普通高中课程标准实验教材

优质课堂1+1

高中数学

选修 2-3

浙江教育出版社

普通高中课程标准实验教材

优质课堂 1+1

高中数学

选修 2-3

主　编　朱恒元

编　者　朱恒元　郑日锋

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

优质课堂1+1：人教版. 高中数学. 2-3：选修 / 朱恒元主编. —杭州：浙江教育出版社，2009.4

ISBN 978-7-5338-7923-5

Ⅰ.优… Ⅱ.朱… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第044449号

优质课堂1+1　高中数学

选修2-3

主　　编　朱恒元
出　　版　浙江教育出版社
(杭州市天目山路40号　邮编：310013)
发　　行　浙江省新华书店集团有限公司
总 策 划　邱连根
责任编辑　金馥菊
装帧设计　韩　波
责任校对　雷　坚
责任印务　吴梦菁
图文制作　杭州富春电子印务有限公司
印刷装订　杭州印校印务有限公司

开　　本　850×1168　1/16
印　　张　7.25
字　　数　235 000
版　　次　2009年4月第1版
印　　次　2009年4月第1次印刷
印　　数　000 1—5 000
标准书号　ISBN 978-7-5338-7923-5
定　　价　11.00元

联系电话：0571-85170300-80928
e-mail：zjjy@zjcb.com
网　　址：www.zjeph.com

《优质课堂1+1》丛书编委会

（以姓氏笔画为序）

出版前言

为了更好地贯彻新课改的精神，为广大师生提供有较强针对性及操作性的辅导材料，我社组织省内部分优秀教师及教研员，依据《浙江省普通高中新课程实验学科教学指导意见》以及各学科现行使用教科书的要求，根据一轮新课程的教学实际，在原《随堂纠错超级练》的基础上，精心编写了《优质课堂 1+1》丛书。

这是一套涵盖高中各主要学科、包括课堂教学和阶段复习的同步实战型丛书。丛书的设计以帮助学生掌握基础知识、基本理论，提高学生的解题能力为目标，各栏目的设置注重对学生学习思路的拓展和学习方法的培养，适合课堂教学和课后训练。

《优质课堂 1+1》按章节编写，每节包括“课本解读”、“典例剖析”和“同步训练”等三个板块。其中，“课本解读”板块用简练的文字，从知识和能力的角度归纳整理了教科书的主要知识点，揭示了本章的重难点，为学生指点迷津。“典例剖析”选取每节典型例题，分析思路，点拨此类习题解答的基本策略和方法。“同步训练”按课时编写，从理解巩固、发展提高和高考链接三个层面，让学生在课堂学习之后，在对所学知识进行复习巩固的基础上，适当地拓展提升，同时对高考的命题特点有一个感性的认识。

本丛书的作者均为我省各学科的骨干教师和优秀教研员。他们不仅教学经验丰富，而且在习题的编制与选择方面有着深入的研究。在编写本丛书时，他们充分根据各学科的内容特点以及新课程的教学实际，为学生们提供了科学合理的训练素材，希望学生通过本丛书的学习，能在透彻理解教科书内容的基础上，循序渐进地提高自己的学习能力，掌握良好的学习方法，在高考中立于不败之地。

浙江教育出版社

2009 年 4 月

目录

MU LU

第一章 计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

课本解读

1. 分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案，在第1类方案中有m种不同的方法，在第2类方案中有n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第1步有m种不同的方法，做第2步有n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m\times n$种不同的方法.

3. 上述两个原理的探究结论

完成一件事，有几类方案，在第1类方案中有m_1种不同的方法，在第2类方案中有m_2种不同的方法，……，在第n类方案中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

完成一件事，需要分成n个步骤，做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种不同的方法.

名师点拨

分类加法计数原理和分步乘法计数原理是推导排列数和组合数计算公式的依据，其基本思想方法贯穿解决有关排列和组合应用问题的始终.

两个原理的共同点：都是有关做一件事的不同方法的种数问题. 不同点：分类加法计数原理的关键词是"分类"，其中各种方法相互独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；分步乘法计数原理的关键词是"分步"，其中各个步骤中的方法相互依存，只有各个步骤都完成才算做完这件事.

分类加法计数原理与分步乘法计数原理(1)

典例剖析

例1 某外贸公司只会英语的有15人，只会日语的有7人，只会德语的有3人，其余的人都不懂外语. 若要选派1名懂外语的人去参加一个国际交易会，问：有多少种不同的选法？

解 从懂外语的人中选派1名，有3类方案：第1类方案，从只会英语的人中选派1名，有15种方法；第2类方案，从只会日语的人中选派1名，有7种方法；第3类方案，从只会德语的人中选派1名，有3种方法. 根据分类加法计数原理，不同选法的种数是$N=m_1+m_2+m_3=15+7+3=25$.

因此，该公司选派1名懂外语的人去参加一个国际交易会，有25种不同的选法.

注 意

求完成某一件事的方法数，首先要搞清完成这一件事的方法是需要"分类"，还是需要"分步"，然后考虑选择分类加法计数原理，还是分步乘法计数原理. 在取1个对象的情况下，通常只需分类，选用分类加法计数原理.

例2 一家公司的办公大楼里有28个部门，如果每个部门都安装1个电话分机，那么用1，2，3这3个数字所组成的三位数作为各分机的号码够不够？

解 用1，2，3这3个数字组成1个三位数，可以分3个步骤完成：第1步，从3个数字中取1个作为百位数，有3种不同的取法；第2步，从3个数字中取1个作为十位数，有3种不同的取法；第3步，从3个数字中取1个作为个位数，有3种不同的取法. 根据分步乘法计数原理，所组成的不同三位数有$N=m_1\times m_2\times m_3=3\times3\times3=27$(个).

因为办公大楼里有28个分机，而能组成的三位数

号码只有27个，所以是不够的.

注 意

运用分步乘法计数原理的关键是确定完成事件需要多少个步骤，每个步骤的做法，以及有多少种不同的方法数. 步骤的确定要便于方法数的统计，做到不重复、不遗漏.

例3 完成某项工作原来需要4个步骤，每步的方法数相等，完成这项工作共有81种方法. 技术革新后完成这项工作减少了1个步骤，完成其余步骤的方法数不变. 问：有多少种不同的方法数？

解题思路 技术革新前后每一步的方法数相等，故应求出这个方法数.

解 设每一步都有x种不同的方法. 根据题意可得$x^4=81$，解得$x=3$. 因此，技术革新后完成该项工作的不同的方法数有$3^3=27$.

例4 4名同学去争夺三项冠军，且每项只有1个冠军，问：共有多少种不同的冠军获得情况？

解 对夺得每项冠军的情形进行分步. 第1步，第1项冠军一定被4名同学中其中1名且只能是1名同学获得，因此，共有4种不同的获得情况；第2步、第3步是其余两项冠军分别被4名同学中的1名获得，各有4种不同的获得情况. 由分步乘法计数原理可知，一共有$4\times4\times4=4^3=64$(种)不同的冠军获得情况.

思考 下列两种错误的解法，其错误原因在哪里？

错解1 分步：第1步，第1位同学去夺三项冠军，有可能1个不得，也可能夺得1个或2个或全部，因此，共有4种不同的情形；以下3步分别由剩下的3名同学去夺这三项冠军，均各有4种不同情形. 由分步乘法计数原理可知，一共有$4\times4\times4\times4=4^4$(种)夺得冠军的情形.

错解2 分4步：第1步，第1位同学去争夺三项冠军有3种可能，以下3步分别让剩下的3名同学去争夺三项冠军，均有3种可能. 因此，由分步乘法计数原理可知，一共有$3\times3\times3\times3=3^4=81$(种)夺得冠军的情形.

错误原因 完成这件事(争夺三项冠军)，每一项冠军都有人夺得. 错解1不能保证这一点，因为若4位同学都不得冠军，则与题意不符. 从错解2的分步情况看，可能有一项冠军有不止1人夺得，这与实际显然不符.

同步训练

理解巩固

1. 某公共汽车上有10名乘客，要求在沿途的5个车站全部下车，则这10名乘客下车的可能方式的种数有 ( )

(A) 5^{10}. (B) 10^5. (C) 50. (D) 15.

2. 某班有男生26人，女生24人，从中选1名同学为数学课代表，则不同的选法种数有 ( )

(A) 50. (B) 26. (C) 24. (D) 616.

3. 已知函数$y=ax^2+bx+c$，其中$a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$，则不同的二次函数的个数是 ( )

(A) 125. (B) 15. (C) 100. (D) 10.

4. 若$x\in\{1,2,3\}$，$y\in\{4,5,6\}$，则点(x,y)的不同个数为 ( )

(A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 27.

5. 某商场共有4个门，购物者若从1个门进去，必须从另1个门出来，则不同的走法种数是________.

6. 3名学生报名参加艺术体操、美术、信息技术和游泳课外兴趣小组，每人选报1种，则不同的报名种数是________.

7. 已知$a\in\{-1,2,3\}$，$b\in\{0,3,4,5\}$，$r\in\{1,2\}$，则方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$所表示的不同圆有________个.

8. 某班有男生30人，女生20人，选1人去参加座谈会. 问：

(1) 有几类选法？

(2) 每类各有多少种不同的选法？

(3) 一共有多少种不同的选法？

9. 某班有男生23人，女生22人，选男生、女生各1人去参加座谈会. 问：

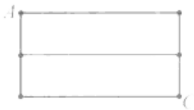
(1) 这件事情可以分几步完成？

(2) 每步各有多少种不同的选法？

(3) 一共有多少种不同的选法？

发展提高

10. 1 个街区的道路如图，如果从 A 地去 C 地，每段路只能经过 1 次，那么有多少种不同的走法？



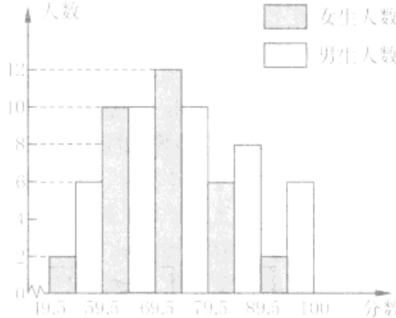
（第 10 题）

11. 已知直线 $l_1 // l_2$，A，B，C 是直线 l_1 上的 3 个点，D，E，F，G 是直线 l_2 上的 4 个点. 若从 A，B，C 中取 1 个点，再从 D，E，F，G 中取 1 个点，过所取的 2 个点作直线，则可以作出多少条不相同的直线？

12. 在 1 条线段上（端点除外）取 6 个点，以这 6 个点和线段的两个端点为端点的不同线段有多少条？

13. 1 种号码锁有 3 个拨盘，每个拨盘上有 0，1，2，…，9 共 10 个数码. 若要生产 200 把这种号码锁，则每个拨盘至少要配置多少个不同的一位数的数字？

14. 对 1 次数学测验的 72 名学生的成绩统计如图（分数皆为整数）. 现要从 60 分以下（不包括 60 分）、60 分～79 分、80 分～100 分的各分数段中抽男、女生各 1 名参加 1 个座谈会，则有多少种不同抽法？



（第 14 题）

分类加法计数原理与分步乘法计数原理(2)

典例剖析

例 1 1 个袋子里装有 10 张不同的中国移动充值卡，另 1 个袋子里装有 12 张不同的中国联通充值卡.

(1) 小王要从 2 个袋子中任取 1 张充值卡，共有多少种不同的取法？

(2) 小王想得到 1 张中国移动充值卡和 1 张中国联通充值卡，共有多少种不同的取法？

解题思路 第(1)题，可从 10 张不同的中国移动充值卡中任取 1 张，或从 12 张不同的中国联通充值卡中任取 1 张，每类方法都能完成这件事，故运用分类加法计数原理. 第(2)题，从中国移动充值卡、中国联通充值卡中各取 1 张，需要分 2 步完成，故运用分步乘法计数原理.

解 (1) 根据分类加法计数原理，不同的取法种数是 $N=10+12=22$.

(2) 根据分步乘法计数原理，不同的取法种数是 $N=10\times12=120$.

思考 第(1)题的“分类”和第(2)题的“分步”与先取哪种手机充值卡有没有关系？（无关）

例 2　(1) 5 名同学分配到 3 个课外小组，共有几种分配方法？

(2) 5 名同学争夺三项竞赛的冠军，且每项冠军只有 1 个，冠军获得者共有几种可能情况？

解　(1) 每名同学去"选择"任何 1 个小组，故分配方法种数共有 $N=3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$.

(2) 每项冠军都可"选择"任何 1 名同学，故可能情况的种数共有 $N=5\times5\times5=5^3=125$.

例 3　如图 1-1、图 1-2，在由开关组 A 与 B 所组成的电路中，要接通电源，使电灯发光的方法各有多少种？

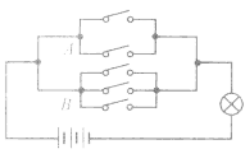


图 1-1

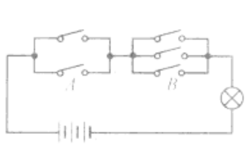


图 1-2

解题思路　如图 1-1，合上开关组 A、B 中任意一个开关，电灯即发光，故用分类加法计数原理；如图1-2，只有先合上开关组 A 中的任意 1 个开关，然后合上 B 的任意 1 个开关，电灯才发光，故用分步乘法计数原理.

解　如图 1-1，使电灯发光的方法种数共有

$N=2+3=5$；

如图 1-2，使电灯发光的方法种数共有 $N=2\times3=6$.

例 4　已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，其中 a_i，b_j $(i=1,2,3,4;j=1,2)$ 都为实数.

(1) 从集合 A 到集合 B 能构成多少个不同的映射？

(2) 能构成多少个以集合 A 为定义域，集合 B 为值域的不同函数？

解题思路　要正确运用"映射"与"函数"的概念解题.

解　(1) 集合 A 中的每 1 个元素与集合 B 中元素的对应方法都有 2 种，由分步乘法计数原理，从集合 A 到集合 B 能构成的映射个数是 $2\times2\times2\times2=16$.

(2) 在(1)的映射中，a_1，a_2，a_3，a_4 均对应 1 个元素 b_1 或 b_2 的情形，构不成以 A 为定义域，B 为值域的函数，这样的映射有 2 个，因此，构成以 A 为定义域，B 为值域的函数的个数共有$16-2=14$.

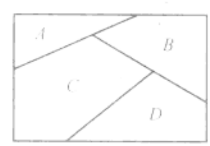
注　意

解第(2)题的关键是从方法总数中减去不符合条件的方法数.

同步训练

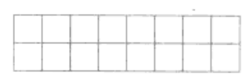
理解巩固

1. 某同学逛书店，发现 3 本喜欢的书，决定至少买其中 1 本，则购买方案的种数是　　　　.　(　　)
   (A) 3.　(B) 6.　(C) 7.　(D) 9.
2. 设椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 的焦点在 y 轴上，$m\in\{1,2,3,4,5\}$，$n\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，则这样的椭圆的个数是　(　　)
   (A) 18.　(B) 19.　(C) 20.　(D) 21.
3. 把 9 个相同的小球放入编号分别为 1，2，3 的 3 个箱子里，要求每个箱子中放入球的个数不小于其编号数，则不同的放球方法种数共有　(　　)
   (A) 8.　(B) 10.　(C) 12.　(D) 16.
4. 现有不同的中文书 9 本，不同的英文书 7 本和不同的法文书 5 本，从中选出不属于同一种语言的书 2 本，则不同的选法种数为　(　　)
   (A) 142.　(B) 143.　(C) 144.　(D) 145.
5. $(a+b+c)(m-n)(x+y)$展开后，共有________项.
6. 如图，用 5 种不同的颜色给图中 A，B，C，D 4 个区域涂色，规定每个区域只涂 1 种颜色，相邻区域颜色不同，则有________种不同的涂色方法.



(第 6 题)

7. 如图所示的图形中共有________个矩形.



(第 7 题)

8. 有 3 个袋子，分别装有不同编号的红色小球 6 个，白色小球 5 个，黄色小球 4 个.
   (1) 从袋子里任取 1 个小球，有多少种不同的取法？
   (2) 从袋子里任取红色、白色、黄色小球各 1 个，有多少种不同取法？

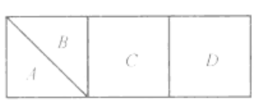
9. 求 4 320 的不同的正约数的个数.

发展提高

10. 3 条边长都为整数,且最大边长为 11 的三角形共有多少个?

11. 满足 $A\cup B=\{1,2\}$ 的集合 A,B 共有多少组?

12. 用 5 种不同的颜色给如图所示的 A,B,C,D 4 个区域涂色,规定每个区域只涂 1 种颜色,相邻区域颜色不同,则有多少种不同的涂色方法?



(第 12 题)

13. 某赛季足球比赛的计分规则是:胜 1 场,得 3 分;平 1 场,得 1 分;负 1 场,得 0 分. 某支球队打完 15 场,积 33 分. 若不考虑顺序,则该队胜、负、平的情况的种数共有 ( )
(A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

第 3 课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理(3)

典例剖析

例 1 1 把数字密码锁共有 5 个号码,每个号码的圆盘上有 0,1,2,…,9 共 10 个数码. 现给这把锁确定 1 个开锁的密码. 有 1 个人在这把锁上随意拨出 5 位号码,它刚好能开启这把锁的可能性是多少?

解题思路 "拨出 5 位号码"这件事可分成 5 个步骤完成,即分别确定第 1 位至第 5 位数字.

解 随意拨出 5 位号码的个数共有 $10\times10\times10\times10\times10=10^5$,因此,它刚好能开启这把锁的可能性是 $\frac{1}{10^5}$.

注 意

本题还可看成是 1 个数字可以重复的"五位数"(前面可以有若干个零)的问题. 由00 000~99 999 的"五位数"个数共有 $99\ 999-0+1=10^5$,故随意拨出 1 个号码,它刚好能开锁的可能性为 $\frac{1}{10^5}$.

例 2 现有 1 角币 1 张,2 角币 1 张,5 角币 1 张,1 元币 4 张,5 元币 2 张. 用这些币值任意付款,可以付出不同数额的款共有多少种?

解 用角币可得到的币值有:1 角,2 角,3 角,5 角,6 角,7 角,8 角,共 7 种;用元币得到的币值有:1 元,2 元,3 元,4 元,5 元,6 元,7 元,8 元,9 元,10 元,11 元,12 元,13 元,14 元,共 14 种. 故所有币值的种数为 $7+14+7\times14=119$.

注 意

分步计数与分类计数的结合.

例 3 如图 1-3,椭圆的长轴和短轴把椭圆分成 4 块,现在用 5 种不同的颜料给椭圆的 4 块涂色,要求相邻 2 块颜色互异,每块只涂 1 种颜色. 问:一共有多少种不同的涂色方法?

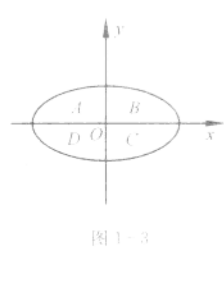


图 1-3

解 给 A 涂色有 5 种方法,给 B 涂色有 4 种方法.

当C与A异色时，给C涂色有3种方法，给D涂色有3种方法，共9种方法；

当C与A同色时，给C涂色有1种方法(与A同色)，给D涂色有4种方法.

由计数原理，得不同的涂色方法种数共有

$5\times4\times(9+4)=260$.

注　意

如果不考虑C区域的涂色会直接影响D区域的涂色，就会得出不同的涂色方法种数为$5\times4\times4\times3=240$的错误结果.

例4　由数字0，1，2，3，4，5，6这7个数字可组成多少个无重复数字的四位偶数？

解题思路　四位偶数首位数字不能为0，末位数字需是偶数，且没有重复数字，因此，应先分类，然后分步.

解　(1) 当首位取奇数数字(可取1，3，5中任1个)时，则末位数字可取0，2，4，6中任1个，而百位数字不能取与这2个数字重复的数字，十位又不能取与这3个数字重复的数字，故组成无重复数字的四位偶数的个数共有$3\times4\times5\times4=240$.

(2) 当首位取2，4，6中某个偶数数字(如2)时，则末位只能取其余3个偶数数字(0，4，6)中任1个，百位又不能取与上述重复的数字，十位不能取与这3个数字重复的数字，故组成无重复数字的四位偶数的个数共有$3\times3\times5\times4=180$.

因此，组成无重复数字的四位偶数的个数共有$240+180=420$.

同步训练

理解巩固

1. 从A地去B地的道路有2条，从B地去C地的道路有3条，从A地直接去C地(不经过B地)的道路有2条，那么从A地去C地的不同走法的种数是　(　　)

(A) 6.　(B) 7.　(C) 8.　(D) 12.

2. 把10个苹果分成3堆，要求每堆至少1个，至多5个，则不同分法的种数是　(　　)

(A) 4.　(B) 5.　(C) 6.　(D) 7.

3. 5位同学报名参加2个课外活动小组，每位同学限报其中的1个小组，则不同的报名方法共有(　　)

(A) 10种.　(B) 20种.　(C) 25种.　(D) 32种.

4. 现在要排1份5天的值班表，每天有1个人值班. 设共有5个人，每个人都可以值多天班或不值班，但相邻2天不准由同1个人值班，则此值班表不同的排法种数是　(　　)

(A) 1 280.　(B) 720.　(C) 120.　(D) 24.

5. 在1～20共20个整数中取2个数相加，使其和为偶数的不同取法共有________种.

6. 电子计算机的输入纸带中，每排有8个穿孔位置，每个穿孔位置可穿孔或不穿孔，则每排最多可产生________种不同的信息.

7. 已知集合$A\subsetneqq\{1,2,3\}$，且A中至少有1个奇数，则这样的集合有________个.

8. 某人射击8枪，命中4枪，命中的4枪恰有3枪连在一起，则有多少种不同的射击结果？

9. 4张卡片的正、反面分别写有0与1，2与3，4与5，6与7，将其中3张卡片排放在一起，则可组成多少个不同的三位数？

发展提高

10. 在所有的两位数中，个位数字比十位数字大的数共有　(　　)

(A) 45个.　(B) 44个.

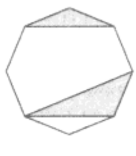
(C) 38个.　(D) 36个.

11. 某体育彩票规定：从01～36共36个号中抽出7个号为一注，每注2元. 某人想从01～10中选3个连续的号，从11～20中选2个连续的号，从21～30中选1个号，从31～36中选1个号组成一注，则这人把这种特殊要求的号买全，至少要花　(　　)

(A) 3 360元.　(B) 6 720元.

(C) 4 320元.　(D) 8 640元.

12. 如图，在连接正八边形的3个顶点而成的三角形与正八边形有公共边的三角形有________个.



（第12题）

13. 在自然数1～200中，有多少个不含数字5的数?

14. 书架上原来并排放着5本书，现要再插入3本不同的书，则有多少种不同的插法?

高考链接

15. (2008·全国卷)将1,2,3填入3×3的方格中，要求每行、每列都没有重复数字，下面是一种填法，则不同的填写方法共有（　　）

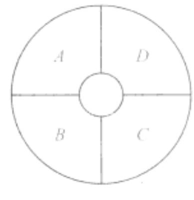
1	2	3
3	1	2
2	3	1

(A) 6种. (B) 12种. (C) 24种. (D) 48种.

16. (2008·全国卷)如图，一环形花坛分成A,B,C,D 4块. 现有4种不同的花供选择，要求在每块种1种花，且相邻的2块种不同的花，则不同的种法总数为（　　）

(A) 96. (B) 84.

(C) 60. (D) 48.



（第16题）

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

课本解读

1. 排列的定义

从n个不同元素中取出m $(m\leqslant n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的1个排列.

2. 排列数

从n个不同元素中取出m $(m\leqslant n)$个元素的所有不同排列的个数叫做从n个不同元素中取出m个元素的排列数，用符号A_n^m表示.

3. 排列数公式

$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$\mathrm{A}_n^n=n!$

$\mathrm{A}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

名师点拨

当元素的数目不大时，画“树形图”能把完成排列的各个步骤以及每个步骤的方法数直观化，帮助我们在求排列数时做到不重不漏.

判断是不是排列问题的主要依据是：(1)所给的n个元素是不是互不相同(包括取出的m个元素)；(2)取出的m个元素是不是和顺序有关.

排列数公式$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$适用于计算，当$m$较小时可较为简便地解不等式和方程. 公式$\mathrm{A}_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$一般用于证明.

常见排列应用题的题型及其解法有下列几种：(1)无限制的排列应用题，直接利用排列数公式计算；(2)有限制条件的排列应用题，采用直接或间接法计算；(3)含“特殊元素”、“特殊位置”的应用题，优先考虑特殊元素、特殊位置，即用元素分析法、位置分析法；(4)特殊元素“相邻”与“不相邻”的应用题，相邻问题常用“捆绑法”，不相邻问题常用“插空法”，等等.

排列(1)

典例剖析

例1 判断下列问题是否是排列问题：

(1) 从7名同学中选出5名同学去完成5种不同的工作，每人完成1种，有多少种不同的选派方法？

(2) 从7名同学中选出5名同学去完成1件工作，有多少种不同的选派方法？

解 (1) 是排列问题，工作不同则排法不同，与顺序有关.

(2) 不是排列问题，同做1件工作与顺序无关.

例2 A、B、C 3名同学排成一排合影留念，写出所有的排法.

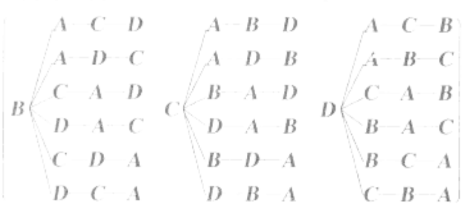
解题思路 画出"树形图".

解 先确定左边第1个，然后确定第2人，最后确定第3人，用树形图表示，如图1-4所示.

图1-4

所有的排法有 ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA.

思考 A、B、C、D 4个人坐成一排，其中 A 不坐在排头，有多少种坐法？



例3 用0、1、2、3这4个数字能组成多少个无重复数字且3不在十位上的四位数？

解题思路 因3不在十位上，0不能排在千位上，3和0是特殊元素，十位和千位是特殊位置，故可用元素分析法或位置分析法.

解 画树形图列出所有可能的排列，如图1-5所示.

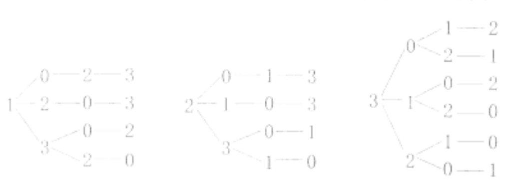


图1-5

符合条件的四位数共有14个.

例4 同室4个人各写1张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿1张别人写的贺年卡，写出4张贺年卡的不同分配方式.

解 设4个人分别为甲、乙、丙、丁，所写贺年卡分别为 A、B、C、D. 不同的分配方式如图1-6所示.

图1-6

同步训练

理解巩固

1. 从1、2、3、5、7、11、13、17、19这9个数中任取2个数，给出下列问题：
①取出的2个数相加，可得多少个不同的和；
②取出的2个数相减，可得多少个不同的差；
③取出的2个数相乘，可得多少个不同的积；
④取出的2个数相除，可得多少个不同的商.
其中属于排列问题的是　　　　( )
(A) ①③.　(B) ②④.　(C) ②③.　(D) ①④.

2. 北京、上海、杭州3个民航站之间的直达航线，需准备_______种飞机票，它们是______________.

3. 从 a、b、c、d、e 这5个元素中每次取出3个元素，可以组成_______个以 b 为首的不同的排列，它们分别是____________________.

4. 若 A、B、C、D 4人排成一列，写出符合下列条件的不同排法：
(1) A、B 相邻；
(2) A、B 相邻，C、D 相邻；
(3) A、B、C 相邻.

发展提高

5. 设二次函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 a,b,c 两两不同，且 $a,b,c\in\{-2,-1,0,1,2\}$，则图象为开口向上且过原点的抛物线有多少条？请一一列出.

6. 现有 A,B,C,D 4 人参加 4×100 m 接力赛，要求 A 不跑第 1 棒，B 不跑第 2 棒，C 不跑第 3 棒，D 不跑第 4 棒，则有多少种不同的编排顺序？

第2课时 排列(2)

典例剖析

例 1 计算：$\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}$.

解题思路 利用排列数公式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 求解.

解 $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}=\dfrac{(9-5+1)A_9^4+A_9^4}{(10-6+1)A_{10}^5-A_{10}^5}=\dfrac{6A_9^4}{4A_{10}^5}=\dfrac{6A_9^4}{4\times10A_9^4}=\dfrac{3}{20}$.

注 意

计算时要注意观察，灵活运用连乘形式的排列数公式，以减少计算量.

例 2 求证：$A_{n+1}^m-A_n^m=mA_n^{m-1}$.

解题思路 本题既可用阶乘形式的排列数公式证明，也可用排列和排列数定义进行证明.

证法 1 $\because$ $A_{n+1}^m-A_n^m=\dfrac{(n+1)!}{(n+1-m)!}-\dfrac{n!}{(n-m)!}$

$=\dfrac{n!}{(n-m)!}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n+1-m}-1\right)$

$=\dfrac{n!}{(n-m)!}\cdot\dfrac{m}{n+1-m}=m\cdot\dfrac{n!}{(n+1-m)!}=mA_n^{m-1}$.

$\therefore$ $A_{n+1}^m-A_n^m=mA_n^{m-1}$.

证法 2 A_{n+1}^m 表示 $n+1$ 个元素中取 m 个元素的排列个数，其中不含元素 a_1 的有 A_n^m 个，而含 a_1 的可这样进行排列：先排 a_1，有 m 种排法，然后从另外 n 个元素中取出 $m-1$ 个元素排在剩下的 $m-1$ 个位置上，有 A_n^{m-1} 种排法，故含 a_1 的排法有 $mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m-A_n^m$.

例 3 由 1，4，5，x ($x\neq0$) 这 4 个数字组成没有重复数字的四位数，若所有的四位数的各数位上的数字之和为 288，求 x 的值.

解题思路 4 个数字可组成 A_4^4 个没有重复数字的四位数，由于组成的四位数没有重复数字，故数字之和为 $1+4+5+x$.

解 由题意，得 $A_4^4\cdot(1+4+5+x)=288$.

$\therefore$ $24(10+x)=288$，解得 $x=2$.

例 4 1 条铁路原有 n 个车站，为适应客运需要，新增加了 m ($m>1$) 个车站，客运车票增加了 62 种. 问：原有多少个车站？现有多少个车站？

解 $\because$ 原有 n 个车站，

$\therefore$ 原有客运车票 A_n^2 种.

又现有 $n+m$ 个车站，现有客运车票 A_{n+m}^2 种，由题设知，$A_{n+m}^2-A_n^2=62$，

$\therefore$ $(n+m)(n+m-1)-n(n-1)=62$，

$\therefore$ $2mn+m^2-m=62$，

$\therefore$ $n=\dfrac{31}{m}-\dfrac{1}{2}(m-1)>0$，

$\therefore$ $\dfrac{31}{m}>\dfrac{1}{2}(m-1)$，

$\therefore$ $62>m(m-1)$，即 $m^2-m-62<0$.

又 $\because$ $m>1$，$\therefore$ $1<m<\dfrac{1+\sqrt{249}}{2}$，

$\therefore$ $1<m\leq8$.

当 $m=2$ 时，$n=15$；当 $m=3,4,5,6,7,8$ 时，n 均不为整数. $\therefore$ $n=15$，$m=2$.

$\therefore$ 原有 15 个车站，现有 17 个车站.

注 意

解简单的排列应用题，首先必须认真分析题意，能否把问题归结为排列问题，即是否"有顺序". 如果是排列问题，n 个不同的元素指的是什么，以及从 n 个不同的元素中任取 m 个元素的每一种排列对应的是什么事件，然后运用排列数公式求解.

同步训练

理解巩固

1. $100\times 99\times 98\times\cdots\times 88$ 等于　　（　　）

(A) A_{100}^{88}.　(B) A_{100}^{11}.　(C) A_{100}^{12}.　(D) A_{100}^{13}.

2. $4\times 5\times\cdots\times(n-1)\times n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 等于　　（　　）

(A) A_n^4.　　(B) A_n^{n-4}.

(C) $n!-4!$.　　(D) A_n^{n-3}.

3. 下列各式与排列数 A_n^m 相等的是　　（　　）

(A) $\dfrac{m!}{(n-m)!}$.

(B) $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)$.

(C) $\dfrac{n}{n-m+1}A_n^{m-1}$.

(D) $A_n^1A_{n-1}^{m-1}$.

4. 设 $m\in\mathbf{N}^*$，且 $m<15$，则 $(15-m)(16-m)\cdots(20-m)$ 等于　　（　　）

(A) A_{15-m}^{6}.　(B) A_{20-m}^{15-m}.　(C) A_{20-m}^{5}.　(D) A_{20-m}^{6}.

5. 已知 $\dfrac{A_n^7-A_n^5}{A_n^5}=89$，则 $n=$________.

6. 方程 $A_{2x+1}^4=140A_x^3$ 的解集是________.

7. 6 名同学排成一排照相，有________种不同的排法.

8. 计算：$\dfrac{A_9^5-A_9^6}{2A_9^4+4A_9^5}$.

9. 在 1,2,3,4,5 这 5 个数字组成的没有重复数字的三位数中，各位数字之和为奇数的共有多少个？

发展提高

10. 不等式 $xA_3^2>3A_x^2$ 的解集是　　（　　）

(A) $\{x|x>3\}$.

(B) $\{x|x>4,x\in\mathbf{N}\}$.

(C) $\{x|3<x<4,x\in\mathbf{N}\}$.

(D) $\{x|x>3,x\in\mathbf{N}\}$.

11. 给出下列 4 个等式：

①$n!=\dfrac{(n+1)!}{n+1}$；　②$A_n^m=mA_{n-1}^{m-1}$；

③$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$；　④$A_{n-1}^{m-1}=\dfrac{(n-1)!}{(m-n)!}$.

其中正确的个数是　　（　　）

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

12. 若 $S=A_1^1+A_2^2+A_3^3+A_4^4+\cdots+A_{100}^{100}$，则 S 的个位数是________.

13. 解不等式 $A_{n-1}^{2}+n>2$.

14. 将数字 0 与 1,2 与 3,4 与 5 分别写在 3 张卡片的正、反面，每面写 1 个数字，用这 3 张卡片可依次排成多少个三位数？

15. 直线 $y=\pm x$ 将圆 $x^2+y^2=4$ 分成 4 块，用 5 种不同的颜料给这 4 块涂色，要求共边的 2 块颜色互异，且每块只涂 1 种颜色. 问：共有多少种不同的涂色方法？

第3课时　排列(3)

典例剖析

例 1　6 人按下列要求站一横排，分别有多少种不同的站法：

(1) 甲不站在右端，也不站在左端；

(2) 甲、乙站在两端；

(3) 甲不站在左端，乙不站在右端.