

高等学校教学用书

控制测量学

下册

武汉测绘学院控制测量教研组编



中国工业出版社

高等学校教学用书



控制测量学

下册

武汉测绘学院控制测量教研组编



中国工业出版社

本书是根据武汉测绘学院工程测量专业控制测量学的教学大纲编写而成的。分上下两册出版。上册主要内容是：城市及工程三角测量的选点、造标、埋石，各推算元素的精度估算，基线丈量，精密测角仪器，水平角观测和测站平差的基本理论和方法。下册的主要内容是：城市及工程三角测量按条件观测平差以及按间接观测平差，精密水准测量，三角高程测量，测量的业务组织与计划的基本理论和方法，以及地球椭球体及高斯投影的理论和应用。

本书可作为工程测量专业本科和函授的教科书，也可作为工程测量作业人员参考书。

控制测量学

下册

武汉测绘学院控制测量教研组编

*

国家测绘总局测绘书刊编辑部编辑（北京三里河国家测绘总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟阁路丙10号）

（北京市书刊出版事业许可证出字第110号）

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $23^{3/4}$ ·字数550,000

1963年3月北京第一版·1963年3月北京第一次印刷

印数0001—1,240·定价（10-5）2.80元

*

统一书号：K15165·1755（测绘-32）

序 言

1958年以后，我院工程测量专业原来的大地测量学课程改成了控制测量学，删去了对工程测量工作者关系較少的天文大地测量部份，补充了結合工程测量专业的內容，使学生能更好地担任各种工程控制测量业务。1959年底我組曾根据当时的教学大纲編写控制测量学教材，以应教学上急需。現以原有教材为基础，参考近年来教学和实习的經驗，重行編写，作了部分增删，成为本书。

工程测量工作者的服务范围大体上包括城市建設、工业企业、交通运输、水利工程等部門的测量工作。在这些测量工作中控制网建立的原理有許多是与建立国家大地网时相同的，所以本书的內容与其他测量专业所用的大地测量学有其相同的部份，但工程测量中的控制网有其显著的特点，所以控制测量学与着重講述国家大地控制网的大地测量学在內容取舍和安排上互有差别，各有其重点。

因为工程测量所依据的规范与国家测量細則有其共同之处，所以本书內容既結合国家测量各种細則的要求，又紧密地結合城市及工程建設测量各种规范的規定要求。

本书分为上下两册出版。上册包括七章：城市及工程建設中三角测量概述；三角测量选点造标埋石工作；三角测量各推算元素的精度估算；基綫丈量；精密测角仪器；水平角观测；测站平差等。此七章与下册第八、九两章（城市及工程三角测量按条件观测平差及按間接观测平差）合而为第一篇，篇名为城市及工程平面控制测量。有关城市及工程精密导綫测量的內容，根据目前的安排在测量学中講授，故未編入本书。

下册除第一篇第八、九两章以外，第二篇講述高程控制测量；第三篇講述城市及工程控制测量的业务組織与計劃；最末第四篇講述地球橢圓体的几何性质和高斯投影。

为了同时适应函授，本书在叙述上力求詳細清楚。因此，本书除可作为本科教材外，配合函授指导书也可供函授之用。此外，如果兄弟院校的工程测量专业使用本书，为了在內容上能有所选择起見，本书取材較广，无時間講授的部份可作为学生参考之用。

本书編写过程中，曾經参考了有关的文献和业务单位的資料，在此謹向文献的作者和提供資料的单位表示衷心的謝意。

本书由我組同志分工合作編写而成，負責編写各章的人員如下：于来法編第八章，顧保根編第九章，梅是义編第十、十一章，楊銓曾編第十二章，李庆海編第十三、十四章。各章初稿完成后曾互相校閱，并由教研組中其他同志校閱，提出改进意見，其后又由李庆海校閱各章。組中其他同志担任了繪图及部份抄写工作。

最后由我院大地测量教研組孙正廉、陈健进行評閱，提出了很多宝貴意見，特此致謝。

由于編者水平有限，加之時間仓促，书中难免有缺点和錯誤，我們恳請讀者提出批評和指正。

武汉測繪学院控制测量教研組

1962年3月

目 录

第八章 城市及工程三角测量按条件观

测平差	1
§ 8—1 三角测量平差计算概論	1
§ 8—2 独立三角网条件方程式的类型及其組成	2
§ 8—3 独立三角网中条件方程式数目的决定	7
§ 8—4 独立三角网条件方程式不符值的限值	11
§ 8—5 三角网按条件观测平差的步骤, 独立三角网平差算例	13
§ 8—6 非独立网中的条件方程式类型及数目	21
§ 8—7 基綫条件和固定边条件	23
§ 8—8 方位角条件和固定角条件	25
§ 8—9 縱横坐标条件	26
§ 8—10 克呂格兩組平差法的原理	31
§ 8—11 应用兩組平差法时函数权倒数的求法	34
§ 8—12 应用“烏尔馬耶夫規則”作克呂格兩組平差	36
§ 8—13 应用“类似于史賴伯第一法則”作克呂格兩組平差	40
§ 8—14 按克呂格兩組平差法进行三角鎖平差算例	44
§ 8—15 克呂格兩組平差法应用于中点多边形的平差	49
§ 8—16 一点插入三角形按兩組平差法平差	53
§ 8—17 大地四边形按兩組平差法平差	59
§ 8—18 逐一分組平差法的基本原理	60
§ 8—19 博尔茨扩展法的概念	66
§ 8—20 条件观测分区平差法的原理	70
§ 8—21 条件观测分区平差法的算例	75

第九章 城市及工程三角测量按間接

观测平差	86
§ 9—1 間接观测平差在三角测量中的应用	86
§ 9—2 三角测量按間接观测平差的原理	87
§ 9—3 誤差方程式的組成	91
§ 9—4 史賴伯約化法則的原理及应用	93
§ 9—5 法方程式的組成和解算	98
§ 9—6 精度評定	99
§ 9—7 城市控制网加密按間接观测平差举例	102
§ 9—8 大規模三角网平差时誤差方程式图的应用	110
§ 9—9 交会定点的平差計算	115
§ 9—10 三角网按間接观测分区平差法的概念	121
本篇第八章、第九章主要参考文献	122

第二篇 精密水准测量和三角高程测量

第十章 精密水准测量

§ 10—1 高程控制概論	123
§ 10—2 国家高程控制网的建立	123
§ 10—3 精密水准测量在工程建設中的应用	124
§ 10—4 精密水准测量的精度規定	127
§ 10—5 城市精密水准测量的水准路綫选择与水准标石埋設	129
§ 10—6 精密水准仪	131
§ 10—7 精密水准尺	135
§ 10—8 精密水准仪的檢驗	136
§ 10—9 精密水准尺的檢驗	142
§ 10—10 精密水准测量的誤差来源及其影响	144
§ 10—11 精密水准测量的作业程序一般規定	146
§ 10—12 跨越障碍的精密水准测量	149

§ 10—13 精度評定154
 § 10—14 水准面不平行性和高程系
 統.....158

第十一章 三角高程測量 163
 § 11— 1 三角高程測量的基本公式...163
 § 11— 2 地面折光系数的測定 166
 § 11— 3 天頂距观测及視标高度測
 定.....168
 § 11— 4 影响三角高程測量精度的因
 素172
 § 11— 5 三角高程測量的应用173
 本篇主要参考文献173

第三篇 城市及工程控制測量的
 业务組織与計劃

第十二章 城市及工程控制測量的业务
 組織与計劃.....174
 § 12— 1 城市及工程控制測量的业务
 組織与計劃的任务174
 § 12— 2 編制測量业务計劃的特点和
 方法174
 § 12— 3 編制技术設計书的意义及其
 主要内容176
 § 12— 4 已有三角測量成果的精度分
 析176
 § 12— 5 城市平面控制主要技术指标
 的論証181
 § 12— 6 最小工作量的探討185
 § 12— 7 城市平面控制网設計方案的
 选择及其論証186
 § 12— 8 測角仪器的选择与測回数的
 决定191
 § 12— 9 城市及工程控制測量的技术
 設計193
 § 12—10 劳动組織与技术定額194
 § 12—11 各种工作量的計算以及进程
 計劃的編制196
 § 12—12 預算的編制199
 § 12—13 測量工作的統計与表报200
 § 12—14 測量工作的检查与驗收200
 § 12—15 技术总结报告的編写203
 § 12—16 安全技术的概念204
 本篇主要参考文献204

第四篇 地球橢圓体的几何性质及高
 斯投影平面直角坐标系

第十三章 地球橢圓体基本公式

及大地坐标計算206
 § 13— 1 概述206
 § 13— 2 地球橢圓体的扁率及偏
 率206
 § 13— 3 子午綫橢圓上直角坐标与大
 地緯度的关系208
 § 13— 4 地心緯度及归化緯度与大地
 緯度的关系209
 § 13— 5 子午綫和卯酉綫上的曲率半
 径210
 § 13— 6 橢圓体一点任一方向的曲率
 半径213
 § 13— 7 橢圓体面上一点处的平均曲
 率半径214
 § 13— 8 計算子午綫弧长的公式216
 § 13— 9 計算平行圈弧长的公式219
 § 13—10 相对法截綫220
 § 13—11 大地綫的定义及其性质222
 § 13—12 关于大地綫的克来洛定理...223
 § 13—13 地球橢圓体上大地綫假想的
 作出方法224
 § 13—14 橢圓体上大地綫与法截綫間
 的角度226
 § 13—15 法截綫互相間及与大地綫的
 差异227
 § 13—16 大地坐标正反算問題概說...230
 § 13—17 长距离大地坐标正反算問
 題231
 § 13—18 三角网在橢圓体面上的計算
 問題245
 § 13—19 用于解算球面小三角形的洛
 戎德定理248
 § 13—20 解算球面上小三角形的步驟
 及实例250
 § 13—21 短距离大地坐标正算問題...251
 § 13—22 短距离大地坐标反算問題...261
 第十四章 高斯正形投影平面直角坐标
 系264
 § 14— 1 高斯投影概述 2 64

- § 14—2 三角网在高斯投影平面上的描写 268
- § 14—3 将椭圆柱正形投影到平面的一般公式 270
- § 14—4 正形投影一般公式对于高斯正形投影的应用 274
- § 14—5 由大地坐标 B 及 L 推算平面坐标 x 及 y 的公式 276
- § 14—6 收敛级数的反解 278
- § 14—7 纬度函数随纬度而生的变化 279
- § 14—8 由平面坐标计算大地坐标公式的推导 281
- § 14—9 计算平面子午线收敛角的公式 290
- § 14—10 抛物线内插法 293
- § 14—11 由大地坐标推算平面坐标及平面子午线收敛角的算例 297
- § 14—12 由平面坐标推算大地坐标的算例 301
- § 14—13 方向改化 303
- § 14—14 三角形中方向改正数与球面角超的关系 309
- § 14—15 高斯正形投影的长度比 310
- § 14—16 距离改化 313
- § 14—17 将三角网化算到高斯投影平面上的算例 318
- § 14—18 利用数表查取方向改正数 321
- § 14—19 工程测量中所用的高斯投影平面坐标换带方法 324
- § 14—20 应用换带表进行换带计算的原理 325
- § 14—21 换带表的用法及算例 330
- § 14—22 高斯-克吕格坐标表对工程测量工作者的用途 333
- § 14—23 应用坐标表将大地坐标换算为平面坐标 336
- § 14—24 应用坐标表进行换带计算 338
- § 14—25 高斯平面坐标系在工程测量中应用的若干问题 343
- § 14—26 国家三角网计算方法的概念 344
- § 14—27 垂线偏差在国家三角测量计算中的应用 347
- 本篇主要参考文献 351
- 附 录 352
- 附录 1 数学公式 352
- 附录 2 三角形单锁图形条件联系数的权系数 355
- 附录 3 中点多边形或环形三角锁图形条件联系数的权系数 364
- 附录 4 大地四边形锁图形条件联系数的权系数 366
- 附录 5 方向系数表 367
- 附录 6 检核 a 及 b 计算的辅助表 373

第八章 城市及工程三角測量按条件觀測平差

§ 8-1 三角測量平差計算概論

进行三角測量的最終目的，是为了获得各三角点标石中心的坐标。假定在三角网中只是进行了必要个数的觀測（沒有多余觀測），那么解算三角形和推求坐标的工作就非常簡單。但是，实际上觀測的个数往往多于計算三角网所必要的个数，而且在觀測的結果中包含着一些不可避免的誤差，因而各觀測結果之間必然有矛盾存在，不相符合，致使用不同的觀測值去推求同一边长、方位角及坐标时会得到不同的結果。显然，在这种情况下所获得的各三角点的坐标是不可靠的。为了消除三角測量多余觀測之間的几何矛盾，并由所有觀測結果中求出三角測量各种元素的最或然值，以及鑑定三角測量觀測值和平差元素的精度，就必须根据最小二乘法原理进行三角測量的平差計算。

所謂三角測量的內业計算包括概算、平差計算和編制成果表。在外业成果完成之后，进入平差之前需要将觀測成果进行整理，这便是概算，其結果得到归算到标石中心（經過測站点及照准点归心改正和測站平差），并且化算到高斯-克吕格投影平面上的方向值。这就是說除了国家天文大地网的平差有时在参考橢圓体面上进行外，所有其他等級的三角測量平差計算一般都在高斯投影面上进行。

关于高斯投影的理論及詳細計算方法，将在本书第四篇中論述，本章及下章所講的平差計算均是在高斯平面上进行的。

对于城市三角測量而言，若測区内尚无国家三角点，則需进行天文測量来求出一个点的經緯度和一个边的方位角，以确定該三角网在地球橢圓体上的位置和方法，以便将三角网化算到高斯投影面上。如果測区内已有国家三角点，則不必觀測天文經緯度及方位角，可以直接利用国家三角点的平面坐标及方位角。城市中的較大工业区和水利建設中面积較大的水庫区（面积超过100平方公里），全需要在高斯投影平面上进行三角測量的平差計算。对一般工程三角网，在尚无国家三角点的地区，只測天文方位角，而不測定經緯度。在較小地区的三角网，由于边长較短，投影改正值很小，一般不进行投影改正，便可进行平差計算。

若待平差的三角网仅有一条起算边长、一个起始方位角和一对起始坐标数据时，則称这个网为独立网或自由网。当三角网的起始数据多于独立网所需的数据时，我們便称为非独立网或附合网。

三角測量的觀測結果可以按条件觀測平差，也可以按間接觀測平差。当按条件觀測平差时，要列出三角网所必須滿足的几何条件，从而求出觀測量（方向或角度）的平差值。当按間接觀測平差时，通常以三角点的坐标为未知数，列出每个觀測值的誤差方程式，从而直接求出三角点坐标的最或然值。从理論上講，無論采用那种平差方法所得的結果都是一样的，而为了工作的便利，应当选择工作量較小的方法。

三角測量的觀測結果是各方向值，因而应当以方向为未知数进行平差。但是按方向平

差的計算工作常較按角度为复杂，所以时常采用简化平差的方法，用按角度平差来代替按方向平差。这对于低等三角测量是完全适用和方便的。

本章及下章将分别讨论三角测量按条件观测平差与按间接观测平差的一般理论，以及与此相联系的一些主要方法和具体应用的问题。

§ 8-2 独立三角网条件方程式的类型及其组成

独立三角网可能有这几种类型的条件方程式：1. 图形条件；2. 圆周闭合条件；3. 极条件（或称边长条件）。未讲这些条件之前我们将引用下列的符号：

(1), (2), (3) ——代表角度（或方向）的观测值；

v_1, v_2, v_3 ——代表角度（或方向）的改正数；

[1], [2], [3] ——代表角度（或方向）的最或然值（或平差值）。

它们的关系是：

$$(1) + v_1 = [1]; (2) + v_2 = [2]; (3) + v_3 = [3] \quad (8-1)$$

(一) 图形条件

在任何闭合图形中如果所有顶点的角度都进行了观测，就会产生图形条件，也就是要求各观测角度之和在平差后等于该图形各角和的几何条件。例如根据几何定理，每个平面三角形三内角之和必须等于 180° ，每个多边形内角之和必须等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，其中 n 为边数。

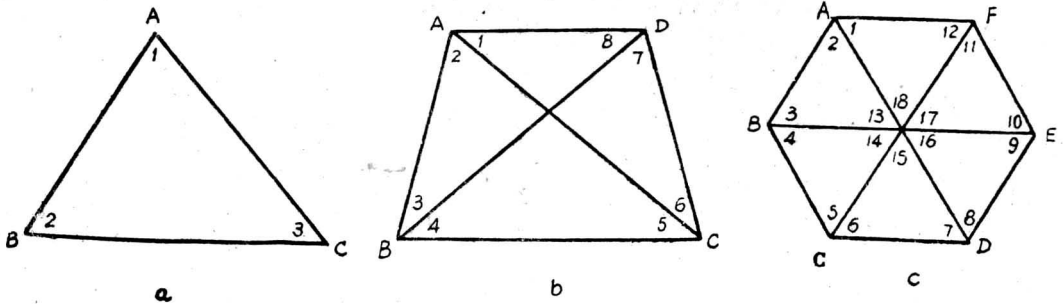


图 8-1

a—三角形；b—大地四边形；c—中心多边形

按角度进行平差时，三角形图形条件对于图 8-1a 来讲可以写成：

$$[1] + [2] + [3] - 180^\circ = 0. \quad (8-2)$$

即 $\triangle ABC$ 三个角度平差值之和应等于 180° 。将(8-1)式代入(8-2)式即得：

$$v_1 + v_2 + v_3 + (1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0. \quad (8-3)$$

利用观测值可以计算出条件式的不符值

$$w = (1) + (2) + (3) - 180^\circ. \quad (8-4)$$

由(8-3)式与(8-4)式的关系可写出

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0. \quad (8-5)$$

这就是图 8-1a 图形条件方程式之最终形式。计算时，应注意 w 的正负号。在图 8-1b 大地四边形中有重迭三角形，此时应注意图形条件式必须是独立的，例如可以由 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABC$ 、

$\triangle BCD$ 列出三个图形条件方程式如下：

$$\left. \begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + w_1 &= 0 & (1) \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w_2 &= 0 & (2) \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + w_3 &= 0 & (3) \end{aligned} \right\} (8-6)$$

但由第四个三角形 $\triangle ACD$ 也可列出条件方程式：

$$v_1 + v_6 + v_7 + v_8 - w_4 = 0. \quad (8-7)$$

因为(8-7)式可以由(8-6)式推导出来，所以(8-7)式不是独立的。由此可知，大地四边形内只有三个独立的图形条件，第四个是不独立的。

将大地四边形中所有内角相加也可以列出一个条件，即使所有内角之和等于 360° ，这是图形条件的另一种形式。我们可以看出这一条件等于(8-6)式中(1)、(3)两式之和。如果应用这样一个条件，则必须把(8-6)式的(1)、(3)两式中去掉一个，以保证各图形条件都是独立的。为了计算方便，一般都应用三角形组成图形条件。

中点多边形之图形条件方程式列出的方法与上述相同，每一个三角形均可以列出一个图形条件方程式。

如果三角网以方向为未知数进行平差（即按方向平差），则首先将各个方向加以编号，在任何一测站上均应按顺时针方向编号。现以图8-2所示的大地四边形为例加以说明。由 $\triangle ABD$ 可列出图形条件方程式：

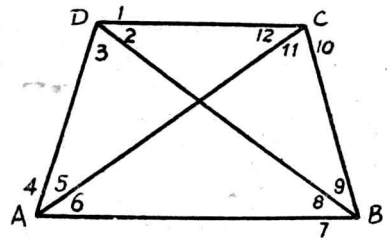


图 8-2

$$v_3 - v_2 + v_6 - v_4 + v_8 - v_7 + w_1 = 0 \quad (8-8)$$

其他二个独立的图形条件方程式不难列出。至于其他图形也可用同样的方法列出它们按方向平差时的图形条件方程式。

(二) 圆周闭合条件

这种条件只有在网内有中点多边形时，且观测了中点上所有的角度并以角度为未知数进行平差时才存在，因为根据几何定理，图形中点处各角之和应等于 360° ，而中点各角观测值在平差后应满足这个条件，这个条件就称为圆周闭合条件（也称周角条件）。

以图8-1c为例，写出圆周闭合条件方程式为：

$$v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17} + v_{18} + w = 0 \quad (8-9)$$

式中 $w = (13) + (14) + (15) + (16) + (17) + (18) - 360^\circ$ 。

当以方向为未知数进行平差时，因为每个角度是由两个方向之差所组成的，如果也列出此种条件方程式，则每个方向将在条件方程式中出现两次，一次为正号，一次为负号，正好相消。这就是说在任何情况下此条件皆可满足，因而也就不需要列它。所以按方向平差时没有圆周闭合条件。

(三) 极条件（或称边长条件）

在大地四边形和中点多边形中，仅使图形条件满足还不能保证几何图形的闭合，因为在这些图形中，任何一边的边长均可通过两条路线求得。由于用来推算的各角度含有误差，因而所得的边长不能相等。所以在这些图形中应当建立由两条不同路线推求同一条边长时，保证其所得结果完全相同的条件。现以图8-3及8-4为例来说明为什么需要这个条

件。

設图 8—3 中的 AB 为已知边，利用正弦定律計算 CD 边时可从两条路綫进行。一条由 $\triangle ABC$ 算出 BC ，再由 $\triangle BCD$ 算出 CD ；另外一条可从 $\triangle ABD$ 算出 AD ，再从 $\triangle CDA$ 算出 CD 。显然，这是两条不同的計算路綫，由它們求得两个 CD 值即使在該大地四边形各內角已滿足图形条件的情况下也可能不是相等的。例如图 8—4 中，經由第一条推算路綫求出的 CD 之长可能是 C_1D_1 ，經過第二条推算路綫求出的 CD 之长可能是 C_2D_2 。而 $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ ，各角已滿足了图形条件。但这时 $C_1D_1 \neq C_2D_2$ ，因而，为了避免这种矛盾現象，各角的平差值还应滿足下面导出的条件。

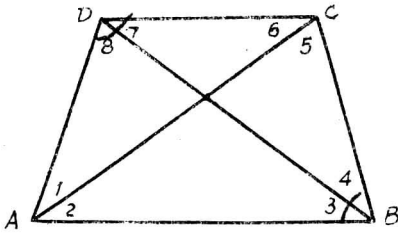


图 8—3

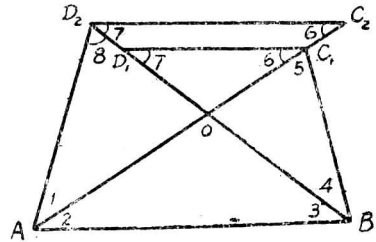


图 8—4

在图 8—3 中从 $\triangle ABC$ 求出 BC ，再从 $\triangle BCD$ 計算 CD 的公式可写成：

$$\frac{BC}{\sin[2]} = \frac{AB}{\sin[5]}, \quad \frac{CD}{\sin[4]} = \frac{BC}{\sin[7]},$$

$$CD = \frac{\sin[4] \cdot \sin[2]}{\sin[7] \cdot \sin[5]} AB. \quad (8-10)$$

而从 $\triangle ABC$ 算出 AD ，再从 $\triangle CDA$ 算出 CD 的公式为：

$$\frac{AD}{\sin[3]} = \frac{AB}{\sin[8]}, \quad \frac{CD}{\sin[1]} = \frac{AD}{\sin[6]},$$

所以

$$CD = \frac{\sin[1] \cdot \sin[3]}{\sin[6] \cdot \sin[8]} AB. \quad (8-11)$$

显然，应当使 (8—10) 式等于 (8—11) 式，即

$$\frac{\sin[1] \cdot \sin[3] \cdot \sin[5] \cdot \sin[7]}{\sin[2] \cdot \sin[4] \cdot \sin[6] \cdot \sin[8]} = 1. \quad (8-12)$$

因为这个条件是以边长的比例列出的，故称为边长条件。它还可采用下述方法列出：选择一个点为极点，例如选取图 8—3 中对角綫的交点 O 作为极点，圍繞 O 点可以写出：

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1. \quad (8-13)$$

再从 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ ……中利用正弦定律同样可得到 (8—12) 式。极点可自由选择，例如在图 8—3 中不取 O 点而取 A 点为极点时，圍繞 A 点可以写出：

$$\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AD} = 1. \quad (8-14)$$

根据正弦定律可将 (8—14) 式变为：

$$\frac{\sin[6]\sin[3+4]\sin[8]}{\sin[7+8]\sin[5]\sin[3]}=1. \quad (8-15)$$

(8-12) 式及 (8-15) 式可以互相变换而得，它们之中只有一个是独立的。上述列法就所有边长以某点为极列出的，所以又称为极条件。应当指出，因为极点可以自由选在大地四边形中可以 A、B、C、D、O 为极组成五个不同的极条件，但是只要满足其中的一个，则其余的也自然可以满足。所以在一个大地四边形中只有一个独立的极条件。

一个中点多边形如图 8-5，设已知一条边长，也可有两条边来计算其他的边长，例如由 OC 计算 OA 时，可经过 OD 及 E，或经过 OB 求得，因而也具有一个极条件。如果选 O 点为极点则可写出：

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1. \quad (8-16)$$

用正弦定律来表示极条件，则得

$$\frac{\sin[3]\sin[5]\sin[7]\sin[9]\sin[1]}{\sin[2]\sin[4]\sin[6]\sin[8]\sin[10]}=1. \quad (8-17)$$

应当指出，在大地四边形及中点多边形中有一个测站未观测角度时，也需要列出极条件如图 8-6 中的 A 点及图 8-7 中的 O 点未设测站，所以未观测角度，但也可依上法列极条件来。由此得出结论，如果大地四边形及中点多边形中有的角度未观测，但已测的边仍能构成这些图形的话，则仍需列出极条件，并且最好以未设测站的点作为极点。

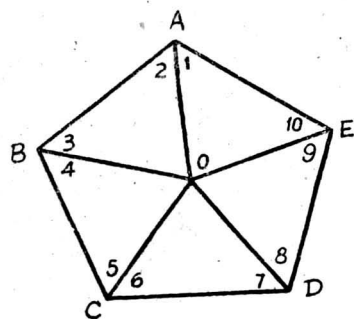


图 8-5

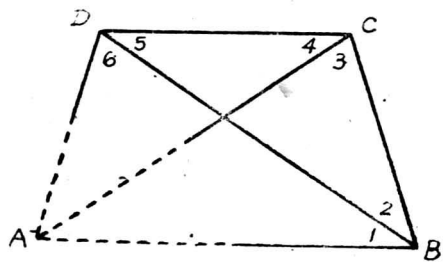


图 8-6

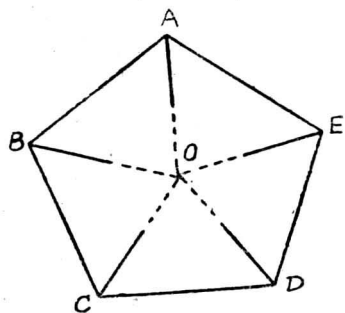


图 8-7

应用前面导出的极条件的形式 (8-12)、(8-15)、(8-17) 来进行计算是不方便的，需要将非线性的极条件变为线性形式，并且用各观测角度的改正数表达出来，以便于计算的目的。

为此，先以中点多边形的极条件为例推导这种变换。将 (8-1) 式代入 (8-17) 式中并 (8-17) 式两边取对数，即得

$$\begin{aligned} & \lg \sin\{(1) + v_1\} + \lg \sin\{(3) + v_3\} + \lg \sin\{(5) + v_5\} + \lg \sin\{(7) + v_7\} \\ & + \lg \sin\{(9) + v_9\} - \lg \sin\{(2) + v_2\} - \lg \sin\{(4) + v_4\} \\ & - \lg \sin\{(6) + v_6\} - \lg \sin\{(8) + v_8\} - \lg \sin\{(10) + v_{10}\} = 0. \end{aligned} \quad (8-18)$$

就一般情形而言，将 $\lg \sin\{(i) + v_i\}$ 应用台劳定理展开成级数，由于改正数很小，舍去高次项，只取前面二项，得一般式为：

$$\lg S = \sum \lg \sin b_i - \sum \lg \sin b_i$$

$$\lg \sin\{(i) + v_i\} = \lg \sin(i) + \delta_i v_i \quad (8-19)$$

将(8-19)式应用于(8-18)式得到以角度改正数表示的边长条件式如下:

$$\delta_1 v_1 + \delta_3 v_3 + \delta_5 v_5 + \delta_7 v_7 + \delta_9 v_9 - \delta_2 v_2 - \delta_4 v_4 - \delta_6 v_6 - \delta_8 v_8 - \delta_{10} v_{10} + w = 0 \quad (8-20)$$

$$\text{式中 } w = \lg \sin(1) + \lg \sin(3) + \lg \sin(5) + \lg \sin(7) + \lg \sin(9) - \lg \sin(2) - \lg \sin(4) - \lg \sin(6) - \lg \sin(8) - \lg \sin(10) \quad (8-21)$$

上列两式中 δ_i 及 $\delta_1, \delta_2, \dots$ 等是各角正弦对数($\lg \sin$)的秒差,可以由对数表中查得。在计算边长条件时,不论用几位对数计算,通常 δ 和 w 都取对数第六位为单位。

同理可将大地四边形的极条件(8-15)式变化为线性形式如下:

$$-\delta_3 v_3 + \delta_{(3+4)}(v_3 + v_4) - \delta_5 v_5 + \delta_6 v_6 - \delta_{(7+8)}(v_7 + v_8) + \delta_8 v_8 + w = 0$$

将此式中各项加以组合即得:

$$(-\delta_3 + \delta_{(3+4)})v_3 + \delta_{(3+4)}v_4 - \delta_5 v_5 + \delta_6 v_6 - \delta_{(7+8)}v_7 + (-\delta_{(7+8)} + \delta_8)v_8 + w = 0 \quad (8-22)$$

式中 $w = \lg \sin(6) + \lg \sin\{(3) + (4)\} + \lg \sin(8) - \lg \sin\{(7) + (8)\} - \lg \sin(3) - \lg \sin(5)$ 。必须注意,在式(8-22)中 $\delta_{(3+4)}$ 为 $\lg \sin(3+4)$ 的对数秒差(1"的变化),而 $\delta_{(7+8)}$ 则为 $\lg \sin(7+8)$ 的对数秒差。

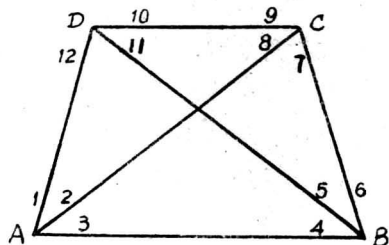


图 8-8

以上所讲的都是按角度平差时的情况。当三角网按方向平差时,列出边长条件的原理和方法与上述相同,但应当注意的是每个角度为两个方向之差,而每个方向各有其改正数。现在以图8-8为例列出大地四边形按方向平差时的条件式,以A为极可写出:

$$\frac{AD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AD} = 1$$

由此得:

$$\frac{\sin\{[9] - [8]\} \sin\{[6] - [4]\} \sin\{[12] - [11]\}}{\sin\{[12] - [10]\} \sin\{[8] - [7]\} \sin\{[5] - [4]\}} = 1 \quad (8-23)$$

将上式取对数并展开成线性形式,便得到以方向改正数表示的极条件式:

$$(\delta_{5-4} - \delta_{6-4})v_4 - \delta_{5-4}v_5 + \delta_{6-4}v_6 + \delta_{8-7}v_7 - (\delta_{9-8} + \delta_{8-7})v_8 + \delta_{9-8}v_9 + \delta_{12-10}v_{10} - \delta_{12-11}v_{11} + (\delta_{12-11} - \delta_{12-10})v_{12} + w = 0 \quad (8-24)$$

$$\text{式中 } w = \lg \sin(9-8) + \lg \sin(6-4) + \lg \sin(12-11) - \lg \sin(12-10) - \lg \sin(8-7) - \lg \sin(5-4)$$

有时边长条件中所用到的角度并未观测,但可以利用图形条件化为其他角的函数,这时边长条件的列出比较复杂些。例如图8-9所示的大地四边形中,在点C和点D都仅测了一个角,而列边长条件时无论以点C或点D为极,式中都有一个未测的角。现在以点C为极,其边长条件为:

$$\frac{CB \cdot CA \cdot CD}{CA \cdot CD \cdot CB} = \frac{\sin[2] \sin[6+x] \sin[4]}{\sin[3+4] \sin[1] \sin[6]} = 1,$$

式中必须用到角 $[6+x]$,而角 x 并未观测。由图中三角形ABD可见,

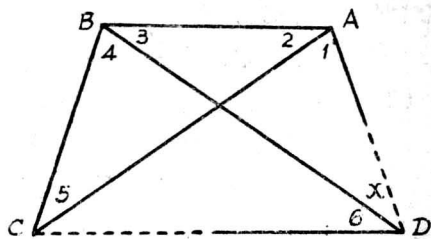


图 8-9

$$x = 180^\circ - (1) - (2) - (3)$$

或 $(6 + x) = 180^\circ + (6) - (1) - (2) - (3).$

根据这个关系，以角度改正数列出的边长条件式为：

$$\delta_2 v_2 - \delta_{3+4} (v_3 + v_4) + \delta_{6+x} (v_6 - v_1 - v_2 - v_3) - \delta_1 v_1 + \delta_4 v_4 - \delta_6 v_6 + w = 0,$$

整理后得：

$$-(\delta_1 + \delta_{6+x})v_1 + (\delta_2 - \delta_{6+x})v_2 - (\delta_{3+4} + \delta_{6+x})v_3 + (\delta_4 - \delta_{3+4})v_4 + (\delta_{6+x} - \delta_6)v_6 + w = 0. \quad (8-25)$$

§ 8-3 独立三角网中条件方程式数目的决定

图形条件、圆周闭合条件及极条件个数的总和，即为独立网条件方程式的个数。独立网按条件观测平差时，首先需要确定它们的条件数目，即确定图形条件、圆周闭合条件及极条件的数目。这是平差中很重要的一步工作，必须慎重进行。现将计算独立三角网各种条件数目的方法叙述如下：

在确定独立网内条件式数目前，先将该网图形画出。如果一个方向线在一端点上观测过的用实线画出，而在另一端点未观测过的则用虚线画出。例如图8-10中，ED方向就是半实半虚的线，说明仅从E点观测D点，而未从D点观测E点。两端皆观测过的线则皆画成实线。

并用下列符号表示各种点和线的数目：

p = 所有三角点的总数；

p' = 未设测站三角点的数目；

l = 所有连接线的总数（包括半实半虚线的数目）；

l' = 半实半虚连接线的数目。

如图8-10中，所有三角点的总数 $p = 6$ ，其中 F 未设测站，则 $p' = 1$ ，所有连接线的总数为 $l = 11$ ，其中有 $l' = 5$ 是半实半虚的连接线。

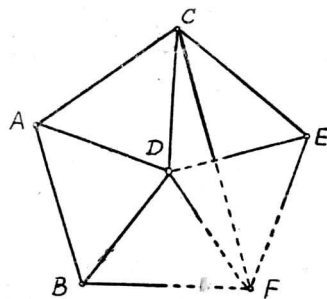


图 8-10

(一) 条件总数

设观测角度总数为 w ，此处系指每个测站上之独立角数，即在一个测站上如果有 n 个实线方向，就有 $(n - 1)$ 个独立角。但在中点多边形的中心点上，当实线方向数目为 n 时，就有 n 个独立角，如图8-10的 D 点上，实线方向数目为 4，其独立角的个数亦为 4。

由最小二乘法知道，条件的总数等于多余观测的数目。为了确定多余观测的数目，首先应确定最少必需观测值的数目。如果从一条起算边出发，此边的两端点当作已知，则不需要任何角度观测。此后每确定一个新点就最少需要观测两个角度，不管在新点上是否设测站都是一样。例如图8-10中以 AB 为起算边，为了确定 D 点必须观测三角形 ABD 中的 $\angle DAB$ 及 $\angle ABD$ 两个顶角；同样再确定 C 点时又必须观测三角形 ADC 的两个顶角，余此类推。因此，当网内三角点的总数为 p 时，除去起算边两个端点外，共有新点 $(p - 2)$ 个，就需要至少观测 $2(p - 2)$ 个角度。现在总共观测了 w 个角度，可见多余观测的数目（也就是网内条件的总数），为：

$$r = w - 2(p - 2) = w - 2p + 4. \quad (8-26)$$

对图 8—10 而言, $r = 13 - 12 + 4 = 5$.

(二) 图形条件的数目

图形条件只有在完全实线所连接的图形中才能形成。对于设测站的三角点而言, 至少需要 $(p-p') - 1$ 条实线连接。例如, 为了确定 A、B、C、D、E、F 6 个测站点(图 8—11a), 至少需要连接 \overline{BA} 、 \overline{CB} 、 \overline{DC} 、 \overline{ED} 、 \overline{FE} 5 条实线(图 8—11b), 此时因为没构成任何三角形或多边形, 故不产生图形条件。但若任意增加一条实线, 就将产生一个图形条件, 增加两条实线就产生两个图形条件, 依此类推。当网内实线连接线的数目为 $(l-l')$ 时, 图形条件数目为:

$$r_{\text{图}} = (l-l') - (p-p') + 1. \quad (8-27)$$

对图 8—10 而言,

$$r_{\text{图}} = (11-5) - (6-1) + 1 = 2.$$

显而易见, 当网内全为实线连接线时, 则公式(8—27)可写为:

$$r_{\text{图}} = l - p + 1.$$

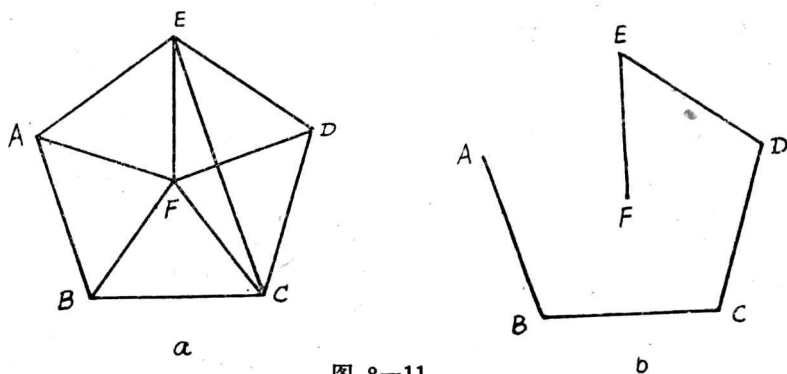


图 8—11

(三) 圆周闭合条件数目

如前所述, 在每个设测站的三角点上如果有 n 条实线方向, 仅有 $(n-1)$ 个独立角, 只有在中心点上有 n 条实线方向时, 才能构成 n 个独立角, 而且产生一个圆周闭合条件。现在网内设测站的三角点数为 $(p-p')$, 如果没有圆周闭合条件, 那末由于在每个测站点上独立角的数目应较实线方向少 1, 所以全部独立角的总数应较全部实线方向少 $(p-p')$ 。为了计算全部实线方向数目, 应当将每条实线连接线当作两个实线方向, 而每条半实半虚的连接线, 当作一个实线方向。因此全部实线方向的总数应当是 $2(l-l') + l' = 2l - l'$ 。也就是说, 当没有圆周闭合条件时, 全部独立角的数目应当是 $2l - l' - (p-p')$ 。如果观测角度的总数超出了这个数目, 每超出一个就产生一个圆周闭合条件。所以圆周闭合条件的数目可按下式计算:

$$r_{\text{圆}} = w - 2l + l' + (p-p'). \quad (8-28)$$

对图 8—10 而言,

$$r_{\text{圆}} = 13 - 2 \times 11 + 5 + (6-1) = 1.$$

事实上不必按此公式计算, 直接可从图上明显看出。因为只有图形中心的三角点才有圆周闭合条件, 有几个图形中心的三角点, 就有几个圆周闭合条件。

(四) 极条件的数目

在讲述极条件的意义时已指出，极条件是在保证由不同的路线推算同一边长时能得到同样的结果。因此假如三角网中的边只是一个一个的三角形连接起来而没有多余边的话，那么由一个边计算另一个边只有一条路线，所以就不会产生极条件。如图 8-12，连接网中三点成一个三角形最少需要三条线，不管连接线是实线或半实半虚的线。除去头 3 点之外，每增加一个三角点，至少需用两条连接线，才能构成三角形。所以当网内有 p 个三角点时，至少需要用 $3 + 2(p - 3) = 2p - 3$ 条连接线才能使各三角点都用单个三角形连接起来。这样连接时，每个三角形的每条边仅能由一条路线来计算其边长。此外每增加一条连接线，不管实线或半实半虚的线，就将产生一个极条件。现在网内全部连接线的总数为 l ，可见极条件的数目为：

$$r_{\text{极}} = l - 2p + 3. \quad (8-29)$$

对图 8-9 而言，

$$r_{\text{极}} = 11 - 2 \times 6 + 3 = 2$$

如果将 $r_{\text{图}}$ 、 $r_{\text{圆}}$ 、 $r_{\text{极}}$ 各项条件数目加起来，则为独立网条件总数，它与 (8-26) 式相同。

$$r_{\text{图}} = (l - l') - (p - p') + 1$$

$$r_{\text{圆}} = w - 2l + l' + (p - p')$$

$$r_{\text{极}} = l - 2p + 3$$

$$r = r_{\text{图}} + r_{\text{圆}} + r_{\text{极}} = w - 2p + 4.$$

事实上对图 8-10 具体进行计算的结果也是相符合的，其中 2 个图形条件（三角形 ABD 和 ACD ），2 个极条件（以 D 和 F 为极），一个圆周闭合条件（在点 D ），总共 5 个条件。

以上的讨论适用于三角网按角度平差。当三角网按方向平差时，图形条件和边长条件数目与按角度平差时相同，因为在上述推导中并未涉及角度或方向数目，只是涉及点和连接线的数目。因为按方向圆周闭合条件已不存在了，所以按方向平差条件总数应为 (8-27) 与 (8-29) 两式之和，即

$$r = r_{\text{图}} + r_{\text{极}} = 2l - l' - 3p + p' + 4. \quad (8-30)$$

(8-30) 式的正确性还可以用下法证明。如图 8-13，网中观测方向的总数显然为 $2(l - l') + l' = 2l - l'$ 。而网中至少需要观测方向的数目有：起始边两点 (A, B) 相连，需要 2 个方向，此外每增加一个不设测站的三角点，需要再加测 2 个方向（如图中为了决定 C 点加测了 AC 、 BC 方向）。而每增加一个设站的三角点，至少需要加测 3

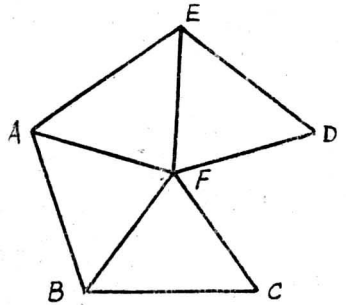


图 8-12

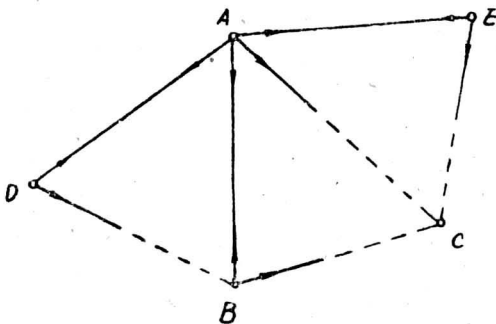


图 8-13

个方向（如图中为了确定D点要加测AD、DA、DB三个方向），显然点E的情形也一样。因此所需要的最少方向数目为：

$$2 + 3(p - p' - 2) + 2p' = 3p - p' - 4.$$

应用观测的全部方向数减去所需要的方向数，便是多余观测数，也就是按方向平差条件方程式的总数：

$$r = 2l - l' - 3p + p' + 4.$$

显然上式刚好等于图形条件和极条件数目之和。

为了保证所列的条件是独立的，即不遗漏也不重复，有时还可以利用图解法计算条件数目或者检核公式计算条件数目的正确性。此时，不考虑圆周闭合条件数目，因为该条件数目极易从图上看出。其方法如下：

先画出两个三角点及其连接綫，每增加一个三角点所产生的图形条件的个数等于新增加的实綫数（两端皆为实綫的连接綫）减去1；所产生的极条件个数等于新增加的綫数（包括半实半虚的连接綫）减去2。这是因为每增加一点及几条綫，将该点连接到已画出的三角点上，所产生的三角形个数等于新增加的綫数减去1。而每增加一点及三条綫则

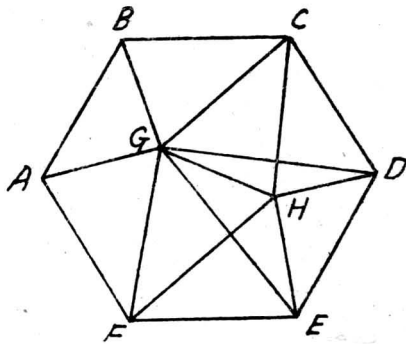


图 8-14

生一个新的大地四边形或中点多边形，如增加四条綫则产生两个新的大地四边形或中点多边形，依此类推。此外，还应注意，从每次新作成的图形里列出产生的图形条件及极条件时，必须应用新增加的各（或方向）。

举例来讲，对于图 8-14 中的三角网，此方法应用如下：

先画出 $\triangle ABG$ ，有三条綫，产生一个图形条件；这时写出这个条件。加画 C 点，增添 2 条綫，产生一个图形条件，写出此条件时要用新增加的角（或方向）。增画一点 F 时，亦同样有一个图形条件。再画出 H 点时，添 3 条綫，产生 2 个图形

表 8-1

每次增加的点	每次增加的綫	所产生的图形条件	所产生的极条件
A、B、G	3 条	1	0
C	2 条 BC GC	1	0
F	2 条 AF GF	1	0
H	3 条 CH GH FH	2	1
D	3 条 CD GD HD	2	1
E	4 条 DE HE GE FE	3	2
总数=8	17	10	4