商丘师范学院学术著作资助计划项目

# 不确定性数学方法及其应用

王庆东 著

BUQUEDINGXING SHUXUE FANGFAJIQI YINGYONG

兵器工业出版社

商丘师范学院学术著作资助计划项目

# 不确定性数学方法及其应用

王庆东　著

兵器工業出版社

## 内 容 简 介

随着计算机技术的普及和发展，不确定数学方法正在不断发展和完善，在社会、经济等领域发挥越来越重要的作用，本书是作者在学习研究有关理论的基础上，对不确定性数学方法及其应用进行的总结。全书共分5章，第1章为模糊集合基本理论，第2章为模糊聚类与综合评判，第3章为变权决策，第4章为属性数学，第5章为灰色关联分析与灰色评估。本书主要探讨模糊数学、属性数学、灰色系统理论在管理尤其是教学管理中的应用，其目的是尝试将不确定性数学方法引入教学管理，提高管理的科学性。

**图书在版编目（CIP）数据**

不确定性数学方法及其应用/王庆东著．—北京：兵器工业出版社，2008.5

ISBN 978-7-80248-042-1

Ⅰ．不…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学方法—研究　Ⅳ．01-0

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第066620号

出版发行：兵器工业出版社
发行电话：010-68962596，68962591
邮　　编：100089
社　　址：北京市海淀区车道沟10号
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市登峰印刷厂
版　　次：2008年5月第1版第1次印刷

责任编辑：王　强
封面设计：李　晖
责任校对：郭　芳
责任印制：赵春云
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：13
字　　数：317千字
定　　价：33.00元

# 前　　言

研究不确定性现象的数学方法称为不确定性数学方法。不确定性数学方法是一种新兴的研究不确定性现象的交叉型数学方法，层次分析、综合评价、聚类分析等问题都可以应用不确定性数学方法得到客观、实用、合理的解决。最常用的不确定性数学方法包括模糊数学、属性数学方法和灰色系统理论等内容。本书主要探讨模糊数学、属性数学、灰色系统理论在管理尤其是教育、教学管理中的应用，其目的是尝试将不确定性数学方法引入教育、教学管理，提高管理的科学性。

目前，国内外关于不确定性数学方法的学术著作很多，本书是作者在学习研究有关理论的基础上，对不确定性数学方法及其应用进行的总结。全书共分 5 章。第 1 章为模糊集合基本理论。本章系统介绍模糊集合、隶属函数、模糊集合的运算，讨论模糊集合的四种形式的截集与两种不同形式的集合套和四种晕集，推广了现有理论，并从不同方面刻画模糊集合三大理论问题——分解定理、表现定理和扩展原理。第 2 章为模糊聚类与综合评判。本章系统介绍模糊关系、模糊矩阵、模糊变换，并利用它们研究模糊聚类分析与综合评判。第 3 章为变权决策。本章系统介绍因素空间理论及变权原理，并应用于教学质量管理的变权决策。第 4 章为属性数学。本章系统介绍属性数学的基本理论，介绍了属性集合、属性、属性集概念及其它们的运算，属性测度函数及其建立方法，属性识别理论模型以及与层次分析法的区别与联系，属性数学与模糊数学的区别与联系等，并给出了应用实例。第 5 章为灰色关联分析与灰色评估。本章主要介绍灰色系统理论的基本概念以及灰色关联分析、灰色评估、灰色多层次综合评价的数学方法，给出了应用实例，并对灰色多层次综合评价与模糊综合评判进行比较。

在本书的撰写过程中，笔者参考了相关的学术著作，在此，谨向这些著作的作者表示衷心的感谢！

感谢商丘师范学院副院长蒋志民教授，数学系主任薛明志教授，计算机科学系主任张庆政教授，教务处处长陈向炜教授，科研处处长王明泉教授对笔者的关心和支持。感谢于增海教授对笔者的培养和指导，尤其是于教授不论工作多么繁忙，带领我们不分工作日、节假日，风雨无阻地坚持开展模糊数学讨论班活动，使笔者在学术上和敬业精神方面受益匪浅，在教学与为人方面不断进步。感谢参加讨论班的梁洪亮教授、侯海军教授、赵树理副教授、乔保民副教授、郭志林副教授对笔者的热情帮助，感谢梁俊奇教授、刘孝书教授长期以来的关心和爱护以及所有关心、支持本书出版的专家、学者、领导和朋友们！

由于作者的知识和水平有限，书中难免有错误与资料引用不当之处，敬请读者批评指正。

作　者

2007 年 5 月

于商丘师范学院数学系

# 目　　录

# 第 1 章　模糊集合基本理论

## 1.1　预备知识

### 1.1.1　集合

1. 集合及其表示

具有某种特性的一类对象的全体叫集合，通常用大写的英文字母 $A$，$B$ 等来表示．集合中的每个个体叫元素，通常用小写的英文字母 $a$，$b$ 等来表示．如果元素 $a$ 在集合 $A$ 中，则称 $a$ 属于 $A$，记作 $a \in A$，否则记为 $a \notin A$；不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 把所讨论对象的全体叫做论域，论域也是一个集合．

集合表示形式主要有三种：

（1）列举法：把集合中所有元素一一列举出来；

（2）描述法：把集合中元素的特征用语言或式子表述出来；

（3）文氏图法：用图形把集合元素表述出来．

集合具有元素的确定性、元素的无序性和元素的互异性．

2. 集合之间的关系

**定义 1.1.1**　如果集合 $A$ 中的每个元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的子集或 $A$ 包含于 $B$（记作 $A \subseteq B$），或称 $B$ 包含 $A$（记作 $B \supseteq A$）．如果 $A$ 不是 $B$ 的子集，记作 $A \not\subset B$.

由定义可知：

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B),$$
$$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \text{ 且 } x \notin B).$$

**定义 1.1.2**　如果 $A$ 与 $B$ 由完全相同的元素组成，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A = B$.

由相等定义可知

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B) \text{或} (A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A).$$

包含关系具有下列性质：

（1）$\varnothing \subseteq A$；

（2）$A \subseteq A$（自反性）；

（3）$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$（传递性）；

（4）$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$（反对称性）．

设 $U$ 为论域，$U$ 的全体子集组成的集合记为 $P(U)$.

**定义 1.1.3**　以集合 $A$ 的所有子集为元素，组成的集合称为集合 $A$ 的幂集，记

为$P(A)$ .

3. 集合的运算

**定义 1.1.4** $U$为论域，$A$，$B\in P(U)$，规定$A\cup B\triangleq\{x|x\in A\vee x\in B\}$，称集合$A\cup B$为$A$，$B$的并集；规定$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$，称集合$A\cap B$为$A$，$B$的交集；规定$A-B\triangleq\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$，称集合$A-B$为$A$，$B$的差集；$A^c\triangleq\{x|x\in U\wedge x\notin A\}$，称集合$A^c$为$A$的补集.

集合运算具有下列性质：

设$A$，$B$，$C\in P(U)$，$U$为论域，则有

(1) 幂等律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(5) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(6) 0-1律 $A\cap U=A,A\cup U=U,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup\varnothing=A$;

(7) 复原律 $(A^c)^c=A$;

(8) 补余律 $A\cup A^c=U,A\cap A^c=\varnothing$;

(9) 对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

4. 集合的直积

设$A$，$B\in P(U)$，称$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$为集合$A$，$B$的直积.

### 1.1.2 映射

1. 映射的概念

**定义 1.1.5** 设$M$，$M'\in P(U)$，集合$M$到集合$M'$的对应法则$\sigma$：$M\to M'$称为集合$M$到集合$M'$一个映射，如果对任意的$a\in M$，存在唯一的$a'\in M'$，使$a'$与$a$相对应，这时把$a'$叫做元素$a$的象，而$a$叫做元素$a'$的原象（或逆象）.

对于映射，集合$M$中的每一元素，要求在$M'$中必须有元素而且仅有一个元素与它对应，换言之，每一元素都有唯一的原象；但不同的元素的象可以相同，也可以不同．集合$M'$中的元素，并不要求在$M$中必须有原象，即使有原象，原象也未必唯一．集合$M$，$M'$可以是不同的集合，也可以是相同的集合，若$M=M'$，称映射为变换．集合$M$，$M'$的两个映射$\sigma$，$\tau$相等指的是对任意的$x\in M$，$\sigma(x)=\tau(x)$.

2. 映射运算

**定义 1.1.6** 设$\sigma$，$\tau$分别是$M$到$M'$和$M$到$M''$的映射，$\sigma$，$\tau$的乘积指的是$M$到$M''$的映射记作$\tau\circ\sigma$(简记为$\tau\sigma$)，它满足$(\tau\sigma)(a)=\tau[\sigma(a)]$.

映射的乘法不一定满足交换律与消去率．但是映射的乘法满足结合律．映射与单位变换的乘积仍是该映射，即

$$1_{M'}\sigma=\sigma 1_M=\sigma$$

对于集合上的变换我们利用映射的乘积定义映射的方幂，并且有

$$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n},\qquad(\sigma^m)^n=\sigma^{mn}.$$

3. 映射的性质

用 $\sigma(M)$ 表示 $M$ 在映射 $\sigma$ 象的全体的集合．

若 $\sigma(M)=M'$，称 $\sigma$ 是满射（或称映上的映射）．若在映射 $\sigma$ 下，$M$ 中不同元素的象不同，则称 $\sigma$ 是单射（或一一的映射）．既是满射又是单射的映射称为双射（或一一对应）．

对两个有限集合来说，显然存在双射的充分必要条件是这两个集合元素个数相同．双射 $\sigma$ 存在逆对应，这个逆对应是 $M'$ 到 $M$ 的一个映射，我们称之为 $\sigma$ 的逆映射，记为 $\sigma^{-1}$. 显然 $\sigma^{-1}$ 是个双射，并且 $\sigma^{-1}\sigma=1_M,\sigma\sigma^{-1}=1_{M'}$. 若 $\sigma$ 是集合 $M$ 上的变化，则是 $\sigma^{-1}\sigma=\sigma\sigma^{-1}=1_M$.

**定理 1.1.1**　令 $\sigma$ 是集合 $M$ 到 $M'$ 的映射，那么以下两个条件等价：

（1）$\sigma$ 是一个双射；

（2）存在集合 $M$ 到 $M'$ 唯一的一个映射 $\tau$，使得

$$\tau\sigma=1_M,\ \sigma\tau=1_{M'}.$$

4. 代数运算

**定义 1.1.7**　设 $A\in P(U)$ 且 $A\neq\varnothing$，$A\times A$ 到 $A$ 的映射∘称为 $A$ 的一个代数运算．

5. 集合的映射表示

**定义 1.1.8**　设 $A\in P(U)$，论域 $U$ 到 $U$ 的具有下列性质的映射 $\mu_A$ 称为集合 $A$ 的特征函数：

$$\mu_A(u)=\begin{cases}1, u\in A,\\0, u\notin A.\end{cases}$$

由定义可知，集合由集合的特征函数唯一确定，因此总可以把集合与特征函数看成统一的.

明显的有下列关系：

（1）$(A=U)\Leftrightarrow(\mu_A(u)=1,\forall u\in U),(A=\varnothing)\Leftrightarrow(\mu_A(u)=0,\forall u\in U)$；

（2）$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(\mu_A(u)=\mu_A(u),\forall u\in U)$；

（3）$\mu_{A\cup B}(u)=\mu_A(u)\vee\mu_B(u),\mu_{A\cap B}(u)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(u),\mu_{A^c}(u)=1-\mu_A(u)$.

6. 映射扩展原理

**定义 1.1.9**　设 $X$，$Y\in P(U)$，称映射

$$f:X\to P(Y),u\mapsto f(u)=B\in P(Y).$$

为 $X$ 到 $Y$ 的点集映射；称映射

$$T:P(X)\to P(Y),A\mapsto T(A).$$

为 $X$ 到 $Y$ 的集变换．

**定义 1.1.10**　（扩展原理）　设映射

$f:X\to Y,x\mapsto f(x)=y,\forall A\in P(X)$，令

$$f(A)=\{y\in Y\mid y=f(x),x\in A\}.$$

则称集合 $f(A)\in P(Y)$ 为集合 $A$ 在映射 $f$ 下的象；$\forall B\in P(Y)$，令

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$$

则称集合 $f^{-1}(B)\in P(Y)$ 为集合 $B$ 在映射 $f$ 下的逆象．于是由集合到集合的映射 $f:X\to Y,x\mapsto f(x)=y$ 诱导出由幂集到幂集的映射

$$f:P(X)\to P(Y),A\mapsto f(A)\in P(Y)$$
$$f^{-1}:P(Y)\to P(X),B\mapsto f^{-1}(B)\in P(X)$$

如果用集合特征函数描述扩展原理，就是

$$\mu_{f(A)}(y)=\bigvee_{f(x)=y}\mu_A(x),\mu_{f^{-1}(B)}(x)=\mu_B(f(x))$$

扩展原理显然有如下性质：

（1）$A_1\subseteq A_2\Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$；

（2）$B_1\subseteq B_2\Rightarrow f(B_1)\subseteq f(B_2)$；

（3）$f(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}f(A_t)$；

（4）$f(\bigcap_{t\in T}A_t)\subseteq\bigcap_{t\in T}f(A_t)$（当 $f$ 为单射时等号成立）；

（5）$f^{-1}(\bigcup_{t\in T}B_t)=\bigcup_{t\in T}f^{-1}(B_t)$；

（6）$f^{-1}(\bigcap_{t\in T}B_t)=\bigcap_{t\in T}f^{-1}(B_t)$；

（7）$f(A)(y)=\bigvee_{f(x)=y}A(x)$；

（8）$f^{-1}(B)(x)=B(f(x))$.

### 1.1.3 关系

1. 二元关系及其矩阵表示

**定义 1.1.11** 设 $X$，$Y\in P(U)$，$X\times Y$ 的子集 $R$ 称为从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的二元关系，如果 $X=Y$，则称 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系．二元关系简称关系．

如果 $(x,y)\in R$，则称元素 $x$ 与 $y$ 有关系，记作 $xRy$；如果 $(x,y)\notin R$，则称 $xy$ 不具有关系，记作 $x\overline{R}y$.

关系 $R$ 本质是一个二元集合，因此关系也可以用特征函数表示：

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1,xRy,\\0,x\overline{R}y.\end{cases}$$

**定义 1.1.12** 设 $R$ 为集合 $X$ 上的关系

（1）如果 $\forall x\in X$，有 $xRx$，即 $\mu_R(x,y)=1$，则称 $R$ 是自反关系．

（2）如果 $\forall x$，$y\in X$，且 $xRy\Leftrightarrow yRx$，即

$$\mu_R(x,y)=1\Leftrightarrow\mu_R(y,x)=1.$$

则称 $R$ 是对称关系．

（3）如果 $\forall x$，$y$，$z\in X$，且由 $xRy$，$yRz$ 能够得到 $xRz$，即

$$\mu_R(x,y)=1,\mu_R(y,z)=1\Rightarrow\mu_R(x,z)=1.$$

则称 $R$ 是传递关系.

(4) 具有自反性与对称性的关系称为相似关系，具有传递性的相似关系称为等价关系.

对于两个有限集合间的二元关系我们可以用矩阵描述:

**定义 1.1.13** 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, $R$ 是它们之间的关系，令

$$r_{ij}=\mu_R(x_i,y_j)=\begin{cases}1, x_iRy_j,\\ 0, x_i\overline{R}y_j.\end{cases}$$

则称 $m\times n$ 矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$ 为关系 $R$ 的关系矩阵.

显然二元关系与其关系矩阵是相互唯一确定的，因此本章中的关系与关系矩阵都用 $R$, $S$ 表示.

2. 关系的合成

**定义 1.1.14** 设 $R$ 是 $X$ 到 $Y$ 的关系，$S$ 是 $Y$ 到 $Z$ 的关系，则称 $R\circ S$ 为它们的合成，其中

$$R\circ S=\{(x,z)\mid \exists y\in Y, s.t. (x,y)\in R,(y,z)\in S\}.$$

其特征函数为

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}[\mu_R(x,y)\wedge\mu_S(y,z)].$$

如果 $X$, $Y$, $Z$ 都是有限集合，关系 $R$, $S$ 的矩阵分别为 $R=(r_{ik})_{mn}$ 与 $S=(s_{kj})_{np}$，则 $R$, $S$ 的合成 $R\circ S$ 的矩阵为 $R\circ S=(c_{ij})_{mp}$，其中 $c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$.

3. 集合的划分

**定义 1.1.15** 设 $R$ 是集合 $X$ 的相似关系，$x\in X$，则称集合

$$[x]_R=\{y\mid xRy, y\in X\}$$

为由相似关系 $R$ 产生的 $x$ 的相似类.

显然 $X=\cup[x]_R$，但 $[x]_R\neq[y]_R$ 时，$[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$. 即集合的相似关系不能决定集合的一种分类.

**定义 1.1.16** 设 $R$ 是集合 $X$ 等价关系，$x\in X$，则称集合

$$[x]_R=\{y\mid xRy, y\in X\}$$

为由等价关系 $R$ 产生的 $x$ 的相似类.

显然 $X=\cup[x]_R$，并且 $[x]_R\neq[y]_R$ 时，$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$，因此集合的等价关系能够决定集合的一种分类. 同样地，集合的任意一种分类可以确定集合上的一个等价关系.

### 1.1.4 格与代数系统

1. 格的概念

**定义 1.1.17** 设 $U$ 是论域，$L\in P(U)$，$\leqslant$ 是集合 $X$ 上的一个关系，如果 $\leqslant$ 满足

(1) 自反性 $a\leqslant a$, $\forall a\in L$;

(2) 反对称性 若 $\forall\alpha$, $\beta\in L$, $\alpha\leqslant\beta$, $\beta\leqslant\alpha$, 则 $\alpha=\beta$;

(3) 传递性 若 $\forall\alpha$, $\beta$, $\gamma\in L$, $\alpha\leqslant\beta$, $\beta\leqslant\gamma$, 则 $\alpha\leqslant\gamma$.

则称$\leqslant$是集合$L$的一个偏序，$(L,\ \leqslant)$则为一个偏序集．如果偏序集$(L,\ \leqslant)$还满足

(4) 可比较性：　$\forall \alpha,\ \beta \in L$，有$\alpha \leqslant \beta$或$\beta \leqslant \alpha$．

$(L,\ \leqslant)$则为一个全序集（或线性有序集）．

显然，实数域$R$上的$\leqslant$是一个全序，$(R,\ \leqslant)$是一个全序集；$(P(U),\ \subseteq)$是一个偏序集，但不是全序集．

**定义 1.1.18**　设$(L,\ \leqslant)$是一个偏序集，$A \subseteq L$，若$\forall \alpha \in A$，均有$\alpha \leqslant \gamma$，则称$\gamma$是$A$的上界，上界中最小的元素叫做$A$的上确界，记作$\sup\{\alpha \mid \alpha \in A\}$；若$\forall \alpha \in A$，均有$\gamma \leqslant \alpha$，则称$\gamma$是$A$的下界，下界中最大的元素叫做$A$的下确界，记作$\inf\{\alpha \mid \alpha \in A\}$．

**定义 1.1.19**　设$(L,\ \leqslant)$是一个偏序集，如果$\forall \alpha,\ \beta \in L$，

$$\sup\{\alpha,\ \beta\},\ \inf\{\alpha,\ \beta\}$$

均存在，则称偏序集$(L,\ \leqslant)$是一个格．

**定理 1.1.2**　设$(L,\ \leqslant)$为格，在格中定义代数运算$\vee$与$\wedge$如下

$$\alpha \vee \beta \triangleq \sup\{\alpha,\beta\},\alpha \wedge \beta \triangleq \inf\{\alpha,\beta\}.$$

则代数系统$(L,\ \vee,\ \wedge)$满足：

$L.1)$ 幂等律　$\alpha \vee \alpha = \alpha, \alpha \wedge \alpha = \alpha$；

$L.2)$ 交换律　$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$；

$L.3)$ 结合律　$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$；

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$；

$L.4)$ 吸收律　$(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha = \alpha, (\alpha \vee \beta) \wedge \alpha = \alpha$．

**定理 1.1.3**　如果代数系统$(L,\ \vee,\ \wedge)$满足交换律、结合律、吸收律，则一定存在一个格$(L,\ \leqslant)$，其诱导的代数系统就是$(L,\ \vee,\ \wedge)$，并且满足

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta = \alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \beta = \beta.$$

定理 1.1.2、1.1.3 说明格$(L,\ \leqslant)$与它诱导的代数系统总是相伴出现的，可以相互确定，因此我们可以给出格的另一种形式的定义．

**定义 1.1.20**　设$(L,\ \vee,\ \wedge)$是一个代数系统，如果代数运算$\vee$，$\wedge$满足交换律、结合律与吸收律，则称该代数系统为一个格．

2. 布尔代数

**定义 1.1.21**　设代数系统$(L,\ \vee,\ \wedge)$是个格，如果它满足

$L.5)$ 分配律　$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$，

$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma = (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$．

则称格$(L,\ \vee,\ \wedge)$是一个分配格．

如果分配格$(L,\ \vee,\ \wedge)$满足：

$L.6)$ 在$L$中存在两个元素分别记为 0 与 1，满足

$$\alpha \vee 0 = \alpha, \alpha \wedge 0 = 0, \alpha \vee 1 = 1, \alpha \wedge 1 = \alpha,$$

则称$(L,\ \vee,\ \wedge)$中有最大元与最小元．

在$(L,\ \vee,\ \wedge)$中如果定义一个一元运算“$c$”，称为余运算，满足

$L.7$）复原律　$(\alpha^c)^c=\alpha$;

$L.8$）补余律　$\alpha\vee\alpha^c=1,\alpha\wedge\alpha^c=0.$

则称（$L$，$\vee$，$\wedge$，$c$）是一个布尔代数．

3. 软代数

**定义 1.1.22**　设（$L$，$\vee$，$\wedge$）是一个有最大元与最小元的分配格，并且定义的余运算 $c$ 满足复原律与 $L.9$）对偶律：

$$(\alpha\vee\beta)^c=\alpha^c\wedge\beta^c(\alpha\wedge\beta)^c=\alpha^c\vee\beta^c,$$

则称（$L$，$\vee$，$\wedge$，$c$）是一个软代数．

显然布尔代数是一个软代数，但软代数未必是布尔代数．

**定义 1.1.23**　如果代数系统（$L$，$\vee$，$\wedge$，$c$）是个软代数，并且满足：

$L.10$）如果满足 $\forall A\subseteq L$，$\sup\{\alpha\mid\alpha\in A\}$ 存在，则称（$L$，$\vee$，$\wedge$，$c$）为完备的软代数；

$L.11$）如果 $\forall\alpha$，$\alpha_i\in L$，

$$\alpha\wedge(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)=\bigvee_{t\in T}(\alpha\wedge\alpha_t),\alpha\vee(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)=\bigwedge_{t\in T}(\alpha\vee\alpha_t),$$

则称（$L$，$\vee$，$\wedge$，$c$）为无限可分配的软代数；

$L.12$）如果 $\forall\alpha<\beta$，存在 $\gamma$，使 $\alpha<\gamma<\beta$，则称（$L$，$\vee$，$\wedge$，$c$）为稠密的软代数．

稠密的、完备的并且无限可分配的软代数，称为优软代数．

**定理 1.1.4**　（$[0,1]$，$\vee$，$\wedge$，$c$）为优软代数．

**定理 1.1.5**　在$([0,1],\vee,\wedge,c)$中，$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)^c=\bigwedge_{t\in T}\alpha_t^c,(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)^v=\bigvee_{t\in T}\alpha_t^c$ 成立．

## 1.2　模糊集合

模糊现象是客观世界的客观现象．人们在实践中形成的许多概念都是模糊的概念，模糊概念来源于模糊现象．这些概念的外延往往是不清晰的，具有亦此亦彼性．例如教师教学水平优良、学生综合素质较高等．可以说，任何概念，模糊、不确定是绝对的，精确、清晰是相对的，精确、清晰仅仅是对模糊不确定的一种抽象与简化．然而，随着科学研究不断深入，特别是控制理论、决策理论与知识表示与挖掘的发展，模糊性与精确性矛盾日益突出．1965 年，美国控制论专家扎德（L. A. Zadel）教授发表了关于模糊集合的开创性论文，由此创立了模糊集合与模糊数学理论．40 多年模糊系统理论发展充分证明，模糊系统理论具有强大的生命力，为解决模糊性与精确性矛盾提供了有效的途径，是解决复杂大系统问题、多因素决策问题、工业控制与调度问题的有力工具．本章介绍模糊集合的基本概念与运算法则，研究模糊集合的代数结构与基本定理．

### 1.2.1　模糊集合的基本概念

**定义 1.2.1**　设 $U$ 是论域，$\mu_A:U\to[0,1],u\mapsto\mu_A(u)$是 $U$ 到单位区间 $[0,1]$ 的映射，则称映射 $\mu_A$ 确定了论域 $U$ 上的一个模糊子集 $A$，简称模糊集．映射 $\mu_A$ 称为模糊集合 $A$ 的隶属函数，$\mu_A$（$u$）称为元素 $u\in U$ 属于模糊集合的隶属度．

论域 $U$ 上全体模糊集合所组成的集合记为 $F(U)$.

**注 1.2.1** 从定义可以看出，对任意 $u\in U$，$\mu_A(u)$ 越接近于 1，元素 $u$ 属于 $A$ 的可能性越大；反之，$\mu_A(u)$ 越接近于 0，元素 $u$ 属于 $A$ 的可能性越小．当 $\mu_A(u)=0.5$，元素 $u$ 属于 $A$ 的模糊程度最高，即最不确定．

**注 1.2.2** 模糊集合是经典集合推广，经典集合特征函数就是模糊集合的隶属函数取值为 1 或 0 的特殊情形．

**注 1.2.3** 为方便行文，本书对模糊集合 $A$ 与它的隶属函数统一用字母 $A$ 表示．即用 $A(u)\triangleq\mu_A(u)$ 表示模糊集合隶属函数．

下面给出模糊集合的几种表示法．

如果论域 $U$ 为有限的，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，模糊集合 $A$ 可表示为

$$A=A(u_1)/u_1+A(u_2)/u_2+\cdots+A(u_m)/u_m=\sum_{i=1}^{m}A(u_i)/u_i;\tag{1.2.1}$$

如果论域 $U$ 为无限的，模糊集合 $A$ 可表示为

$$A=\int_{u\in U}A(u)/u.\tag{1.2.2}$$

（1.2.1）式的加号“+”并不表示普通加法求和，斜线“/”也不具有分数意义，仅是模糊集合的表示，隶属度是 0 的项可以省略．（1.2.2）式中积分号“$\int$”也不具有积分意义，而是表示论域上元素与其隶属度全体．因此上述两式仅仅是模糊集合的记法而已．

**例 1.2.1** 设有教师集合 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，模糊集合 $A$ 表示教学水平优秀，经专家评议打分，分别给他们 6，7，9，4，5.5，而满分是 10 分，我们用模糊集合表示

$$A=0.60/u_1+0.70/u_2+0.90/u_3+0.40/u_4+0.55/u_5.$$

**例 1.2.2** 设 $U$ 为全体实数，$A$ 表示远大于 10 的数的集合．取

$$A(u)=\begin{cases}\left[1+\dfrac{1}{u-10}\right]^{-1}, & u>10,\\ 0 & u\leqslant 10.\end{cases}$$

模糊集合 $A$ 可以表示为

$$A=\int_{u>10}\left(1+\frac{1}{u-10}\right)^{-1}/u.$$

### 1.2.2 模糊集合的运算

**定义 1.2.2** $A$，$B\in F(U)$，如果 $\mu_A(u)\leqslant\mu_B(u)$，则称模糊集合 $A$ 是 $B$ 的子集，这时也称 $A$ 包含于 $B$（或 $B$ 包含 $A$），记作 $A\subseteq B$；如果 $A\subseteq B$，并且存在 $u_0\in U$，$A(u_0)<B(u_0)$，则称 $A$ 是 $B$ 的真子集，记作 $A\subset B$.

**定义 1.2.3** 设 $A$，$B\in F(U)$，定义运算 $A\cup B$，$A\cap B$，$A^c$，$A-B$ 如下：

$$(A\cup B)(u)=A(u)\vee B(u),(A\cap B)(u)=A(u)\wedge B(u),$$
$$A^c(u)=1-A(u),(A-B)(u)=A(u)\wedge(1-B(u)).$$

$A\cup B$, $A\cap B$, $A^c$, $A-B$ 分别被称为模糊集合的并集、交集、补集与差集.

模糊集合并与交运算可以推广到无限多个模糊集.

设 $A^{(t)}\in F(U)$, $t\in T$, 其中 $T$ 为指标集. $\bigcup\limits_{t\in T}A^{(t)}$, $\bigcap\limits_{t\in T}A^{(t)}$ 的隶属函数分别规定为: $\bigcup\limits_{t\in T}A^{(t)}(u)\triangleq\bigvee\limits_{t\in T}A^{(t)}(u)$, $\bigcap\limits_{t\in T}A^{(t)}(u)\triangleq\bigwedge\limits_{t\in T}A^{(t)}(u)$.

显然，并、交、补、差运算是经典集合并交补差的推广.

**例 1.2.3** 人的年龄为论域，“年老” $Q$、“年轻” $Y$ 为论域上的两个模糊集，其隶属函数规定如下：

$$Q(u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & u>50.\end{cases}$$

$$Y(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & u>25.\end{cases}$$

则模糊集年轻或年老隶属函数为

$$(Q\cup Y)(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<u\leqslant 51,\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & u>51.\end{cases}$$

模糊集既年轻又年老的隶属函数为

$$(Q\cap Y)(u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<u\leqslant 51.\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & u>51.\end{cases}$$

模糊集不年轻的隶属函数为

$$Y^c(u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 25,\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & u>25.\end{cases}$$

下面给出模糊集合运算性质.

**命题 1.2.1** 设 $U$ 为论域, $A$, $B$, $C\in F(U)$, 则有

(1) 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(5) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(6) 0-1 律 $A\cap U=A, A\cup U=U$,

$A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$;

(7) 复原律 $(A^c)^c=A$;

(8) 对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$;

(9) 无限分配律

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(A\cap A^{(t)}), A\cup(\bigcap_{t\in T}A^{(t)})=\bigcap_{t\in T}(A\cup A^{(t)});$$

(10) 稠密性 $A\subset B$ 则存在模糊集 $C$，使 $A\subset C\subset B$.

**证明** 仅证 (9), (10). 由于 ([0, 1], $\vee$, $\wedge$, $c$) 是优软代数，因此 [0, 1] 中的 $\vee$ 与 $\wedge$ 满足无限可分配与稠密性，因此

$$(A\cap(\bigcup_{t\in T}A^{(t)}))(u)=A(u)\wedge(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})(u)=A(u)\wedge(\bigvee_{t\in T}A^{(t)}(u))=\bigvee_{t\in T}(A(u)\wedge A^{(t)}(u))$$

故

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(A\cap A^{(t)}).$$

同样地能够证明

$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A^{(t)})=\bigcap_{t\in T}(A\cup A^{(t)}).$$

这样就证明了 (9).

对于稠密性，若 $A\subset B$，则 $\forall u\in U$, $A(u)\leqslant B(u)$ 且存在 $u_0\in U$，使 $A(u_0)<B(u_0)$. 令 $C(u)=\frac{1}{2}(A(u)+B(u))$，则 $\forall u\in U$, $A(u)\leqslant C(u)\leqslant B(u)$ 且存在 $u_0\in U$，使得不等式 $A(u_0)<C(u_0)<B(u_0)$ 成立. 即存在模糊集合 $C$，使 $A\subset C\subset B$，这样就证明了稠密性.

**注 1.2.4** 模糊集合不满足补余律，因此模糊集合虽然是经典集合推广，但与经典集合有着完全不同的结构.

综上所述，我们得到：

**定理 1.2.1** 代数系统 $(F(U),\cup,\cap,c)$ 是优软代数.

如果用 $[0,1]^U$ 表示论域 $U$ 到单位区间 [0, 1] 上全体映射的集合，令 $\sigma$: $F(U)\to[0,1]^U$, $A\mapsto\mu_A\triangleq\sigma(A)$，那么 $\sigma$ 是 $(F(U),\cup,\cap,c)$ 到 ($[0,1]^U$, $\vee$, $\wedge$, $c$) 的同构映射，从而 ($[0,1]^U$, $\vee$, $\wedge$, $c$) 也是优软代数. 因此今后我们可以把模糊集合与它的隶属函数看成同一的，这也是我们把模糊集合的隶属函数 $\mu_A(u)$ 记为 $A(u)$ 的原因.

## 1.3 模糊集合的分解定理、表现定理与扩展原理

### 1.3.1 截集及其性质

一个元素是否属于模糊集合，回答往往是不确切的. 因此我们能否给其选定一个门槛，使其能够较为准确地回答. 比如，如果一个教师教学水平隶属度能达到 0.8 就足以说明其教学水平是优秀的，那么我们能够把隶属度大于等于 0.8 的教师归类于一个集合；如果一个教师教学