21世纪
高等院校工科类数学教材

线性代数

褚宝增 王祖朝 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪
高等院校工科类数学教材

线性代数

褚宝增　王祖朝　主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/褚宝增,王祖朝主编. —北京:北京大学出版社,2009.6
(21 世纪高等院校工科类数学教材)
ISBN 978-7-301-05595-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①褚… ②王… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 084304 号

书　　名:线性代数
著作责任者:褚宝增　王祖朝　主编
责 任 编 辑:曾琬婷
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-05595-3/O·0544
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787mm×960mm　16 开本　11 印张　280 千字
2009 年 6 月第 1 版　　2009 年 6 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:19.00 元

前 言

当前，我国高等教育蓬勃发展，教学改革不断深入，高等院校工科类数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中. 为适应高等教育 21 世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们应北京大学出版社的邀请，经集体讨论，分工编写了这套《21 世纪高等院校工科类数学教材》，本书为其中的《线性代数》分册.

本教材参照教育部《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，按照"加强基础、培养能力、重视应用"的指导方针，精心选材，力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐统一，集中体现了编者长期讲授工科类线性代数课所积累的丰富教学经验，反映了当前工科数学教学理念和教学内容的改革趋势. 具体体现在以下几个方面：

1. 精心构建教材内容. 本教材在内容选择方面，根据工科学生的实际要求及相关专业课程的特点，汲取了国内外优秀教材的特点，对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的取舍、补充和调整，为后续课程打好坚实的基础.

2. 内容讲述符合认知规律. 以实际的例子导入问题，然后引出相关概念，并在叙述时力求严谨，兼顾直观和抽象，再通过有针对性的例题和习题加深对概念的理解与结论的应用. 对重点概念、重要定理、难点内容从多侧面进行剖析，做到难点分散，便于学生理解与掌握.

3. 加强基础训练和基本能力的培养. 紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题，并剖析一些综合性例题. 按节配有适量习题，每章配有总练习题，书末附有参考答案与提示，便于读者参考.

4. 注重学生数学思维的训练. 教材自始至终贯穿了从具体到抽象的建模过程和从抽象到具体的应用体验，提高学生的符号演绎能力，力求达到培养学生的数学思想和实际应用能力的双重目标.

5. 注重变通思维的启迪. 在考虑到传统解线性方程组方法的计算量巨大的情况下，引入了数值求解的概念，为解决现代工程中的实际问题提供了基本的思想、方法.

全书共分六章：第一章行列式、第二章矩阵、第三章向量与线性方程组、第四章矩阵的特征值与特征向量、第五章二次型、第六章线性方程组的数值解法. 邓燕、吴飞、王翠香、邢永丽老师参加了部分章节的编写. 同时本书也吸收了高世臣、田东风两位教授的教学观点，在此表示深深的感谢！

本书的主要特点是：选材取舍精当，行文简约严密，讲解重点突出，服务后续课程，衔接考研思路等.

囿于编者水平及编写时间较为仓促，教材之中难免存在疏漏与不妥之处，恳请广大读者不吝指正.

编　者
2009 年 3 月

目　　录

第一章 行列式

行列式的出现源于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式. 目前，行列式的理论已经渗透到了几乎所有的数学分支，如数学分析、几何学、离散数学、线性方程组理论、二次型理论、系统控制等，成为一个极其重要的数学工具. 本章主要介绍行列式的概念、性质及其计算.

§1.1 置　　换

一、逆序

对于 $n(n\geqslant 2)$ 个互不相同的自然数，把它们按任意固定的次序排成一排称为这 n 个自然数的一个**排列**. 显然 n 个自然数共有 $n!$ 个排列. 特别称排列 $12\cdots n$ 为**自然排列**或**标准排列**.

若在排列 $s_1s_2\cdots s_n$ 中，$s_i>s_j$ 且 s_i 排在 s_j 之前(左)，则 s_i 与 s_j 就违反了自然排列次序，我们就说 s_i 与 s_j 形成了一个**逆序**. 用记号 $[s_1s_2\cdots s_n]$ 表示排列 $s_1s_2\cdots s_n$ 中所有逆序的个数，简称**逆序数**. 显然，有

$$\begin{aligned}[s_1s_2\cdots s_n]=&(s_1\text{ 后面比 }s_1\text{ 小的数的个数})\\&+(s_2\text{ 后面比 }s_2\text{ 小的数的个数})\\&+\cdots+(s_{n-1}\text{后面比 }s_{n-1}\text{小的数的个数}).\end{aligned}$$

例如，$[12\cdots n]=0$. 又如，$[32514]=2+1+2+0=5$.

定义　若逆序数 $[s_1s_2\cdots s_n]$ 为偶数，则排列 $s_1s_2\cdots s_n$ 称做**偶排列**；若逆序数 $[s_1s_2\cdots s_n]$ 为奇数，则排列 $s_1s_2\cdots s_n$ 称做**奇排列**.

定理 1　一个排列中任意两个元素对调位置，排列的奇偶性改变.

证　以 S 表示排列 $s_1\cdots s_i\cdots s_j\cdots s_n$，把 s_i 与 s_j 对调位置后得到排列 $s_1\cdots s_j\cdots s_i\cdots s_n$，用 S' 表示之.

先证 s_i 与 s_j 相邻的情形，即 $j=i+1$ 的情形. 若 $s_i<s_j$，则

$$[s_1\cdots s_is_{i+1}\cdots s_n]=[s_1\cdots s_{i+1}s_i\cdots s_n]-1;$$

若 $s_i>s_j$，则

$$[s_1\cdots s_i s_{i+1}\cdots s_n]=[s_1\cdots s_{i+1}s_i\cdots s_n]+1.$$

所以 S 与 S' 的奇偶性相反.

再证 s_i 与 s_j 不相邻的情形，即 $j=i+k(k\geqslant 2)$ 的情形. 先将 S 中的 s_j 与 s_{j-1} 对调，再把 s_j 与 s_{j-2} 对调，如此对调 k 次后得到 S'' 为 $s_1\cdots s_j s_i s_{i+1}\cdots s_{i+k-1}s_{j+1}\cdots s_n$. 然后把 S'' 中的 s_i 与 s_{i+1} 对调，s_i 与 s_{i+2} 对调，直至 s_i 与 s_{i+k-1} 对调得到 S'. 这样共对调 $k+(k-1)=2k-1$ 次，故奇偶性改变了 $2k-1$ 次，导致整体奇偶性改变.

推论 奇排列调换成标准排列的对调次数是奇数，偶排列调换成标准排列的对调次数是偶数.

证 由定理 1 的证明过程可知，任一排列调换成标准排列所要对调的次数就是排列奇偶性改变的次数，又由于标准排列是偶排列，故推论成立.

定理 2 当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个排列中，奇排列和偶排列各占一半.

证 假设总共有 m 个奇排列，k 个偶排列，则 $m+k=n!$. 由于任何一个奇排列对调两个元素变成偶排列，所以 $k\geqslant m$；又由于任何一个偶排列对调两个元素变成奇排列，所以 $m\geqslant k$. 故得 $m=k=\dfrac{1}{2}n!$.

二、置换

对于 n 个元素，将其进行编号，依次为第 1 号，第 2 号，…，第 n 号. 现将其编号进行改变，第 1 号改成第 s_1 号，第 2 号改成第 s_2 号，…，第 n 号改成第 s_n 号. 用 $1\to s_1,2\to s_2,\cdots,n\to s_n$ 来表示这种改变，且要求 $s_1s_2\cdots s_n$ 必须是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，此种编号的改变称做**置换**. 对于 n 个元素，若包括 $1\to 1,2\to 2,\cdots,n\to n$，则共有 $n!$ 个不同的置换.

通常置换 $1\to s_1,2\to s_2,\cdots,n\to s_n$ 记做

$$\begin{pmatrix}1\ 2\cdots n\\ s_1\,s_2\cdots s_n\end{pmatrix}.$$

很明显置换满足交换律，即

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\cdots n\\ s_1\,s_2\,s_3\cdots s_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\ 1\ 3\cdots n\\ s_2\,s_1\,s_3\cdots s_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\ 1\ 2\cdots n\\ s_3\,s_1\,s_2\cdots s_n\end{pmatrix}=\cdots.$$

设 $\begin{pmatrix}t_1t_2\cdots t_n\\ r_1r_2\cdots r_n\end{pmatrix}$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个置换. 记

$$\begin{bmatrix}t_1t_2\cdots t_n\\ r_1r_2\cdots r_n\end{bmatrix}=[t_1t_2\cdots t_n]+[r_1r_2\cdots r_n],$$

这里 $[t_1t_2\cdots t_n]$，$[r_1r_2\cdots r_n]$ 是相应排列的逆序数.

定理 3 若 $\begin{pmatrix}t_1t_2\cdots t_n\\ r_1r_2\cdots r_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1u_2\cdots u_n\\ v_1v_2\cdots v_n\end{pmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} t_1 t_2 \cdots t_n \\ r_1 r_2 \cdots r_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 u_2 \cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots v_n \end{bmatrix} = \text{偶数}.$$

证 先假定 $\begin{bmatrix} t_1 t_2 \cdots t_n \\ r_1 r_2 \cdots r_n \end{bmatrix}$ = 奇数. 为方便起见，分别以 T 与 R 来表示排列 $t_1 t_2 \cdots t_n$ 和 $r_1 r_2 \cdots r_n$. 显然排列 T 与 R 的奇偶性相反.

如果 $u_1 = t_1$，则 $v_1 = r_1$，因此 $\begin{bmatrix} u_1 t_2 \cdots t_n \\ v_1 r_2 \cdots r_n \end{bmatrix}$ 也等于奇数.

如果 $u_1 \neq t_1$，则 $v_1 \neq r_1$. 把 T 中的 u_1 与 t_1 对调得到 T_1，把 R 中的 v_1 与 r_1 对调得到 R_1. 由定理 1 知，T_1 与 T 的奇偶性相反，R_1 与 R 的奇偶性相反. 因为 T 与 R 的奇偶性相反，故 T_1 与 R_1 的奇偶性相反，即

$$\begin{bmatrix} u_1 t_2 \cdots t_1 \cdots t_n \\ v_1 r_2 \cdots r_1 \cdots r_n \end{bmatrix} = \text{奇数}.$$

再把上一排的 u_2 与 t_2 对调位置，同时把下一排的 v_2 与 r_2 对调位置（若 $u_2 = t_2$，则不对调），得

$$\begin{bmatrix} u_1 u_2 t_2 \cdots t_1 \cdots t_n \\ v_1 v_2 r_2 \cdots r_1 \cdots r_n \end{bmatrix} = \text{奇数}.$$

依此类推，最后得

$$\begin{bmatrix} u_1 u_2 \cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots v_n \end{bmatrix} = \text{奇数},$$

从而在此种情况下证明了本定理.

当 $\begin{bmatrix} t_1 t_2 \cdots t_n \\ r_1 r_2 \cdots r_n \end{bmatrix}$ = 偶数时，同理可证.

从定理 3 可以看出，对于一个置换的某一写法，若其上、下两排逆序数之和是奇数，则其任一其他写法中上、下两排逆序数之和也是奇数；若其上、下两排逆序数之和是偶数，则其任一其他写法中上、下两排逆序数之和也是偶数. 前者称**奇置换**，后者称**偶置换**.

显然有

$$\begin{bmatrix} 1\ 2 \cdots n \\ s_1 s_2 \cdots s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 s_2 \cdots s_n \\ 1\ 2 \cdots n \end{bmatrix} = [s_1 s_2 \cdots s_n].$$

习　题　1.1

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 4132；　　(2) 1347265；

(3) $n(n-1)\cdots 21$；　　(4) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

2. 选定 i 与 k，使得

(1) $1274i56k9$ 是偶排列；　　(2) $1i25k4897$ 是奇排列.

3. 若在排列 $s_1 s_2 \cdots s_n$ 中有 k 个逆序，则在排列 $s_n s_{n-1} \cdots s_1$ 中有多少个逆序？

4. 求下列置换的奇偶性：

(1) $\begin{pmatrix}12345\\21435\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}123456\\634125\end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix}123456\\461325\end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix}12345678\\87126453\end{pmatrix}$.

§1.2 行列式的定义

对于二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2$ 为常数，x_1,x_2 为未知量，在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 的情况下，我们很容易求出它的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了方便起见，记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则二元线性方程组(1)的解可以表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

称形如 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ 的式子为**二阶行列式**，它们具有统一的计算法则，就是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

为了便于记忆，在计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ 时，可参照图 1：D 的值是连线上元素乘积的代数和，实线上元素相乘取“+”，虚线上元素相乘取“−”.

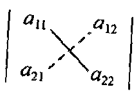

图 1

对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33},b_1,b_2,b_3$ 为常数，x_1,x_2,x_3 为未知量，在 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$ 的情况下，解出

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

x_2,x_3 相仿，在此不再列出. 同样为了方便起见，可记 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，称做**三阶行列式**，其值定义为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

若令

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解便是 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

为了方便记忆，在计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 时，可参照图 2：D 的值是连线上元素乘积的代数和，实线上元素相乘取"＋"，虚线上元素相乘取"－".

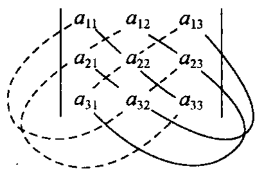

图 2

观察三阶行列式的展式发现：每项均为三个因子相乘，所有项的因子的第一个脚标排序是 1,2,3，第二个脚标则是 1,2,3 的一个排列，共有 3! 项，正项的因子的第二个脚标都是偶排列，负项的因子的第二个脚标都是奇排列. 对于二阶行列式也有同样的规律. 按照这个规律我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 取 n^2 个数 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}$，把它们排成 n 行 n 列的一个正方形阵，规定 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 位于第 i 行与第 j 列的交点处，再在方形阵的两边用两条竖线把它夹起来，构成(3)式左端的式子，就得到一个 n **阶行列式**，通常用 $\det(a_{ij})$

来表示. 此 n 阶行列式的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(a_{ij}) = \sum (-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}, \tag{3}$$

其中 $s_1 s_2 \cdots s_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，$\sum$ 是对所有排列做出的项 $(-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}$（共有 $n!$ 这样的项）求和. 称 a_{ij} 为行列式的**元素**，其中从左上角到右下角对角线（称为**主对角线**）上的元素 a_{ii} 叫做行列式的**主元**（相应的从右上角到左下角的对角线称为**反对角线**）；元素的第一个脚标也叫做**行标**，第二个脚标也叫做**列标**.

特别地，对于只有一行一列，即一个元素所构成的行列式 a_{11}（通常省略两竖线，以免与绝对值混淆）称为一阶行列式，其值为 a_{11}.

行列式 $\det(a_{ij})$ 的展式还可以定义为

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{s_1 1} a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n} \tag{4}$$

或

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\left[\begin{smallmatrix} t_1 t_2 \cdots t_n \\ s_1 s_2 \cdots s_n \end{smallmatrix}\right]} a_{t_1 s_1} a_{t_2 s_2} \cdots a_{t_n s_n}. \tag{5}$$

例 证明**上三角行列式**（其中主对角线以下的元素都是 0. 这里空白处的元素是 0，以下同）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 由定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}. \tag{6}$$

在行列式中，第 n 行的元素除去 a_{nn} 外全为 0，因而只要考虑 $s_n = n$ 的那些项. 在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其余的项全为 0，因而 s_{n-1} 的值只有 $n-1$，n 这两种可能，由于 $s_n =$

n,所以 s_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $s_{n-1}=n-1$. 如此逐步推下去,不难看出,(6)式右端除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外,其余的项全是 0. 而这一项的列标所成的排列为偶排列,所以取正号. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同样可得**下三角行列式**(其中主对角线以上的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

对角行列式(其中主对角线以外的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

反对角行列式(其中反对角线以外的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{[n\cdots 21]}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

习 题 1.2

1. 写出四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

2. 用行列式的定义证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

§1.3 行列式的性质

本节在讲解和证明行列式的性质时,规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并定义其**转置行列式**为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 的值相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 $D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\begin{bmatrix} s_1 s_2 \cdots s_n \\ 1\ 2 \cdots n \end{bmatrix}} a_{s_1 1}a_{s_2 2}\cdots a_{s_n n}=\sum(-1)^{\begin{bmatrix} 1\ 2 \cdots n \\ s_1 s_2 \cdots s_n \end{bmatrix}} a_{s_1 1}a_{s_2 2}\cdots a_{s_n n}$

$=\sum(-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{s_1 1}a_{s_2 2}\cdots a_{s_n n}=D.$

性质 1 告诉我们,行列式对于"行"与"列"具有对偶性,也就是说将来对"行"成立的性质对"列"也成立,对"列"成立的性质对"行"也成立.因此以下几个性质只讲对于"行"情况的证明,对于"列"情况不再复述.

性质 2 若行列式 D 中有某一行(列)的元素全为 0,则 $D=0$.

证 设行列式 D 的第 i 行元素全部为 0,即 $a_{ij}=0(j=1,2,\cdots,n)$,按定义

$$\begin{aligned} D&=\sum(-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{1s_1}\cdots a_{i-1,s_{i-1}}a_{is_i}a_{i+1,s_{i+1}}\cdots a_{ns_n} \\ &=\sum(-1)^{[s_1 s_2 \cdots s_n]} a_{1s_1}\cdots a_{i-1,s_{i-1}}0a_{i+1,s_{i+1}}\cdots a_{ns_n}=0. \end{aligned}$$

性质 3 互换行列式的两行(列),行列式只改变正负号.

证 假设将 D 的第 k,m 两行的元素交换位置,不妨设 $1\leqslant k<m\leqslant n$.由于

$$D=\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ 第\,k\,行 \\ \\ 第\,m\,行 \\ \\ \\ \end{array},$$