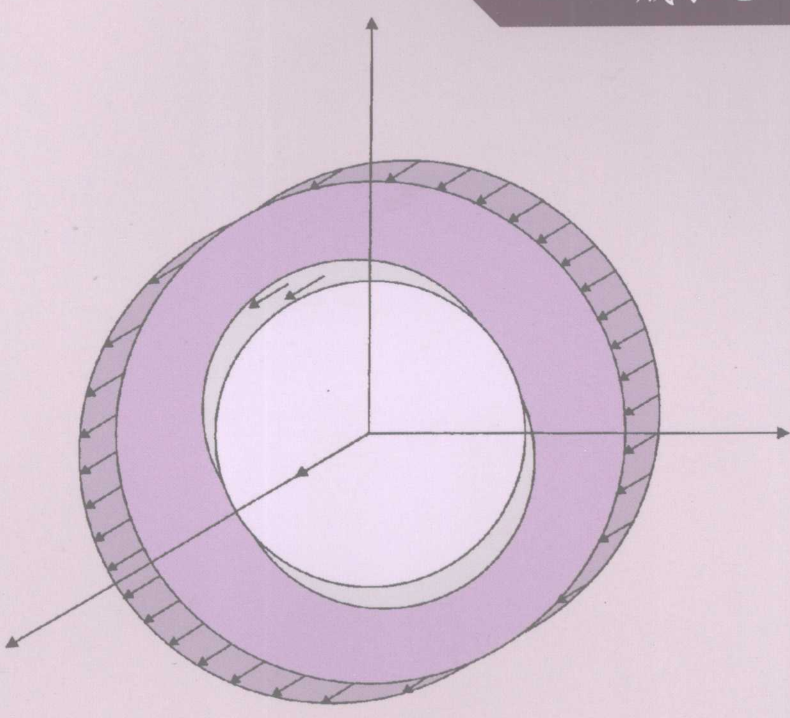
弹塑性理论的动力学问题

〔俄〕Е.И. 舍米亚金 著
戚承志 译



科学出版社
www.sciencep.com

弹塑性理论的动力学问题

〔俄〕Е. И. 舍米亚金　著

戚承志　译

陈剑杰　初校

钱七虎　终校

科学出版社

北京

图字:01-2008-5102 号

内 容 简 介

本书共11章,内容包括弹性动力学问题的提法、均匀各向同性弹性体的动力学方程的研究、斯托克斯问题、弹性动力学问题中的不完全分离变量法、弹性动力学问题的函数不变量解方法、非理想弹性介质动力学边值问题、杆中的弹塑性波及拉赫马图林卸载波理论、固体中波传播的一维问题、固体中的应力波、在与弹性半空间接触的液体层中非平稳扰动的传播、在不可压缩的弹塑性介质中气体空腔的膨胀。

本书可供岩土工程、矿业工程、防护工程、地下工程、地球物理学、固体力学等专业的师生、科研工作者及工程师学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性理论的动力学问题/(俄罗斯)舍米亚金(Shemyakin, E. I.)著;戚承志译. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-024849-7

Ⅰ. 弹… Ⅱ. ①舍…②戚… Ⅲ. ①弹性力学②塑性力学 Ⅳ. 034

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 103623 号

责任编辑:牛宇锋 张 丽/责任校对:刘亚琦

责任印制:赵 博/封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009年6月第一次印刷 印张:9 3/4

印数:1—2 500 字数:181 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

E. И. 舍米亚金院士简介

20 世纪 80 年代照

E. И. 舍米亚金（E. I. Shemyakin）院士，1929 年 12 月 9 日生于苏联新西伯利亚学系的力学专业，1955 年在列宁格勒大学获得副博士学位。他的老师包括 B. И. 斯米尔诺夫院士、C. Л. 索伯列夫院士、B. B. 诺沃日罗夫院士、Л. M. 卡恰诺夫教授等世界著名的力学数学家，他后来的科技活动深受这些著名学者的影响。

在 1955 年获得副博士学位之后，他的科技活动主要与 Г. И. 马尔丘克院士及 C. A. 赫利斯季昂诺维奇院士有关。他的主要工作经历如下：

1955～1960 年在莫斯科苏联科学院化学物理研究所工作；

1960～1970 年在苏联科学院西伯利亚分院理论及应用力学研究所任岩石力学研究室主任；

1962 年获得技术科学博士学位，同时在新西伯利亚大学力学数学系连续介质力学教研室任主任；

1970 年任苏联科学院西伯利亚分院矿业研究所副所长，1971～1987 年任所长，期间于 1976 年当选为苏联科学院通讯院士，1984 年当选为苏联科学院院士；

1979～1989 年任《苏联矿业科技》学报主编；

1980～1986 年任苏联科学院西伯利亚分院副院长；

1987～1992 年任苏联最高学位委员会主席；

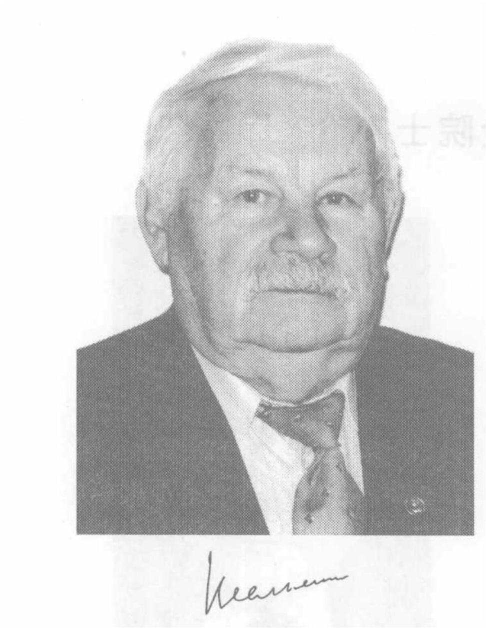
1991 年应邀到莫斯科国立大学力学数学系波动及气动力学教研室任主任。

E. И. 舍米亚金院士主要的科技团体任职为：

1982～1986 年任国际岩石力学学会副主席；

1994 年任俄罗斯岩石力学学会主席。

E. И. 舍米亚金院士的研究成果得到了国际学术界的认可，于 1992 年当选为捷克科学院院士，1993 年成为瑞典皇家工程师协会成员。



2006 年照

E. И. 舍米亚金院士是俄罗斯杰出的力学家，他的研究工作主要包括固体的不可逆变形与破坏(包括岩石在爆炸及冲击作用下固体的变形与破坏)，爆炸作用数学模型的建立。他的主要的研究方法为理论分析方法、数值分析方法、原形材料及等效材料试验方法。

E. И. 舍米亚金院士研究了固体塑性变形破坏的基本理论，得到了许多原创性的成果。他研究了强烈地下爆炸时应力波的传播及地震动效应，确定了应力波传播的近似渐进规律，并得到了实验的证实；研究了位于弹性半空间上面的水体中大爆炸产生的非定常波在水中的传播问题，以及水在弹性半空间界面上表面波的传播问题，并得到了实际应用；1995 年提出了桶状金刚石矿的形成假说，他认为桶状金刚石矿的形成与陨石高速冲击地面并侵彻有关，并给出了相应的数学模型；研究了旋转星体的变形，利用了实验中观测到的差异位移的概念给出了若干假说：在太阳及月亮的引力作用下地球内部物质的运移假说，木星对于太阳活性的影响假说及地磁场的起源假说等。

E. И. 舍米亚金院士的上述工作反映在他的 270 多篇文章及 6 部著作上。

中 译 本 序

《弹塑性理论的动力学问题》一书的内容为俄罗斯杰出的力学家、优秀的科技活动组织者、俄罗斯科学院院士 E. И. 舍米亚金教授五十多年研究成果的一部分。他在岩石力学及固体力学领域做出了许多开创性的研究工作，他的研究领域包括介质的黏性及塑性理论、爆炸及冲击作用下材料的动力变形及破坏、岩石力学等。他与其学生 B. C. 尼基夫洛夫斯基 1979 年合著的《固体的动力破碎》的中译本在 1985 年已经在我国出版。

E. И. 舍米亚金院士毕业于列宁格勒大学数学力学系的力学专业，他不仅具有深厚的理论功底，而且所研究内容与实际工程应用密切相关。他概念清晰，能够把复杂的现象进行合理的简化，常在复杂、严密的理论推导之后得到非常简洁的结果。该书中他的一些研究成果，如具有内摩擦介质的短波理论、地下爆炸对地面运动的影响等，都反映了这一特点。

E. И. 舍米亚金院士对我国非常友好，应本人邀请，他曾经两次到我国讲学及参加学术会议，与我国的同行进行了学术交流。他对我国有深厚的感情，致力于中俄科技、文化交流合作的发展。他为推动中俄有关单位在岩体力学及冲击动力学方面的合作研究作出了贡献。遗憾的是他于 2009 年 2 月 17 日逝世，没有看到该书的中译本的出版。

该书是作为教科书及科学研究用书出版的，前半部分阐述了理想弹性介质的动力学理论，后半部分讲述了作者原创性的研究成果，主要是关于地下爆炸时波的传播理论，主要有短波理论、应力波在具有内摩擦的介质中的衰减理论、卸载波对于衰减等方面的影响等。

目前在岩土动力学领域数值分析方法非常流行，但理论研究还继续保持着其不可替代的基础性角色，因为理论研究深刻地揭示了岩土的变形破坏与材料特性及外部作用之间的关系。相信这本理论与实践相结合的书的出版将会对我国岩土工程、矿业工程、防护工程、地下工程、地球物理学、固体力学等专业的教师、科研工作者及工程师提供非常有益的参考，同时，这也算是对 E. И. 舍米亚金院士的一种追念。

钱七虎

二〇〇八年三月

第二版前言

本书就其内容来讲可以说是变形体力学及岩石力学领域杰出的力学家、俄罗斯科学院院士 E. И. 舍米亚金教授五十多年的科研活动所得。

本书的第一版距今已有四十多年。本书的新版不仅可以作为教科书，也可以作为科研用书，因此作者对本书做了相应的修改：删除了弹性理论的数值方法、波的散射问题等章节，补充了卸载波等方面的内容。与传统的卸载波问题的提法不同，本书在卸载波问题上研究了空间波的卸载问题，对解的结果进行了很大的修正。

根据当前对岩体的认识，对岩体来讲最为重要的因素是岩体的块系结构，即岩体具有结构面，而位移的间断主要集中于块体或者块体组之间的边界上。目前岩体块系结构的概念已经在地球物理学家及矿山工程师中得到了普遍认同。在地质构造力及技术成因力作用下，岩体变形的主要因素是结构面的摩擦力及膨胀效应。作者对这些因素给予了特别的关注，并且有充分的理由认为，在重力作用下岩体的位移及观测到的变形可以通过考虑摩擦力及膨胀效应来定量地评价。这样就确认了岩体变形的一种新的概念：在外力作用下块体结构产生或者得到了发展，而岩体的变形总的来讲主要源于块体之间的相互滑动及块体之间的适应性转动，此时岩体外观上保持了连续性。当然这样的岩体模型与地球物理学家及矿山工作者在研究岩体的快速动力过程时所习惯的弹性模型具有很大的不同。

奉献给读者的本书的上述特点应该使其在地球物理、岩石力学和矿业工程领域的专家及高等学校的物理数学类专业的研究生和大学生中受到欢迎。

作者对数理科学副博士 T. E. 萨芳诺娃在本书手稿的整理过程中提供的帮助表示感谢。

第一版前言

固体中各种振动及波动过程由连续介质的动力学方程组及弹性、非线性弹性、弹塑性本构关系来描述。这些过程是本书的研究对象，而本书是作者为新西伯利亚大学的高年级学生开设的。本书的内容局限于研究大体积固体中的波动过程的基本规律，因此没有研究结构单元(梁、板和壳)的振动问题。同时对于大尺度物体及梁、板、壳来讲共有的一系列问题在本书的总体框架内做了注释。

在本书的一些章节中研究了爆炸波在固体中的传播问题。问题的解不仅能够给出理论研究的物理意义，也能够在选择所研究问题的数学模型方面提供帮助。

为了能够理解本书的内容，读者必须具备新西伯利亚大学教学计划所安排的《数学物理方程》教程及《弹塑性理论》普通教程的基本知识。本书讲述的内容及次序与作者在 1966～1967 年讲授的弹塑性理论动力问题教程的内容及次序完全一致。

目　　录

第一章　弹性动力学问题的提法

1.1　用位移表示的弹性动力学基本方程 标量势与矢量势

首先研究均匀各向同性的弹性体动力学方程的各种表达方式[1,2]。

假设对于连续介质体元有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

式中：X、Y、Z 为笛卡儿坐标 x、y、z 方向的体力分量；t 为时间；ρ 为介质的密度。

而应力与应变(为位移 u、v、w 的导数)的联系由胡克定律给出

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\lambda\varepsilon+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\ \sigma_y&=\lambda\varepsilon+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\\ \sigma_z&=\lambda\varepsilon+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\\ \tau_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \tau_{xz}&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ \tau_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ \varepsilon&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

式中：λ、μ 为拉梅(Lamé)常数。

利用式(1.2)可以从式(1.1)中消去应力分量。这样得到 3 个位移分量 u、v、w 对于坐标 x、y、z 及时间 t 的二阶微分方程组，即

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\mu\Delta u+X-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\mu\Delta v+Y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}+\mu\Delta w+Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

即

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})+\mu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}$$

又

$$\Delta\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})-\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{u})$$

故

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})-\mu\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{F}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}$$

这一方程组被称作拉梅方程，可以表示成不同的形式，它是本书前半部分主要的研究对象。

值得注意的是，根据问题的初始及边界条件的不同，我们有时会寻求由应力表达的弹性动力学式(1.1)的解。当然此时对于式(1.1)在一般情况下还要补充 6 个贝特拉米-米切尔方程(由应力表达的变形相容条件)。通常利用式(1.3)求解。

现在给出式(1.3)的辅助形式之一，这种形式经常在弹性动力学问题中得到应用[1]。位移向量 $\boldsymbol{u}(u, v, w)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\varphi+\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi}\tag{1.4}$$

式中：$\varphi(x, y, z, t)$为位移场的标量势；$\boldsymbol{\psi}\{\psi_x, \psi_y, \psi_z\}$为位移场的矢量势。

必须指出的是，我们用 4 个函数 φ、ψ_x、ψ_y、ψ_z 来取代了 3 个待求函数 u、v、w。由此我们得到这样的结论：在用势函数来表示位移时我们具有自由。

在没有体力的情况下，由式(1.3)得到下列势函数 φ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 的 3 个波动方程：

$$\Delta\varphi=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad \Delta\boldsymbol{\psi}=b^2\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2},\quad \boldsymbol{F}=\{X, Y, Z\}=0\tag{1.5}$$

式中：$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普拉斯算子；参数 a 和 b 分别为纵波及横波传播速度的倒数

$$a=\sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}=\frac{1}{V_p},\quad b=\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}=\frac{1}{V_s}\tag{1.6}$$

在推导式(1.5)时需要把式(1.3)写为

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})-\mu\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{u})+\boldsymbol{F}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\tag{1.3*}$$

由式(1.4)得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \Delta\varphi, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi})$$

因此

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) = \mathrm{grad}(\Delta\varphi), \quad \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{u}) = -\mathrm{rot}(\Delta\boldsymbol{\psi})$$

现在证明式(1.4)及式(1.5)给出式(1.3)的通解。

把式(1.4)代入到式(1.3*)中得到

$$\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\right](\mathrm{grad}\varphi) = \left(-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\mathrm{rot}\right)(\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi})$$

对于矢量势 $\boldsymbol{\psi}$ 及标量势 φ 我们得到

$$\mathrm{grad}\left[\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\Delta\varphi\right] = -\mathrm{rot}\left(\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \mu\Delta\boldsymbol{\psi}\right)$$

上式右边部分为无散矢量，而左边为有势矢量，两个部分既没有旋度，也没有散度，它们都为可表示为谐函数梯度的拉普拉斯矢量。

由此可知，式(1.5)以拉普拉斯矢量的精度来讲是正确的。如果我们选择了满足波动方程的标量势函数 φ，那么对于矢量势 $\boldsymbol{\psi}$ 来讲，应该满足式(1.5)的第二式。

在存在体力的情况下，类似的表示方法也是正确的，只不过此时必须把体力表示为标量势和矢量势的和，这是可以做到的。

在一般的教科书中，以速度 V_p 及 V_s 传播的两种体波的存在是以式(1.3)的基本性质来证明的。我们简短地从式(1.3)出发，回顾一下这一推导过程，此处假定体力为零[4]。

把式(1.3)的第一个方程对于 x 微分，第二个方程对于 y 微分，而第三个方程对于 z 微分，然后相加得

$$(\lambda+2\mu)\Delta\varepsilon = \rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

由此可以得到以下结论：在介质中可以有速度为 V_p 的波[见式(1.6)]。如果在式(1.3)中设 $\varepsilon = 0$，那么由式(1.3)可以得到 3 个方程，即

$$\mu\Delta u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \mu\Delta v = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \mu\Delta w = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.8}$$

由这些方程可以看出，在介质中有传播速度为 V_s [见式(1.6)]的波。对于这些波来讲，没有体积变化，$\varepsilon = 0$。

由所得到的结果可以看出，在弹性动力学理论中基本的研究对象为式(1.7)及式(1.8)或者式(1.5)[1,3,4]。我们在一般的弹性理论和数学物理方程教程中遇到了这类的方程，并熟悉了描述扰动的传播——波的波动方程解的基本性质。

例如，对于一维波动方程(平面情况)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

或者球对称情况的波动方程(r 为径向坐标)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

借助下列达朗贝尔积分研究扰动的传播过程

$$\varphi(x,\ t) = \Phi_1\left(x - \frac{t}{a}\right) + \Phi_2\left(x + \frac{t}{a}\right) \tag{1.11}$$

式中：Φ_1、Φ_2 为所示变量的两次可微函数。

在 $ax - t = \text{const}$ 时扰动——波是沿着 x 的正方向传播的(在 t 增大时)；而在 $ax + t = \text{const}$ 时波向相反的方向传播。式(1.9)的这一通解可以帮助我们研究式(1.10)所描述的球对称波的性质

$$r\psi(r,\ t) = \Psi_1\left(r - \frac{t}{a}\right) + \Psi_2\left(r + \frac{t}{a}\right) \tag{1.12}$$

式中：$\Psi_1\left(r - \frac{t}{a}\right)$ 项描述所谓的发散波；$\Psi_2\left(r + \frac{t}{a}\right)$ 项描述汇聚波。

在图 1.1 中，$(x,\ t)$ 坐标给出了一维波的传播过程。

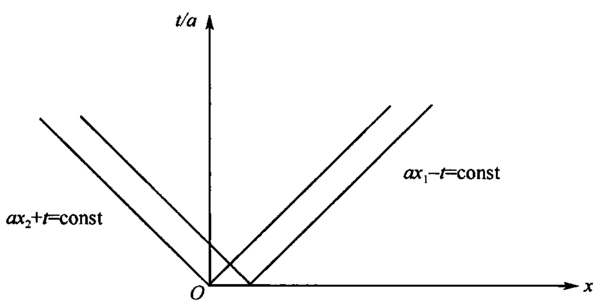


图 1.1 在相平面上波的特征线

由此可以看到，如果在初始时刻 $t = 0$ 给出了函数 $\varphi(x,\ 0)$ 的某一值，那么这一函数值为扰动的原因，这一扰动在 $t > 0$ 时在 x_1 和 x_2 点附近能够观察到。就是式(1.9) 的这一特点，即描述以有限速度传播的扰动——波，反映在方程的称谓上——波动方程。

我们再来看一下另外一个术语——波阵面。我们通过球面波来阐述这一概念。根据扰动传播速度的有限性可以很自然地引入波阵面的概念：如果在坐标为 r 的空间点无扰动，而在 $t = 0$ 时刻在坐标原点(或者在半径为 $r = r_0$ 的球面)输入扰动[给予式(1.12)中的 Ψ_1 函数有限值或者无限值]，那么很自然在 $t = (r - r_0)/a$ 时刻会出现扰动。在所研究的点 r 上扰动出现的初始时刻就是波阵面的到来时刻。考虑到在 r_0 点扰动作用时间的有限，可以引入前波阵面及后波阵面

的概念(见图 1.2)。

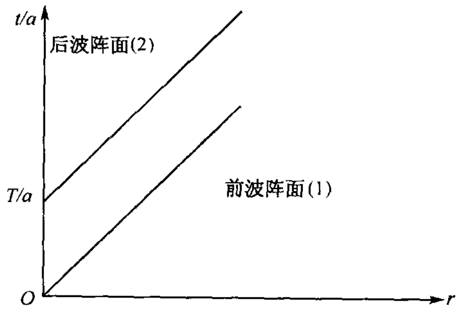


图 1.2　前波阵面(1)及后波阵面(2)

应该指出的是，在空间线辐射的情况下(扰动是在无限长的线上，或者是无限长的半径为 $r = r_0$ 的圆柱上给出)，后波阵面没有。这种情况从物理方面讲很自然，在数学物理方程教程中也是众所周知的。在数学物理方程教程中还讨论了具有 $2n+1$ 及 $2n$(n 一整数) 个空间变量(时间为单独的变量)的双曲型方程的解的性质[4]。

1.2　柯西问题及弹性动力学边值问题

在一般的弹性动力学教程中都给出了基本的边界条件类型，这些边界条件对应着弹性动力学理论基本的边值(极限)问题。在动力学过程问题中还应该补充初始条件。这些初始条件可以由位移向量给出，例如

$$\boldsymbol{u}\big|_{t=t_0} = \boldsymbol{u}_0(x,\ y,\ z),\quad \left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \boldsymbol{u}_1(x,\ y,\ z) \tag{1.13}$$

在一般的弹性动力学理论教程中都证明了弹性动力学基本边值问题解的唯一性定理(假定解存在且边界及初始条件中的函数为光滑的)。

现在给出对于实际应用及科学研究来讲非常重要的式(1.3)的柯西问题。柯西问题为具有初始条件的问题(无边界条件)，换一句话讲式(1.3)的柯西问题为无限弹性介质的初始条件问题。在弹性空间中，或者在其一部分中给予了式(1.13)的初始条件，要求构造及研究式(1.3) 在 $t > t_0$ 时的解。从物理学的角度来讲，我们已经“知道”这一解：在弹性介质中将会有速度为 V_p 和 V_s 的波传播。这些波由在 $t = t_0$ 时刻赋予位移函数 $\boldsymbol{u}_0(x,\ y,\ z)$ 和速度 $\boldsymbol{u}_1(x,\ y,\ z)$ 的空间部分辐射出，其余的空间部分此时的位移和速度为零。稍后我们将返回来研究这一问题，而现在我们把注意力集中在利用弹性位移及标量势 $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$ 和矢量势 $\boldsymbol{\psi}(x,\ y,\ z,\ t)$ 来推导建立基本的边值问题。

由一般的弹性动力学教程可知，第一类边界问题可以按照下列方式构建。设弹性介质占有空间的某一部分 D，D 由光滑的表面 S 限定，表面 S 上给出了应力，在 D 区域给出了描述体力的函数 X、Y、Z。要求找出式(1.3) 满足式(1.13) 的初始条件及边界 S 上的条件的解，而且这一解要具有给定的光滑性。这一光滑性，正如前面所指出的那样，是由所要求的边界及初始条件的光滑性(包括这些条件的相容性)所决定的。

进入到问题边界条件中去的表面应力分量由应力张量分量及表面 S 的外表面方向余弦 $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ 来表示。

$$\left.\begin{aligned} T_{nx} &= \sigma_x\cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y) + \tau_{xz}\cos(n, z) \\ T_{ny} &= \tau_{xy}\cos(n, x) + \sigma_y\cos(n, y) + \tau_{yz}\cos(n, z) \\ T_{nz} &= \tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, z) + \sigma_z\cos(n, z) \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

表面 S 的法线已知，因为表面 S 已经给定，以及在 $t \geqslant t_0$ 时刻边界条件相对于表面 S 变形前给出的，这样对于 $z \geqslant 0$ 的弹性半空间我们有

$$\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0, \quad \cos(n, z) = -1$$

由式(1.14) 得

$$T_{nx} = -\tau_{xz}, \quad T_{ny} = -\tau_{yz}, \quad T_{nz} = -\sigma_z \tag{1.15}$$

即在弹性半空间表面应该给出法向应力 $T_{nz} = T_{zz}$ 及两个剪应力 T_{nx}、T_{ny}。

上面已经指出在寻找第一类边界问题的解时可以有两种途经：①把边界条件式(1.14)转化成用位移表示的条件，其中要把应力用其胡克定律表达式(1.2)来代替[5]；②对于动力学式(1.1)补充以贝特拉米-米切尔关系，把初始条件式(1.13)用应力表示——即把问题完全用应力来表示。作为一个例子现在按照第一种途径给出式(1.15)类型的边界条件。

$$\left.\begin{aligned} -T_{nx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -T_{ny} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -T_{zz} &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

这样第一类边界问题可以完全用位移来表示：找出式(1.3)在初始条件式(1.13)及边界条件式(1.16)下的解，并假定函数 $\boldsymbol{u}_0(x, y, z)$、$\boldsymbol{u}_1(x, y, z)$ 及 $T_{zx}(x, y, 0, t)$、$T_{zy}(x, y, 0, t)$、$T_{zz}(x, y, 0, t)$ 光滑。

第二类边值问题的提法，这种方法要求从位移形式(或者应力形式)转换成标量势及矢量势，也即从式(1.3)转换成式(1.5)。显而易见对于式(1.5)构建问题时必须把初始条件及边界条件都表示成势函数的函数。初始条件式(1.13)具有下列形式：

$$\varphi\big|_{t=t_0}=\varphi_0(x,y,z),\quad \boldsymbol{\psi}\big|_{t=t_0}=\boldsymbol{\psi}_0(x,y,z) \tag{1.17}$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\varphi_1(x,y,z),\quad \left.\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\boldsymbol{\psi}_1(x,y,z)$$

式中：φ_0、φ_1 及 $\boldsymbol{\psi}_0$、$\boldsymbol{\psi}_1$ 由式(1.4)与 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{u}_1$ 相连。式(1.4)在 $t\geqslant t_0$ 时成立。

在用势函数来构建第一类边界问题的边界条件时必须把式(1.14)中的应力按照式(1.2)用变形(位移的导数)来替代，然后按照式(1.4)位移转换成势函数的导数，或者按照式(1.18)把位移转换成势函数的导数。

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\\ v&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}\\ w&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

式中：ψ_x、ψ_y、ψ_z 为矢量势函数的分量。

按照对于式(1.4)的标注，在一般情况下可以让矢量势的一个分量，或者 φ、ψ_x、ψ_y、ψ_z 函数的某种组合为零。通常这一情况在解具体问题时用得到，这时可以利用这种任意性来构建问题(如对称性的考虑)及简化计算。

研究弹性半空间第一类边界问题的边界条件式(1.16)作为一个例子，考虑到这种任意性可以设 $\psi_z=0$。

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\mu}T_{zx}&=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y\partial z}\\ -\frac{1}{\mu}T_{zy}&=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\\ -\frac{1}{\mu}T_{zz}&=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y\partial z}\right)\\ &\quad+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

按照势函数的术语，第一类边界问题可以这样提出：找出满足式(1.17)的初始条件及边界条件式(1.19)的式(1.5)的解。

应该注意到边界条件式(1.19)的复杂形式，它为弹性介质表面三个已知函数给出的势函数的二阶导数的组合。这种情况使得适用于单独考察的波动方程的解的建造方法难以应用于式(1.15)的求解。这种情况尤其出现在具有角的区域中的问题及散射问题等中，这些问题在后面将会阐述。

在给定位移时边界问题的提法(第二类边界问题)及基本的混合问题的提法的详细叙述在此没有意义。所有的关于这些问题的提法及用势函数来表示方面的信息可以类似于第一类边界问题给出。