1. 数列的极限

定义 1 如果数列$\{x_n\}$与常数 a 有下列关系：对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$ 的**极限**,或者称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\ (n\to\infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是**发散**的.

注 (1) ε 既是任意的,又是给定的;

(2) N 根据给定的 ε 找出, $N=N(\varepsilon)$;

(3) N 不唯一.

2. 函数的极限

(1) 当 $x\to x_0$ 时函数的极限.

定义 2 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0).$$

注 定义中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$,所以 $x\to x_0$ 时,$f(x)$有没有极限与 $f(x)$在点 x_0 是否有定义并无关系.

(2) 自变量趋于无穷大时函数的极限.

定义 3 设函数 $f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义.如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在着正数 X,使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty).$$

3. 左、右极限

定义 4(左极限) 在上述 $x\to x_0$ 时函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义 2 中,把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$,那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

定义 5(右极限) 在上述 $x\to x_0$ 时函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义 2 中,把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$,那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**,记作