南京大学金陵学院 王国英 编著

# 工程数学

## 微积分（一）

清华大学出版社

南京大学金陵学院 王国英 编著

# 工程数学

## （一）

## 微积分

清华大学出版社
北京

## 内容简介

本套《工程数学》是为高等学校计算机、电子、通信类专业编写的数学教材，共分3册. 本书是第1册，内容包括函数与极限、导数与微分、不定积分与定积分、级数、空间解析几何、偏微分学、重积分、曲线积分、曲面积分理论和广义积分. 本书着眼于基本概念、基本原理和基本方法，强调直观性和应用背景，注重可读性，方便自学. 另外配有教学参考书《工程数学习题与解答》供教师、学生参考使用.

本书可供高等学校工科和其他非数学类专业学生使用，也可作为其他层次院校的工程数学课程的教材或参考书.

**版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933**

**图书在版编目（CIP）数据**

工程数学(一)微积分 / 王国英编著. —北京：清华大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-302-20919-5

Ⅰ. 工…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 工程数学—高等学校—教材　Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第156536号

**责任编辑**：冯　昕
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：何　芊

**出版发行**：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质量反馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者**：北京市清华园胶印厂
**经　销**：全国新华书店
**开　本**：185×230　**印　张**：20.5　**字　数**：445千字
**版　次**：2009年9月第1版　**印　次**：2009年9月第1次印刷
**印　数**：1～3000
**定　价**：29.80元

---

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换.
联系电话：010-62770177 转 3103　　产品编号：034658-01

# 序 言

数十年来，我一直感到计算机专业学生在大学期间要学"大学数学"3 学期，"概率与统计"1 学期，"数值方法"1 学期，"离散数学"1 学期，累计共有 6 学期的数学课，占用的学时太多，并且教材内容过于强调理论推导，而后继专业课需要的一些知识如复变函数、积分变换却很少涉及. 结果教师难教，学生难学，教学效果差. 原因很多，其中之一是缺少一本好的涉及面宽、结合实际、比较直观、由浅入深、适于培养应用型人才和工程型人才的《工程数学》教材. 这类教材国外较多. 2005 年南京大学金陵学院院长姚天扬教授一行访问英国时，Essex 大学赠送给他们的一本该校所用的《工程数学》就是这样的教材.

南京大学金陵学院为了推动"大学数学"和"离散数学"等课程的改革，特邀具有丰富教学经验、长期从事"大学数学"、"线性代数"、"离散数学"和"数值方法"等课程教学工作的南京大学数学系王国英教授主持这项工作. 王国英教授等经过多年苦心钻研和一年多在金陵学院计算机专业的试教，编著了这套《工程数学》教材. 本教材有下列特色：

(1) 它是根据国内工程类专业和应用类专业需求，结合实际教学情况，参考国外新近出版的《工程数学》教材写成的. 它强调打好应用基础，为后继专业课服务，而不是像过去有关教材那样只是从数学到数学，缺少与工程类专业和应用类专业有关知识的联系.

(2) 内容结合实际、涉及面宽. 它由微积分、复变函数、积分变换、线性代数、数值方法、概率与统计，以及离散数学等内容组成，每章均配有例题和习题，几乎涵盖了工程类专业和应用类专业所需的所有数学基本知识.

(3) 使用该教材只需要 3 学期，但对工程类专业和应用类专业的本科生来说，所学的知识已经基本满足需要，这样他们就可以有更多的时间学习其他重要课程.

(4) 讲法直观，如定积分的定义不从积分和的极限抽象定义出发，而由曲边梯形面积的计算引入，避免了过于繁琐的推导和过于理论化的论述.

(5) 注重讲解基本概念、基本原理和基本知识，注意培养和提高学生的

逻辑思维能力、解题能力和应用数学知识解决实际问题的能力.

（6）结构紧凑，系统性强，避免了过去各门课程部分内容重复的情况. 如以前概率统计和离散数学都要讲一遍计数基础，本教材就没有这种情况.

总之，这是一本在国内十分紧缺、非常急需、与国际上所用的《工程数学》教材接轨、富有特色的新教材. 它可作为高等院校，特别是应用型高校、独立学院、民办院校培养工程型人才和应用型人才有关专业的教科书，也可作为相关人员的自学参考书.

南京大学金陵学院
计算机专业主任、博士生导师、教授
**张德富**
2009 年 4 月 23 日

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 前言

本套《工程数学》是南京大学金陵学院的一个教改项目，是根据高等学校计算机、电子信息、通信工程等专业工程数学的教学要求而编写的. 工程数学是以上各专业的重要基础课，教材的写作目标就是向读者展示工程数学的实用性，为相关专业的学生提供必要的数学基础知识.

本套教材较全面地介绍了工程数学的理论和方法. 共分 3 册，包括 7 大部分，内容涉及微积分、复变函数、积分变换、线性代数、数值方法、概率统计及离散数学. 教材取材较为广泛，除包括对定义、理论的深入浅出的陈述外，还配备了大量的实例、图表；为培养学生的解题技巧和分析问题的能力，还选配了不少难易程度不同的例题和习题. 内容由浅入深，层次分明，各部分既有联系，又相对独立，通俗易懂，便于自学.

目前，国内外已出版了不少工程数学教材，有许多值得学习和借鉴之处. 在编写本教材时，编者虚心听取了校内外同行的建议和指教，并参考了不少有关教材（如清华大学、南京大学、浙江大学、同济大学等高校出版的有关教材）. 本书学习国内外教材的经验，简化了微积分中的某些概念，强调直观和应用背景，大大减少了初学者的困难；还听取了有关专家的建议，在离散数学中加入了递归、生成函数、鸽舍原理等有实际应用价值的内容.

作为教材，本书在编写时充分考虑了不同层次读者的需要. 本书打“*”部分的内容可以作为选讲部分；习题分为 A、B 两组，A 组是必须掌握的基本内容，B 组要求较高，对有志考研的学生大有裨益，一般学生可以不做. 本教材已在计算机、软件、电子、通信等专业试用过，分 3 个学期讲完，每学期 100 学时. 如果时间不够，第 1 册中的第 5 章广义积分、第 6 章微分方程和差分方程简介及第 8 章中的理论可少讲或不讲；第 2 册“线性代数”中的第 9 章欧氏空间与二次型可略讲或不讲，“数值方法”可以不讲；第 3 册“概率与统计”中的第 9 章、第 10 章以及“离散数学”中第 1 章的第 8 节和第 9 节、第 4 章和第 5 章可适当少讲或不讲；这些内容可作为学生的课外阅读材料.

在本书的编写和出版过程中，自始至终得到了南京大学金陵学院院长姚天扬教授，信息科学与工程系主任李元教授、张德富教授及马传渔教授、田志

明老师的关心和帮助.同时要感谢清华大学出版社的王海燕副编审、冯昕编辑以及金陵学院的刘晶晶同志，她们为本书的出版付出了辛勤的劳动.南京大学数学系吴兆金副教授参与了编写并提了许多有益的建议，在此一并感谢.

由于作者学识和经验有限，书中不当之处在所难免.敬请专家、同行和读者不吝赐教.

南京大学金陵学院

**王国英**

2009 年 6 月

# 目 录

# 第 1 章

# 预备知识

## 1.1 集合

本章首先介绍学习微积分所必需的一些基本概念：集合、实数集、点的邻域、映射与函数.

### 1. 集合

集合(set)已成为现代数学的一个基本概念，它最早是由德国数学家康托尔(G. Cantor)引入的. 开始不少数学家对集合的定义尚有争论，后来越来越多的数学家发现集合的概念在数学的许多领域都十分有用，能带来很多方便. 因此现代数学的各个分支都采用了集合及集合间的运算. 一般来讲，一个集合是指具有某种明确性质的一些对象的全体，人们能够根据它所具有的性质判定一个已知对象是否属于它.

通常用英文大写字母表示集合，小写字母表示集合中的元素，例如记集合 $A=\{x \mid x$ 具有某性质 $P\}$. 如果集合 $A$ 所含的元素为有限多个(总数可记为 $n(A)$)，则称 $A$ 是有限集，如果集合 $A$ 的元素有无限多个，则称 $A$ 为无限集. 有些集合我们可以把集合中的元素列举出来，这种表示集合的方法叫做列举法，例如 $A=\{0,1,2,3,\cdots,100\}$ 及 $B=\{2,4,6,\cdots\}$. 在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常是一个给定集合的子集. 这个给定的集合叫做全集.

下面给出集合运算的一些常用术语及其记号.

$x\in A$ 表示 $x$ 是集合 $A$ 中的元素，$x\notin A$ 表示 $x$ 不是集合 $A$ 中的元素，不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

$A\subset B$，或者 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$ 表示 $A$ 中任一元素是 $B$ 的元素，此时称 $A$ 是 $B$ 的子集.

$A=B$ 表示 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A$ 与 $B$ 有完全相同的元素.

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$称为 $A$ 与 $B$ 的并集.

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$称为 $A$ 与 $B$ 的交集.

$A-B=\{x \mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$称为 $A$ 与 $B$ 的差集.

$\overline{A}=\{x \mid x\in U$ 但 $x\notin A\}$称为 $A$ 的补集，其中 $U$ 为全集.

我们可以把集合的交并运算推广到许多集合的情形. 例如，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\{x \mid$ 存在自然数 $n$，使得 $x\in A_n\}$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\{x \mid x\in A_n$，对一切自然数 $n$ 成立$\}$.

下面给出关于集合的例子，其中点的邻域是今后常用的基本概念.

## 2. 实数集

微积分中研究的基本对象是定义在实数集上的函数，因此我们今后遇到的集合主要是由实数构成的集合. 从中学数学课中，我们知道实数由有理数和无理数两部分组成. 每一个有理数都可以用分数形式 $\dfrac{p}{q}$（$p,q$ 为整数，$q\neq 0$）表示，也可以用有限十进小数或无限十进循环小数表示；而无限十进不循环小数则表示无理数. 今后用 $\mathbf{R}$ 表示实数集合，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集合，$\mathbf{Z}$ 表示整数集合，$\mathbf{N}$ 表示自然数集合，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集合.

实数具有如下一些主要特性：

（1）实数集对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的，即任意两个实数在进行加、减、乘、除（除数不为 0）任何一个运算之后，所得的和、差、积、商仍然是实数.

（2）实数是有序的，即 $\forall a,b\in\mathbf{R}$，必满足下述关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$.

（3）实数具有阿基米德（Archimedes）性，即 $\forall a,b\in\mathbf{R}$，若 $b>a>0$，则存在数 $n\in\mathbf{Z}^+$，使得 $na>b$.

（4）实数全体具有稠密性，即 $\forall a,b\in\mathbf{R}$，$a<b$，$\exists c\in\mathbf{R}$，使 $a<c<b$（且 $c$ 既可以是有理数，也可以是无理数）.

如果在一直线（通常画成水平直线）上确定一点 0 作为原点，指定一个方向为正向（通常把指向右方的方向规定为正向），并规定一个单位长度，则称此直线为**数轴**. 于是任一实数都对应数轴上唯一的点；反之，数轴上每一点也都唯一地代表一个实数. 正由于全体实数与整个数轴上的点有着一一对应关系，在今后的叙述中，我们可把“实数 $x$”说成“点 $x$”，对这两个术语不加区别.

我们还可以把数轴上的点和实数 $x$ 的上述对应关系推广. 在平面解析几何中，我们知道平面（称为**二维空间**）上的点可以和有序实数对 $(x_1,x_2)$ 之间建立一一对应关系，因此也称 $(x_1,x_2)$ 为**二维点**，于是平面上的点集合可由实数 $x_1$ 和 $x_2$ 表示. 例如 $A=\{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2=R^2\}$ 表示平面上以原点为圆心、半径为 $R$ 的圆周上的点集合，$B=\{(x_1,x_2) \mid x_1>0,x_2>0\}$ 表示第一象限点的集合. 类似地，$n$ 个实数的有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为一个 ***n* 维点**（或 ***n* 维向量**），所有 $n$ 维点的集合称为 ***n* 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$. 本书第 7 章介绍的空间解析几何就是研究 $\mathbf{R}^3$ 中的点集.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

### 3. 不等式

由于实数是有序的，因此，任意两个实数可以比较大小. 不等式的运算具有下列性质：

(1) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

(2) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

(3) $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$.

(4) $a>b,ab>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(5) $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

不等式在微积分中占有很重要的地位，很多定理是用等式表达的，却都是通过不等式加以证明的. 熟悉基本不等式和掌握证明不等式的基本方法，在今后的学习中十分重要. 作为例子，我们证明两个常用的不等式.

**例 1.1**　伯努利(Bernoulli)不等式：

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad \forall n\in \mathbf{Z}^+ \text{ 及 } x>-1. \tag{1.1}$$

**证**　$n=1$ 时不等式(1.1)显然成立. 设 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 成立，则

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

**例 1.2**　A-G 不等式：

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = G_n, \quad \forall a_1,a_2,\cdots,a_n>0. \tag{1.2}$$

**证**　这是一个古老的不等式，它有多种证明方法，下面的证明引自美国数学月刊 83 期(1976). $A_2\geqslant G_2$，显然成立. 设 $A_{n-1}\geqslant G_{n-1}$ 成立，下面证明 $A_n\geqslant G_n$. 不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$（否则重新编号即可），于是有

$$a_1 \leqslant A_n \leqslant a_n, \tag{1.3}$$

从而得到

$$A_n(a_1+a_n-A_n) = a_1a_n+(a_n-A_n)(A_n-a_1) \geqslant a_1a_n. \tag{1.4}$$

由归纳假设，对于 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_1+a_n-A_n$ 这 $n-1$ 个正数有

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{nA_n-A_n}{n-1} = \frac{1}{n-1}[a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-A_n)]\\ &\geqslant \sqrt[n-1]{a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n)},\end{aligned}$$

两端 $n-1$ 次乘方得

$$A_n^{n-1} \geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n),$$

两边同乘 $A_n$，并由(1.4)式得

$$A_n^n \geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n)A_n \geqslant a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n,$$

再开 $n$ 次方得

$$A_n \geqslant G_n.$$

从例 1.2 的证明中不难看出，不等式(1.3)及其后的不等式，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号. 于是我们可以断言：$n$ 个正数的几何平均值 $G_n$ 不超过它们的算术平均值 $A_n$，当且仅当它们全相等时才有 $G_n = A_n$.

### 4. 区间 · 邻域 · 数集的界

我们把数轴上某一段中连续的点的集合称为**区间**，依据端点坐标的隶属关系及是否有限可分为如下几种情形(下列各式中 $a<b$，$a,b$ 为实数)：

(1) 闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(2) 开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；

(3) 半开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$；

(4) 无穷区间 $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$；
$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$；
$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

上述前三种区间是有限区间，第四种区间称为无穷区间，其中符号“$+\infty$”读作“正无穷大”或“正无穷”，符号“$-\infty$”读作“负无穷大”或“负无穷”，它们仅是一种符号，并不是具体实数. 当区间有限时，称 $b-a$ 为区间的长度.

有时用一个大写字母，例如 $I$，$X$ 等表示一个区间，在不加其他说明时，可理解为上述情形中的任一种.

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta$ 为某一正数，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**，简称 **$a$ 的邻域**，通常记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$. 称 $U(a,\delta)-\{a\}=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为**点 $a$ 的 $\delta$ 去心邻域**，简称**去心邻域**. 称开区间 $(a,a+\delta)$ 为**点 $a$ 的右邻域**，$(a-\delta,a)$ 为**点 $a$ 的左邻域**.

当 $M$ 为充分大正数时，如下一些数集

$$U(\infty)=\{x \mid |x|>M\},\quad U(+\infty)=\{x \mid x>M\},\quad U(-\infty)=\{x \mid x<-M\}$$

分别称为 $\infty$ 邻域，$+\infty$ 邻域，$-\infty$ 邻域.

下面给出关于数集“界”的概念.

**定义 1.1** 设 $S$ 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集，若存在实数 $M$(或 $m$)使得 $x\leqslant M$(或 $x\geqslant m$)，$\forall x\in S$，则称 $M$(或 $m$)为数集 $S$ 的**上界**(或**下界**)，并称 $S$ 为**上有界**(或**下有界**)**集合**. 若 $S$ 既上有界又下有界，则称 $S$ 为**有界集合**. 若 $\forall M>0$，$\exists x\in S$ 使 $x>M$(或 $x<-M$)，则称 $S$ 为**上无界**(或**下无界**)**集合**，上无界集合和下无界集合统称**无界集合**.

显然，$S$ 为有界集合 $\Leftrightarrow \exists K>0$ 使 $|x|\leqslant K$，$\forall x\in S$. 这时称 $K$ 为数集 $S$ 的**界**.

例如，正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 是一个下有界但上无界集合，1 是 $\mathbf{Z}^+$ 的一个下界，为证 $\mathbf{Z}^+$ 上无界，可反证，倘若 $K$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 的上界，显然 $K>1$，由实数的阿基米德性，$\exists n\in\mathbf{Z}^+$ 使 $n\cdot 1>K$，这与假设 $K$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 的上界相矛盾.

请读者自行证明,任何有限区间都是有界集,无限区间都是无界集,由有限个数组成的数集都是有界集.

若一个数集 $S$ 上有界,则它就有无限多个上界,上界中最小者称为 $S$ 的**上确界**,记为 $\sup S$;若 $S$ 为下有界集合,则下界中最大者称为 $S$ 的**下确界**,记为 $\inf S$.

例如,若 $S=(0,1)$,则 $\sup S=1$,$\inf S=0$. 对数集 $E=\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}^+\right\}$,有 $\sup E=\frac{1}{2}$,$\inf E=-1$. 这两个例子说明 $\sup S$,$\inf S$ 可能属于 $S$,也可能不属于 $S$.

我们知道无限多个实数组成的集合中不一定有最大数,也不一定有最小数. 例如开区间 $(0,1)$ 中既无最大数,也无最小数. 因此,我们自然会问上有界集合是否必有上确界? 下有界集合是否必有下确界? 回答是肯定的,有下述定理.

**定理 1.1**(确界定理)　每一个非空上有界(或下有界)集合必有唯一的实数作为它的上确界(或下确界).

定理 1.1 是本书的理论基础,它的证明涉及实数的严格数学定义,故略去. 应注意,这条定理在有理数集合内就不成立. 例如,由 $\sqrt{2}$ 的精确到 $10^{-n}$ $(n\in\mathbf{Z}^+)$ 的不足近似值所构成的有理数集 $A=\{1.4,1.41,1.414,\cdots\}$ 是有界集合,但它的上确界不是有理数,而是无理数 $\sqrt{2}$.

## 习　题　1.1

**A 组**

1. 设 $A=\{0\}$,$B=\{0,1\}$,下列陈述是否正确? 并说明理由.

(1) $A=\varnothing$;　(2) $A\subset B$;　(3) $0\in A$;　(4) $\{0\}\in A$;

(5) $0\subset A$;　(6) $A\cap B=0$;　(7) $A\cup B=B$.

2. 设由 1 至 10 的自然数组成的集合为全集,它的三个子集 $A,B,C$ 为

$$A=\{\text{偶数}\},\quad B=\{\text{奇数}\},\quad C=\{3\text{ 的倍数}\}.$$

试求下列各集合的元素:

(1) $B\cap C$;　(2) $\overline{A}\cap\overline{C}$;　(3) $\overline{A\cap C}$.

3. 设全集 $U$ 为男女同班的全体学生组成的集合,其中 $A=\{\text{男学生}\}$,$B=\{\text{戴眼镜的学生}\}$,试写出下列各项所表示的集合:

(1) $A\cap B$;　(2) $\overline{A}\cap B$;　(3) $A\cap\overline{B}$;　(4) $A\cup B$;

(5) $\overline{A}\cup B$;　(6) $A\cup\overline{B}$;　(7) $\overline{A\cap B}$;　(8) $\overline{A\cup B}$.

4. 设 $A=\{(x,y)\mid x-y+2\geqslant0\}$,$B=\{(x,y)\mid 2x+3y-6\geqslant0\}$,$C=\{(x,y)\mid x-4\leqslant0\}$,其中 $(x,y)$ 表示坐标平面上点的坐标. 在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域.

5. 设 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$,$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant0\}$. 试求能使 $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$,$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant3\}$ 的 $a,b$ 的值.

6. 设 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，验证下列等式：

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$；

(2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$；

(3) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$；

(4) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$.

7. 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 同号且大于$-1$.

8. 利用上题证明：若 $x>-1$ 且 $n>1$，则

(1) $(1+x)^n \geqslant 1+nx$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立；

(2) $1+\frac{x}{n} \geqslant (1+x)^{\frac{1}{n}}$.

9. 分别利用伯努利不等式和 $A$-$G$ 不等式证明不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+.$$

10. 证明对任何 $x \in \mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2| \geqslant 1$；

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geqslant 2$.

11. 下列数集是否有上（下）确界？若有的话，写出其上（或下）确界.

(1) $S_1 = \left\{1-\frac{1}{2^n} \middle| n \in \mathbf{Z}^+\right\}$；

(2) $S_2 = \{n^{(-1)^n} \mid n \in \mathbf{Z}^+\}$.

**B 组**

1. 设 $A, B, C$ 是任意集合，求证：

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. 证明当 $n>1$ 时，$\left(\frac{n+1}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

3. (1) 设 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 为实系数二次三项式，求证：$\forall x \in \mathbf{R}$ 均有 $y \geqslant 0$（或 $y>0$）成立的充要条件是 $b^2-4ac \leqslant 0$（或 $b^2-4ac<0$）；

(2) 利用(1)的结果证明柯西(Cauchy)不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \quad \forall x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbf{R}.$$

4. 设 $a,b,c,d$ 均为实数，求证：

(1) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-c|$；

(2) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|\leqslant|a-c|+|b-d|$.

## 1.2　函数及其性质

### 1. 映射与函数

设某校某班的学生集合为 $A$，每个学生均有一个学号(自然数)与之对应，这种对应便是数学中的映射(mapping). 映射也是现代数学中很重要的基本概念. 中学里已经知道函数是一种特殊的映射. 下面给出映射与函数(function)的一般定义.

**定义 1.2**(映射与函数)　设 $A$、$B$ 是两个非空集合，如果存在某一法则 $f$，对 $A$ 中每一个元素 $x$，按照法则 $f$，$B$ 中有唯一的元素 $y$ 与之对应，记为 $y=f(x)$，则称 $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 中的**映射**，一般称 $y=f(x)$ 是 $x$ 的**像**.

特别地，如果 $B\subset\mathbf{R}$，则称 $f$ 是 $A$ 上的一个**函数**.

如果 $A\subset\mathbf{R}$，$B\subset\mathbf{R}$，则称 $f$ 是一元函数，$x$ 为自变量，$y$ 为因变量，$A$ 称为 $f$ 的定义域，$\{f(x)\mid x\in A\}$ 是 $f$ 的值域，它是 $B$ 的一个子集，有时记为 $f(A)$. $\mathbf{R}^2$ 中子集 $\{(x,f(x))\mid x\in A\}$ 称为 $f$ 的图形.

如果 $A\subset\mathbf{R}^2$，$B\subset\mathbf{R}$，则 $f:A\to B$，$z=f(x,y)$，$f$ 称为二元函数，也可记为 $z=f(P)$. 式中 $P=(x,y)\in A\subset\mathbf{R}^2$.

类似地，可以定义 $n$ 元函数($n=3,4,\cdots$).

以下列出几种特殊的映射：

(1) 若 $f(A)=B$，则称 $f:A\to B$ 为**满映射**.

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in A$，$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 $f:A\to B$ 为**单映射**.

(3) 若 $f:A\to B$ 既是单映射又是满映射，则称 $f:A\to B$ 为**双映射**或 **1-1 映射**.

例如，$y=\sin x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 既不是单映射也不是满映射；$y=\sin x:\mathbf{R}\to[-1,1]$ 是满映射，但不是单映射；$y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ 是双映射.

首先介绍一元函数.

要确定一个函数必须指出两点：第一，定义域；第二，对应法则. 函数的值域通常不必指明，因为当定义域与对应法则确定之后，值域也就确定了.

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 $x=a$ 时，对应的 $y$ 值用 $y=f(a)$ 表示.

函数的定义域一般是根据问题的实际意义来确定的，例如，$A=\pi r^2$ 给出了圆面积 $A$

关于半径 $r$ 的函数关系. 它的定义域为 $r>0$，即一切正实数，值域显然也是一切正实数. 又如 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\frac{1}{3}\sin 2x$ 都给出了函数 $y$ 与自变量 $x$ 的函数关系. 对这些用解析式给出的函数关系，如果没有标明定义域，我们通常把定义域理解为使这些解析式在实数范围内有意义的一切自变量的值. 前者定义域为 $[-1,1]$，后者定义域为 $\mathbf{R}$. 而它们的值域分别为 $[0,1]$ 与 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

函数有以下几种表示方法.

(1) 解析法：如上面指出的用解析式给出函数关系.

(2) 图像法：在平面直角坐标系 $Oxy$ 上，以自变量 $x$ 为横坐标，相应的函数值 $y=f(x)$ 为纵坐标，动点 $M(x,f(x))$ 的轨迹构成一条曲线，称为**函数的图形**或**图像**. 反之，坐标面上任何一条曲线表示一个函数（与自变量 $x$ 对应的函数值为曲线上点 $(x,y)$ 的纵坐标 $y$），这样用图像表示函数的方法称为图像法.

(3) 表格法：利用表格将自变量的值与对应的函数值表示出来，例如火车运行的里程与票价表、对数函数表、三角函数表等. 用表格法给出的函数关系只能得到离散的数值，通常是近似值，但它在实践中仍有广泛的应用.

在本书中，我们主要通过函数的解析表达式来研究函数的性质.

下面看几个例子.

**例 1.3** 通常把不超过 $x$ 的最大整数记为 $[x]$，而把函数 $y=[x]$ 称为**取整函数**，它也可以写成

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

取整函数的图形参见图 1.1，图中小圆圈表示该点不在函数的图形上.

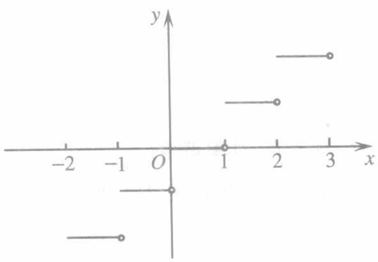


图 1.1

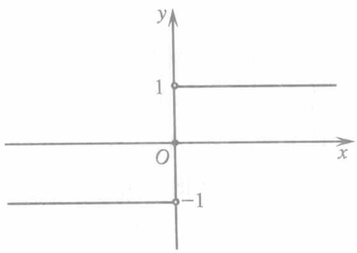


图 1.2

**例 1.4** 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，图形见图 1.2.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com